

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение  
«Гимназия № 53»

## Исследование графиков линейных функций на плоскости параметров $(k; b)$

Выполнила Попова Анастасия,  
ученица 10 класса  
Научный руководитель  
Монахова Оксана Александровна  
доцент кафедры «Математическое образование» ПГУ

Пенза, 2026

## Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1. Основные понятия</b>	<b>5</b>
§ 1.1 Общее уравнение прямой	5
§ 1.2 Уравнение прямой с угловым коэффициентом	6
§ 1.3 Преобразование Хафа	7
§ 1.4 Плоскость параметров	7
<b>Глава 2. Решение исследовательской задачи</b>	<b>9</b>
§ 2.1 Частные случаи прямых на плоскости преобразов и их образы	9
§ 2.2 Преобразы точек лежащих на прямой $b = k$	11
§ 2.3 Образ пучка прямых с центром в точке $(m; n)$	11
§ 2.4 Преобраз прямой $b = uk + v$	12
§ 2.5 Частные случаи расположения прямых на плоскости параметров	13
<b>Список источников</b>	<b>15</b>

## Введение

В современном мире постоянно растёт объём данных. Большие информационные массивы удобно обрабатывать с помощью компьютера. Часто информация представлена в графическом виде: снимки, чертежи, рисунки, рукописный текст. Для анализа и обработки изображений используют технологии компьютерного распознавания объектов на изображении. Важную роль для распознавания имеют специальные алгоритмы, в том числе алгоритм, основанный на преобразовании Хафа. Ключевую роль в этом алгоритме играет представление объектов на плоскости параметров.

*Целью* представленной работы является изучение свойств образов линейных функций, заданных в прямоугольной системе координат с помощью уравнения  $y = kx + b$ , на плоскости параметров ( $k; b$ ).

Современные обобщения преобразований Хафа используют представление линий в полярной системе координат. Такие преобразования хорошо изучены и широко используются. [1] Однако в литературе [2] отмечается важность и актуальность представления линий и в прямоугольной декартовой системе координат, что и определяет *актуальность* представленной работы. Несмотря на некоторые ограничения, связанные с исключением вертикальных прямых из рассмотрения, преобразование Хафа для прямоугольной системы координат так же значимо как и для полярной, кроме того оно приводит к понятиям проективной геометрии. [3].

Алгоритмы, основанные на преобразовании Хафа и его обобщениях, используются в самых различных сферах. Например, в медицине плоскость параметров применяется для анализа изображений, в робототехнике – для построения моделей окружающей среды и определения положения объектов в пространстве, в космических исследованиях – для анализа спутниковых изображений и создания 3D-моделей.

Использование плоскости параметров помогает в анализе и обработке данных, а также в создании более точных моделей окружающего мира, что подтверждает *практическую значимость* представленной работы.

Работа носит учебно-исследовательский характер. Результаты работы не были ранее опубликованы. В представленной работе были найдены ответы на некоторые вопросы, поставленные автором книги [3]. В частности на следующие вопросы:

1. Рассмотрим на плоскости ( $k; b$ ) прямую  $b = k$ . Каждая точка этой прямой задает на плоскости ( $x; y$ ) прямую, а вся прямая  $b = k$  задает на

плоскости  $(x; y)$  семейство прямых. Каким свойством обладает это семейство прямых?

2. Рассмотрим семейство всех прямых плоскости  $(x; y)$ , которые проходят через точку  $(m; n)$ . Как это семейство прямых изображается на плоскости  $(k; b)$ ?

3. Рассмотрим на плоскости  $(k; b)$  прямую  $b = ik + v$ . Какое семейство прямых на плоскости  $(x; y)$  изображает эта прямая?

4. На координатной плоскости  $(k; b)$  проведено три прямые, проходящие через одну точку. Каждая такая прямая изображает некоторое семейство прямых на плоскости  $(x; y)$ . Как эти семейства прямых связаны между собой?

5. На координатной плоскости  $(k; b)$  проведено три параллельные прямые. Каждая такая прямая изображает некоторое семейство прямых на плоскости  $(x; y)$ . Как эти семейства прямых связаны между собой?

