МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

«ЛИЦЕЙ СОВРЕМЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ УПРАВЛЕНИЯ №2» Г.ПЕНЗА

**II открытый региональный конкурс**

**исследовательских и проектных работ школьников**

**«Высший пилотаж - Пенза» 2020**

 **«Избранные методы решения уравнений.»**

**Автор: Климонов Кирилл Юрьевич,**

**11 «В» класс,**

**муниципальное бюджетное**

**общеобразовательное учреждение**

**«Лицей современных**

**технологий управления № 2» г.Пензы.**

**Научный руководитель: Гейдарова Людмила Руслановна,**

**учитель математики,**

**муниципальное бюджетное общеобразовательное**

**учреждение «Лицей современных**

**технологий управления № 2» г.Пензы.**

**Пенза**

**2019 год**



**✉- 440008, г. Пенза, ул. Бакунина, 115**

**☎- телефон /841-2/ 54-20-44; e-mail:** **school02@guoedu.ru**

[**Http://www.lstu2.ru**](http://www.lstu2.ru/)

Содержание:

1. Введение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

2.Теоретическая часть. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .. 4 – 6

3.Практическая часть. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 – 14

4.Задания для самостоятельного выполнения . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

5.Заключение. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .16

6.Литература и источники. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

1. **Введение**

 Математика - древняя наука, появившаяся одновременно с письменностью, около восьми тысяч лет назад. Эта наука используется повсеместно, например, в физике, химии, биологии. Одна из главных составляющих математики, на которой зиждутся многие исследования, - уравнения.
 Уравнение - равенство, содержащее неизвестное число. Оно может быть как простым (например, линейное, содержащее одну переменную ), так и сложным (содержащим несколько переменных). Решению уравнений в школьной математике уделяется особое внимание. Это объясняется тем, что уравнения есть как в программе начальной школы, так и в каждом последующем классе общеобразовательных школ, гимназий, лицеев, колледжей. Многие геометрические задачи, задачи по физике, химии и биологии также решаются с помощью уравнений.

 В этой работе рассмотрены решения уравнений нетрадиционными методами, с помощью которых можно решать достаточно сложные задачи. Нестандартное решение заключается в том, чтобы путем логических рассуждений, основываясь на свойства функций, на неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, на скалярное произведение векторов, избежать громоздких математических преобразований, а иногда решить уравнение, которое нельзя решить стандартными способами.

 Данная тема является крайне нужной, потому что решение заданий, содержащих уравнения, принесет учащемуся дополнительные баллы на экзамене или олимпиаде. Следовательно, целью нашей работы мы ставим доступное описание методов решения самых проблемных видов уравнений.

 Таким образом, в качестве объекта исследования я рассматриваю уравнения, встречающиеся на ЕГЭ и на олимпиадах различных уровней, а в качестве субъекта – методы решения этих уравнений.

Задачи:

* Поиск и анализ литературы, содержащей методы решения уравнений методом равносильности.
* Поиск и анализ литературы, содержащей методы применения обратных функций для решения уравнений.
* Поиск и анализ литературы, содержащей методы решения уравнений, содержащих несколько неизвестных.
* Поиск и анализ литературы, содержащей нестандартные методы решения уравнений.
* Составление брошюры с кратким и доступным описанием методов решения избранных видов уравнений.
* Составление небольшого сборника, содержащего данные виды уравнений, для тренировки.

Этапы работы:

* Сортировка и структурирование найденной информации для описания проблемных видов уравнений.
* Составление сборника для тренировки на основе найденной информации.

Методы исследования: анализ, синтез, сравнение, наблюдение, метод расчетов, моделирование.

1. **Теоретическая часть**
* **Использование равносильности для решения уравнений**

**Теорема 1**. Если *f(x)* - монотонно возрастающая функция, то уравнения

*ƒ (x)= x* и *ƒ(ƒ(x))= x* равносильны, то есть:

  ***ƒ(x)=x ƒ(ƒ(x))= х.***

**Доказательство:**

1. Докажем сначала, что из *ƒ (x)= x*  *ƒ(ƒ(x))= x* .

Если  – корень уравнения *ƒ (x)= x* , то есть ** то очевидно, что ** Отсюда следует, что - корень уравнения *ƒ(ƒ(x))= x*.