Вопросы, которые рассмотрены в работе, представляют интерес не только с математической точки зрения. Изучение плоскости параметров остается важным направлением в науке и технологиях. Исследование выходит за рамки математики, имеет **метапредметный** характер. Оно показывает, как решение теоретических задач (анализ образов на параметрической плоскости) связано с пониманием работы алгоритмов, определяющих развитие целого спектра цифровых технологий.

## Глава 1. Основные понятия

В этой главе описываются основные понятия необходимые для решения исследовательской задачи. В основном приводится обзор открытых источников информации, сети Интернет. Приводятся общеизвестные факты из курса алгебры и геометрии.

### § 1.1 Общее уравнение прямой

Рассмотрим координатную плоскость с прямоугольной системой координат. Система координат определяется двумя взаимно перпендикулярными направленными осями  $OX$  (горизонтальной осью) и  $OY$  (вертикальной осью), с точкой пересечения  $O$  – началом отсчета или началом системы координат и заданным единичным отрезком. Положение любой точки на координатной плоскости определяется парой действительных чисел  $(x;y)$  – координатами точки. Для определения координат точки опускают перпендикуляры из этой точки на координатные оси – строят проекции точки на оси. В качестве координаты берут длину отрезка, соединяющего начало отсчета с проекцией точки, с соответствующим знаком. Если проекция точки лежит на положительном направлении оси – то координата положительна, если на противоположном – отрицательна, если совпадает с началом отсчета – то равна 0. Первая координата называется абсциссой, определяется проекцией на ось  $OX$ , вторая называется ординатой – проекцией на ось  $OY$ . Начало системы координат – точка  $O$  имеет координаты  $(0; 0)$ .

Координаты точек, лежащих на прямой, удовлетворяют уравнению прямой. Уравнение вида  $Ax + By + C = 0$  называется общим уравнением прямой. В этом уравнении  $A, B, C$  – коэффициенты являются любыми действительными числами, хотя бы один из коэффициентов  $A$  или  $B$  не равен 0,  $x$  и  $y$  – координаты точки, принадлежащей прямой, заданной этим уравнением. Пара коэффициентов  $(A; B)$  определяет координаты вектора перпендикулярного этой прямой, пара  $(-B; A)$  определяет координаты параллельного вектора для этой прямой.

В зависимости от равенства коэффициентов 0 прямые могут по-разному располагаться относительно координатных прямых. Рассмотрим частные случаи:

- 1) если коэффициент  $C = 0$ , то прямая  $Ax + By = 0$  проходит через начало системы координат – точку  $O$ ;
- 2) если коэффициент  $A = 0$ , то прямая  $By + C = 0$  параллельна оси  $OX$  является горизонтальной прямой;

3) если коэффициент  $B = 0$ , то прямая  $Ax + C = 0$  параллельна оси  $OY$  является вертикальной прямой.

Рассмотрим взаимное расположение прямых заданных общим уравнением.

Пусть первая прямая определяется уравнением -  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ , вторая уравнением -  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ . Рассмотрим частные случаи:

1) если  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ , то прямые совпадают, значит, пропорциональные уравнения определяют одну прямую;

2) если  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ , то прямые, определяемые этими уравнениями, параллельны;

3) если  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ , то прямые имеют одну общую точку – пересекаются, в случае  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$  прямые перпендикулярны.

## § 1.2 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Поскольку нет однозначного соответствия между прямой и ее общим уравнением, то перейдем к уравнению с угловым коэффициентом. Пусть в общем уравнении прямой коэффициент  $B \neq 0$ . Разделим обе части уравнения на него и выразим  $y$ . Получим уравнение  $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ , которое можно представить в виде  $y = kx + b$ , которое называется уравнением прямой с угловым коэффициентом. Действительные числа  $k$  и  $b$  называются угловым коэффициентом и свободным членом соответственно. Число  $k$  равно тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси  $OX$ . Число  $b$  является ординатой точки пересечения прямой с осью  $OY$ .

1) Если свободный член  $b$  в уравнении  $y = kx + b$ , равен 0, то прямая, определяемая уравнением  $y = kx$ , проходит через начало координат.

2) Если угловой коэффициент  $k$  равен 0, то прямая  $y = b$  параллельна оси абсцисс.

Рассмотрим взаимное расположение прямых, заданных уравнением с угловым коэффициентом. Первая прямая определяется уравнением  $y = k_1x + b_1$ , вторая уравнением  $y = k_2x + b_2$ .

1) Если угловые коэффициенты прямых  $y = k_1x + b_1$ ,  $y = k_2x + b_2$  равны  $k_1 = k_2$ , то прямые параллельны.

2) В случае  $k_1 \cdot k_2 = -1$ , прямые перпендикулярны.

Если в общем уравнении прямой  $Ax + By + C = 0$  коэффициент  $B = 0$ , то перейти к уравнению с угловым коэффициентом не получится, прямая

$Ax + C = 0$  является вертикальной, ее уравнение можно переписать в виде  $x = a$ .

### § 1.3 Преобразование Хафа

При автоматизированном анализе цифровых изображений очень часто возникает проблема идентификации простых фигур, таких как прямые, круги или эллипсы. Во многих случаях используется алгоритм поиска границ в качестве предобработки для получения точек, находящихся на кривой в изображении. Однако, либо из-за зашумлённости изображения, либо из-за несовершенства алгоритма обнаружения границ, могут появиться «потерянные» точки на кривой, также как и небольшие отклонения от идеальной формы прямой, круга или эллипса. По этим причинам часто довольно сложно приписать найденные границы соответствующим прямым, кругам и эллипсам в изображении. В середине 20 века для распознавания объектов на снимках был создан вычислительный алгоритм, который получил имя своего разработчика Пола Хафа. Назначение преобразования Хафа — разрешить проблему группировки граничных точек путём применения определённой процедуры голосования к набору параметризованных объектов изображения. [1]

В последнее время преобразование Хафа и его обобщения используются в так называемом «компьютерном зрении» системах искусственного интеллекта выполняющих, например, функцию распознавания штрих-кодов, рукописного текста, анализа медицинских снимков МРТ и рентгена, детектирования треков спутников, радиолокационных целей, дорожной разметки, калибровки камер. [1]

Теоретической основой этого алгоритма является представление линий точками пространства параметров. Причем для представления прямых используются точки плоскости, определяемые двумя параметрами прямой, для более сложных кривых количество параметров увеличивается, например, для окружности необходимы три параметра.

### § 1.4 Плоскость параметров

В источнике [1] указано, что чаще используется представление прямой с помощью параметров, известных как  $\rho$  и  $\theta$ . Параметр  $\rho$  - это длина радиус-вектора ближайшей к началу координат точки на прямой (то есть нормали к прямой, проведенной из начала координат), а  $\theta$  это угол между этим вектором и осью абсцисс. При таком описании прямых не возникает проблем с вертикальными прямыми. В этом случае уравнение прямой получает вид

$\rho = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta$ . Поэтому возможно связать с каждой прямой на исходном изображении (в плоскости  $XOY$ ) точку с координатами  $\rho$  и  $\theta$  в плоскости параметров, которая является уникальной при условии, что  $\theta \in [0; 2\pi]$  и  $\rho \geq 0$ .

Через каждую точку плоскости может проходить бесконечно много прямых. Если эта точка имеет координаты  $(x_0, y_0)$ , то все прямые, проходящие через неё, соответствуют уравнению:  $\rho(\theta) = x_0 \cdot \cos \theta + y_0 \cdot \sin \theta$ . Это соответствует синусоидальной линии в пространстве Хафа  $(\rho, \theta)$ , которая, в свою очередь, уникальна для данной точки и однозначно её определяет. Если эти линии (кривые), соответствующие двум точкам, накладываются друг на друга, то точка (в пространстве Хафа), где они пересекаются, соответствует прямой (в оригинальном месте изображения), которые проходят через обе точки. В общем случае, ряд точек, которые формируют прямую линию, определяют синусоиды, которые пересекаются в точке параметров для той линии. Таким образом, проблема обнаружения коллинеарных точек может быть сведена к проблеме обнаружения пересекающихся кривых.[1]

В представленной работе рассматривается другой подход. Каждая прямая пусть определяется своим уравнением с угловым коэффициентом  $y = kx + b$ . Ей поставлена в соответствие на плоскости параметров точка с координатами  $(k; b)$ . Вертикальные прямые в этом случае не рассматриваются. Важность обеих точек зрения подчеркивается в статье [2].