I часть теоремы доказана.

1. Докажем, что из *ƒ(ƒ(x))= x*  *ƒ (x)= x* .

Пусть - корень уравнения (2), то есть **

Установим, что отсюда следует: **

Предположим, что **и для определенности предположим, что *f(x0)>x0* (cлучай *f(x0)<x0* рассматривается аналогично).

Тогда получим, что  *f (f(x0))>f(x0)>x0*.(1)

Отсюда находим **что противоречит равенству *f(f(x0))=x0.*

Данный способ работает, если функция монотонно возрастает, потому что при убывании 2 часть теоремы не справедлива, т.к. перестают быть верными неравенства(1).

* **Решение уравнений с помощью использования обратных функций.**

Если *y=f(x)* определена, непрерывна и монотонна на множестве *X (X R),* причем множество значений этой функции *Y*. Тогда существует функция *g(x),* обратная к функции *f(x),* область определения которой, *Y*, область значений *X*, которая непрерывна и монотонна (с тем же, что и  *f(x)* направлением монотонности). В дальнейшем при решении примеров будем использовать теорему:

**Теорема 2**: Уравнения *f(x)=g(x)* и *f(x)=x* равносильны, если *f(x)* возрастает и уравнение *f(x)=g(x)* является следствием уравнения *f(x)=x,* если *f(x)* убывает.

**Доказательство**:

1. Пусть *х0* корень уравнения *f(x)=x*, т.е *х0=f(x0).*

Тогда *х0Х*. Но *f(x0) Y*, а значит *х0Y*. В таком случае *х0* и *f(xо)* попадают в область определения функции *g(x)*, значит, *g(x0)=g(f(x0)).*

Но *g(f(x0))=x0*, а *x0=f(x0).* Итак, *g(x0)=f(x0),* т.е *х0* корень уравнения *f(x)=g(x).*

1. Пусть *f(x)* возрастает и *f(x0)=g(x0)* (т.е *х0-* корень уравнения *f(x)=g(x),*тогда *х0**Х*; но и *g(x0)**X*, значит*, f(x0)* *X***.** В таком случае, *g(x0)* и *f(x0)* попадают в область определения функции *f(x),* значит *f(f(x0))=f(g(x0))=x0*. (2)

Если *f(x0)>x0*, то поскольку обе части неравенства попадают в область определения функции *f(x),* то учитывая её возрастание, имеем, что *f(f(x0))>f(x0);* но *f(x0)>x0*, откуда *f(f(x0))>f(x0)>x0*, что противоречит (2).

Аналогично доказывается невозможность случая *f(x0)<x0*, итак, остается единственное *f(x0)=xo*.

**Теорема 3**: Если *f(x)* монотонная непрерывная функция, то уравнения:



Доказательство:

1. Пусть *x0*корень уравнения  , т.е. 

Отсюда следует, что  (т.к. *f(g(x0))=х0* ).

Из того, что *f(x)-* монотонная функция, находим 

II**.**  Пусть *x0* корень уравнения  т.е. 

 Отсюда находим, что  (т.к.).

* **Использование метода неопределенных коэффициентов.**

Этод метод опирается на следующие утверждения:

1. Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях х;
2. Любой многочлен третьей степени раскладывается на произведение линейного и квадратного множителей;
3. Любой многочлен четвертой степени раскладывается на произведение двух многочленов второй степени.
* **Исследование ОДЗ.**

Областью допустимых значений (сокращенно ОДЗ) уравнения называется множество тех значений неизвестного, при которых имеют смысл его левая и правая части.

 В этом пункте мы рассматриваем решение иррациональных уравнений, которые можно решать стандартным путем, избавляясь от иррациональности, а затем выполнить проверку. Но такой способ ведет к громоздким вычислениям, к решению рациональных уравнений четвертой, шестой степени, которые решить очень сложно. При решении некоторых уравнений знание ОДЗ уравнения и применение некоторых оценок позволяет найти все его корни или доказать, что их нет.

* **Использование числовых неравенств.**

Иногда, применяя то или иное числовое неравенство к одной из частей уравнения. Его можно заменить равносильной ему системой уравнений. Примером такого неравенства является неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных чисел , где аi> 0; равенство достигается при условии 

Часто бывает полезно пользоваться следствиями из этого неравенства, например,

 а)   при *a* > 0 ( равенство достигается при *a* = 1);

б)   при *a* < 0 ( равенство достигается при *a* = –1).