## Глава 2. Решение исследовательской задачи

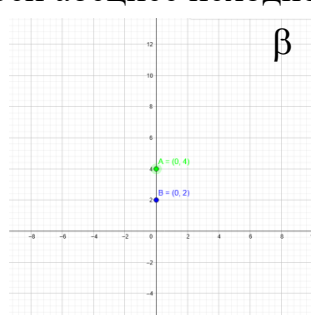
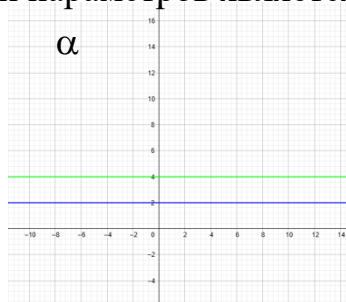
В этой главе рассмотрены вопросы, связанные с различными случаями расположения прямых на исходной плоскости прообразов и соответствующие им образы. Некоторые вопросы, исследования были поставлены в книге [3].

Используется следующая терминология. Исходной плоскостью, плоскостью  $\alpha$ ,  $XOY$  или  $(x; y)$  здесь называется плоскость, на которой заданы исходные объекты – прообразы для преобразования Хафа. Исходными объектами считаются прямые, заданные в прямоугольной декартовой системе координат с помощью уравнения с угловым коэффициентом. Вертикальные прямые не рассматриваются, в некоторых случаях считается, что у таких прямых бесконечный угловой коэффициент. Плоскостью параметров, плоскостью  $\beta$ ,  $(k; b)$ , плоскостью образов, здесь называется плоскость с прямоугольной системой координат  $kOb$ . Множество всех прямых кроме вертикальной, проходящих через одну точку, называется пучком прямых с центром в их общей точке.

### § 2.1 Частные случаи прямых на плоскости прообразов и их образы

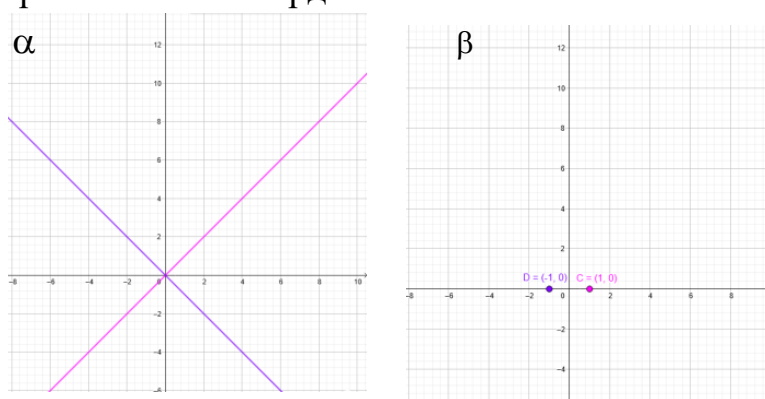
Рассмотрим на координатной плоскости  $\alpha$  прямую заданную уравнением с угловым коэффициентом  $y = kx + b$ . На плоскости параметров  $\beta$  этой прямой соответствует точка с координатами  $(k; b)$ . В свою очередь каждая точка плоскости  $\beta$  определяет на плоскости  $\alpha$  единственную прямую. Между множеством прямых, заданных уравнением  $y = kx + b$ , где  $k$  и  $b$  – любые действительные числа и множеством точек плоскости параметров устанавливается однозначное соответствие.