* **Использование метода оценки.**

**Мажорантой** данной функции f(х) на множестве Р, называется такое число М, что либо f(х) ≤ М для всех х ϵ Р, либо f(х) ≥ М для всех х ϵ Р.

**Пусть мы имеем такое уравнение f(x)=g(x) и существует такое М, что для любого x из области определения имеем f(x)** ≤M и g(x) ≥М(или наоборот), тогда исходное уравнение равносильно системе:

 

* **Использование монотонности функций при решении уравнений.**

 Очень часто мы встречаемся с такими уравнениями, в которых методом подбора легко определить корень, чаще всего один, но решить уравнение, это значит не только найти его корень, но и доказать, что он единственный. Столкнувшись с этим, многие начинают решать это уравнение стандартным способом, который может оказаться запутанным и сложным. Но если применить свойства монотонности функций, то можно многие подобные уравнения решать более рационально.

 Основная идея такова: если f(x) монотонно возрастает, а g(x) монотонно убывает, то уравнение f(x)=g(x) имеет не более одного решения, причем если х=х0- решение этого уравнения, то при х >х0 (х входит в область определения обеих функций f(x) и g(x)) будет f(x)>g(x) , а при х<x0 будет f(x)<g(x).

* **Использование векторов при решении уравнений.**

При решении некоторых уравнений удобнее использовать скалярное произведение векторов

* **Сведение решения иррационального уравнения к решению тригонометрического уравнения.**

 При этом способе применяются следующие замены переменной.

1. Если в уравнении радикал, то можно сделать замену  или.

2. Если в уравнении радикал, то можно сделать замену  .

3. Если в уравнении радикал, то можно сделать замену  или.

* **Умножение обеих частей уравнения на некоторую функцию.**

 При этом надо помнить, что возможно появление лишних корней — корней многочлена, на который умножали уравнение. Поэтому надо либо умножать на многочлен, не имеющий корней, и получать равносильное уравнение, либо умножать на многочлен, имеющий корни, и тогда каждый из таких корней надо обязательно подставить в исходное уравнение и установить, является ли это число его корнем.

* **Решение уравнений, содержащих несколько неизвестных в одном уравнении**
1. **Практическая часть**

**Решение уравнений методом равносильности**

**Пример 1.:** Решите уравнение: 

*Решение*. Рассмотрим функцию 

Тогда исходное уравнение примет вид:  или 

Введенная функция *f(x)* монотонно-возрастающая на R, так как 

На основании приведенной выше теоремы 1 переходим к равносильному уравнению *f(x)=x* или  (3.1)

Уравнение (3.1) можно записать следующим образом: 

Решим теперь это уравнение. Для этого сделаем следующие преобразования:



Отсюда *x-1=0* или 

Уравнение  не имеет действительных корней, так как *D<0.*

Ответ: .

**Пример 2.:** Решить уравнение 

*Решение:*  Рассмотрим функцию f(x)=1+, эта функция монотонно возрастает. Имеем уравнение f(f(x))=x.

В соответствии с теоремой заменяем его эквивалентным уравнением f(x)=x или   . Пусть  . Имеем у2-у-1=0,

У1,2=; У1=, У2= - не удовлетворяет условию .

 , , х=. Ответ: х=.

 **Пример 3.:** Решить уравнение .

*Решение:* преобразуем уравнение .

Данное уравнение имеет вид: f(f(x))=x, где f(x)=, эта функция монотонно возрастает. Согласно теореме имеем эквивалентное уравнение:  х3-2х+1=0, (х-1)(х2+х-1)=0. х1=1 или х2+х-1=0, х2,3=

Ответ: х1=1, х2=, х3=.

**Пример 4.:** Решить уравнение ln(1+lnх)=x-1.

 *Решение:* ln(1+lnx)+1=x, Это уравнение имеет вид x=f(f(x) , где f(x)=lnх+1. f(x)=1+lnx – монотонно возрастает при х > 0, следовательно, уравнение эквивалентно уравнению х=lnх+1, х-1=lnх.

 Решим это уравнение графически: у=х-1 – графиком этой функции является прямая, проходящая через точки с координатами (0;-1), (1;0)

Функция у=lnx определена при х>0 . Очевидно, что х=1-корень уравнения, его единственность подтверждается графически.

 у

 1

 х

 0 1

Ответ: х=1.

**Применение обратных функций к решению уравнений.**

**Пример 5:** Решить уравнение: 

***Решение***. Перепишем уравнение в виде: 

Найдем функцию *g(x),* обратную к функции *f(x): * отсюда  .или 

Имеем, что *f(x)=g(x),* где *f(x)-* возрастающая функция, т.к.   Применяя теорему 2, получим, что  или 

 Поскольку  то *х-1=0* или  Тогда *x=1*, а последнее квадратное уравнение действительных корней не имеет.

Ответ:

**Пример 6:** Решите уравнение: 

***Решение***. Очевидно, что ОДЗ уравнения . Это уравнение можно переписать следующим образом: 

Введем в рассмотрение функцию 

При   – возрастающая функция, т.к. 

Найдем функцию *g(x),* обратную к : 

Отсюда следует, что  Тогда исходное уравнение можно записать в виде:  Применяя здесь теорему 2, получим, что  Отсюда 

Ответ:.

**Пример 7:**. Решить уравнение: 

***Решение***. Очевидно, что   и 

Пусть  Тогда 

Функция  монотонно-возрастающая, т.к.  следовательно, заданное уравнение равносильно: 

Это уравнение не трудно решить и ответом будет являться .

Ответ: .

**Использование метода неопределенных коэффициентов.**

**Пример 8:** Решить уравнение:

*Решение:* Будем искать многочлены  и  такие, что справедливо равенство Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной х в левой и правой частях этого равенства, получим систему равенств Получим 

 Эта совокупность имеет единственное решение 

Ответ: 

**Исследование ОДЗ.**

 **Пример 9:** Решить уравнение-=-

Решение: видно, что для решения этого уравнения можно возвести в квадрат обе части уравнения, что возможно позволит избавиться от иррациональности

11х+3-2+2-х=9х+7-2+х-2

Приведем подобные 10х+5-2=10х+5-2

**=**.

 После возведения в квадрат обеих частей уравнения, приведем подобные и получим стандартное квадратное уравнение 20х2-30х-20=0, 2х2-3х-2=0,

х1=, х1=2 х2=, х2=-0,5

Полученные корни необходимо проверить, т.к. при возведении в квадрат, возможно приобретение посторонних корней.

Проверка: х=2, -=5,-=5, 5=5х=2 корень данного

уравнения, х=-0,5 ,-=- х=-0,5-посторонний корень.

Ответ: х=2

 Однако, сравнив области определения функций у=, (х-20, х2) и у=, (2-х, приходим к выводу, что область определения исходного уравнения х=2. Подставив х=2 в данное уравнение, приходим к выводу, что х=2 единственный корень этого уравнения.

Ответ: х=2.

 **Пример 10:** Решить уравнение:

 *Решение*: Попытки решить уравнение, производя последовательное возведение в квадрат и единение радикала, ведут здесь к уравнению четвертой степени и заводят в тупик. Выпишем условия, при которых выражения, входящие в левую часть данного уравнения, имеют смысл.

Решения нет.

Видим, что нет таких действительных х при которых было бы определено данное уравнение.

Ответ: нет корней.

**Использование числовых неравенств.**

 **Пример 11:** Решить уравнение:.

*Решение*: ОДЗ этого уравнения – все действительные числа. Переписав левую часть в виде

, замечаем, что она не меньше четырех, как сумма двух взаимно обратных положительных чисел, и только при х=0 она равна 4. Правая часть при х=0 тоже равна 4, а для всех других х она меньше 4. Значит, х=0 – единственный корень .

Ответ: х=0.

**Пример 12:** Решить уравнение 2х+4х+2564=3 16х.

*Решение:* попытки решить такое уравнение стандартным путем чаще всего заканчиваются неудачей, использование неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим существенно облегчает задачу. Оценим левую часть уравнения:



Левая часть уравнения не меньше 3 16х, а правая равна 3 16х. Равенство возможно только при условии 2х=4х=232, х=2.

Ответ: х=2.

**Пример 13:** Решить уравнение ** .**

Решение: дважды применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом ( во второй раз в показателе степени), получаем цепочку равенств и неравенств

**=**

**=**

При этом равенство достигается при условии **,** тогда ****

Ответ: ****

**Пример 14:** Решить уравнение: 2cosx=cosx+.

 *Решение*: оценим правую и левую части уравнения.

Т.к. , то левая часть уравнения .

Правая часть уравнения должна быть положительна, т.к. 2t>0, значит cosx>0. Используя неравенство Коши .

Тогда, если корень данного уравнения существует, то только в том случае, если правая и левая части уравнений равны 2.

 Ответ: х=2Пк, кZ.

**Использование метода оценки.**

**Пример 15:** Решите уравнение 

*Решение.*1. Задаем функции g(x) и f(x):  , .

2. Находим области значения функций:





Получаем систему:

 при . ,следовательно, единственным решением неравенства является корень -7/4

Ответ :-7/4

**Пример 16:** Решите уравнение

*Решение.*1. Задаем функции g(x) и f(x):  , .

2. ОДЗ уравнения – все действительные числа. Находим области значения функций:

, 

Получаем систему:

Первое уравнение имеет корни  и . Второму уравнению удовлетворяет только , следовательно, оно является решением исходного уравнения.

Ответ : .

**Использование монотонности функций при решении уравнений**

**Пример 17:** Решить уравнение:3х+4х=7х.

*Решение*: разделим обе части уравнения на 7х,  очевидно, что х=1- корень уравнения и он единственный т.к. левая часть уравнения представляет собой монотонно убывающую функцию. Следовательно, каждое свое значение она принимает один раз.

Ответ: х=1.

**Пример 18:** Решить уравнение: 

*Решение:* традиционный метод решения такого уравнения хорошо известен. Легко заметить, что х=1 корень. Левая часть уравнения задают возрастающую функцию, правя константу. Следовательно, данное уравнение может иметь не более одного корня.

Ответ: х=1.

**Пример 19:** Решить уравнение::

*Решение*: х=1, функция у=возрастает на множестве

на этом же множестве у= убывает. Поэтому х=1- единственный корень.

Ответ: х=1.

**Использование векторов при решении уравнений.**

**Пример 20:** Решить уравнение 

*Решение*: область определения этого уравнения:  

Этот способ решения приводит к трудоемким вычислениям.

 Решим это уравнение другим способом: пусть   воспользуемся скалярным произведением векторов и их коллинеарностью.

, значит, векторы   коллинеарные, тогда

Ответ: х=

**Сведение решения иррационального уравнения к решению тригонометрического уравнения.**

**Пример 21:** Решить уравнение.

*Решение*: ОДЗ уравнения – все действительные числа. Сделаем замену , где . Тогда уравнение примет вид . Т.к. для рассматриваемых t, то это уравнение равносильно уравнению 

**Умножение обеих частей уравнения на некоторую функцию.**

**Пример 22 .** Решите уравнение: 

*Решени****е***. Умножив обе части этого уравнения на многочлен получим уравнение , которое является следствием исходного уравнения:

так как это уравнение имеет корень  не являющийся корнем исходного уравнения.

 Поскольку *х=0* не является корнем уравнения-следствия, то, разделив обе части этого уравнения на  и перегруппировав его члены, получим уравнение равносильное уравнению- следствию . Обозначив  перепишем его в виде . Это уравнение имеет два корня:  и  Отсюда  и  Решив каждое из этих уравнений, найдем четыре корня:  Так как корень  является посторонним, то получаем, что уравнение имеет только три корня: *x1, x2, x3*.

 Ответ: .

# Решение уравнений, содержащих несколько неизвестных в одном уравнении

**Пример 23**. Найти пары чисел *x* и y, которые удовлетворяют уравнению:

.

*Решение*. Заданное уравнение запишем виде 

Далее имеем, что 

Поэтому данное уравнение равносильно такой системе: 

Откуда: *x=2; y=-1.* Ответ: .

**Пример 24**. Решите уравнение: .

*Решение*. Очевидно, что . Выделим полные квадраты по переменным *x* и *y*:  или  Отсюда 

Ответ: *{(1;1); (1;-1); (-1;1); (-1;-1)}.*

**Пример 25.** Решите уравнение: 

*Решение*. Перепишем уравнение в виде: 

Значит,  откуда  Ответ: .

**Пример 26.**  Решить уравнение: 

*Решение*. Имеем, что 

Причем здесь равенство достигается только при  *x=1;y=-3.*

Ответ: .

**Пример 27.** Решите уравнение: .

*Решение*. Выделим полные квадраты по переменным *x* и *y*:

 Отсюда: *x=2; y=1,5.*

 Ответ: .

**Пример 28.** Решите уравнение: 

*Решение*. Запишем уравнение вида  или 

Поскольку и  причем равенство достигается только при *х=0* и *у=1*, получим единственное решение: *х=0 и у=1.*

Ответ:

**4. Задания для самостоятельного выполнения**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. gif.2. gif.3. gif.4. gif.5. frac%7b1%7d%7b12%7d.6. frac%7b4%7d%7bx%5e2%7d=477. gif8. gif9. gif10. gif11gif13. gif14. gif15. gif16. gif17. gif18. gif19. gif20. gif21. gif22. gif23. gif24. gif25. gif26. gif27.gif28. right)=029. right)=630. gif31. frac%7b2%7d%7b3%7d32. gif**5. Заключение:** | 33. frac%7b81x%5e2%7d%7b(9+x)%5e2%7d=4034. gif35. sqrt%7b6%7d=036. frac%7bx+4%7d%7bx-4%7d=437. gif38. gif39. gif40. gif41. frac%7b3v%7d%7bv%5e2+v-5%7d+4=042. gif43. gif44 frac%7b5%7d%7b2%7dx-3=045. gif46. gif47. frac%7bx%5e4+324%7d%7bx%5e2+6x+18%7d=43-6x48. 49. 50.51. 52.53. 54. 55.56.57. 58.59. http://mat.1september.ru/2009/10/129.gif |

Математика, как и любая другая наука не стоит на месте. Вместе с развитием общества меняются взгляды и потребности людей, возникают новые мысли и идеи. Однако некоторые вещи остаются неизменными: необходимость уметь составлять и решать уравнения.

В работе исследованы и проанализированы различные методы решения нестандартных уравнений. Нестандартные приемы решения уравнений позволяют получить результат более рациональным способом, при этом решение занимает меньше времени, а также оно более интересно.

Несмотря на то, что выше были рассмотрены только уравнения, с помощью этих методов можно решать и другие задачи. К сожалению, довольно сложно привести четкой классификации по методам решения уравнений. Выбор метода решения предстоит сделать ученику на основе анализа исходных уравнений. При решении уравнений нестандартными способами возникают вопросы, проявляется интерес к поиску нового способа решения.

В ходе работы я смог найти интересные уравнения, а главное, открыть для себя

неизвестные мне ранее «элегантные» методы решения, что помогло подготовиться к

олимпиадам различного уровня, выстраивать дорогу к успешной сдаче ЕГЭ и расширить математический кругозор.

 **6. Литература и источники**:

1. Голубев В. И. «Решение сложных и нестандартных задач по математике».

 – М.: «Илекса», 2007г.

1. Далингер В. А. «Нестандартные уравнения и методы их решения», Омск, 1995 г.
2. Ивлев Б. М., Абрамов А. М., Дудницын Ю. П., Швардцбурд С. И. «Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа». – М.: «Просвещение», 1990 г.
3. Ковалева Г. И., Конкина Е. В. «Функциональный метод решения уравнений и неравенств» / Г.И. Ковалева, Е.В. Конкина: учеб. пособие для учащ. и учителей. – М.: Чистые пруды, 2008.
4. Кравцев С. В. «Методы решения задач по алгебре». – М.: «Оникс», 2001 г.
5. Тихомиров В.М. Новелла о великом олимпийце и нестандартной задаче // Квант, 1996. № 1. С. 52-53.
6. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. «Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения»: Учебно-метод.пособие.- М.:Дрофа, 2002 г.
7. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б. Алгебраический тренажер-«Илекса», Харьков: Гимназия,1998г.,-320с.
8. Горнштейн П. И. Мерзляк. А.Г. Экзамен по математике и его подводные рифы-«Илекса», Харьков :Гимназия,1998г.,-237с.