1) Если на плоскости  $\alpha$  прямая  $y = b$  параллельна оси  $OX$ , то есть угловой коэффициент  $k = 0$ , то на плоскости параметров  $\beta$  ей соответствует точка с координатами  $(0; b)$ , лежащая на оси ординат. Таким образом, все точки оси ординат на плоскости параметров соответствуют множеству горизонтальных прямых на исходной плоскости. Точка с координатами  $(0;0)$  на плоскости параметров является образом оси абсцисс исходной плоскости.

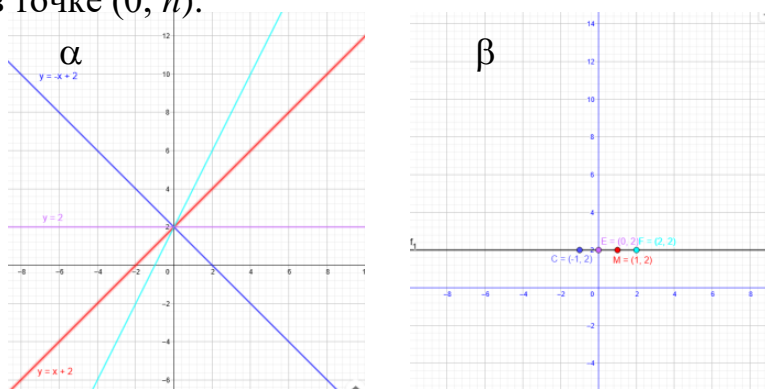


2) Вертикальным прямым и оси ординат в частности на плоскости прообразов не соответствует ни одна точка плоскости параметров. В некоторых случаях можно считать, что таким прямым соответствуют бесконечно удаленные точки, аналоги таких точек используются в проективной геометрии или в геометрии Лобачевского. [4]

3) Если в плоскости параметров точка находится на оси абсцисс и имеет координаты  $(k; 0)$ , то на исходной плоскости ей соответствует наклонная прямая, с угловым коэффициентом  $k$ , проходящая через начало координат. Таким образом, точки, лежащие на оси абсцисс в плоскости параметров, определяют множество всех прямых, проходящих через начало координат кроме оси  $OY$  на исходной плоскости прообразов, они образуют пучок прямых с центром в начале координат.

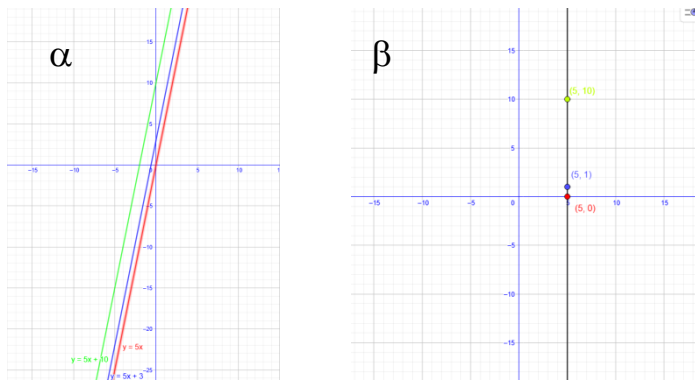


4) В плоскости параметров точки с координатами  $(k; n)$ , где  $k$  – любое действительное число,  $n$  – фиксированное число, лежащие на горизонтальной прямой  $b = n$ , определяют на плоскости прообразов пучок прямых с центром в точке  $(0; n)$ .



5) Рассмотрим на исходной плоскости параллельные прямые, заданные уравнением с угловым коэффициентом  $y = kx + b$ . У семейства таких прямых одинаковый угловой коэффициент  $k$ , и различные свободные члены  $b$ . Каждой такой прямой на плоскости параметров соответствует точка с координатами  $(k; b)$ . Семейству параллельных прямых соответствует множество точек, у которых будет одинаковая абсцисса, равная  $k$ , и ордината

$b$  будет принимать всевозможные значения. Геометрическим местом точек  $(k; b)$ , где  $k$  – фиксированное число,  $b$  – произвольное число является вертикальная прямая на плоскости параметров, проходящая через точку с координатами  $(k; 0)$ .

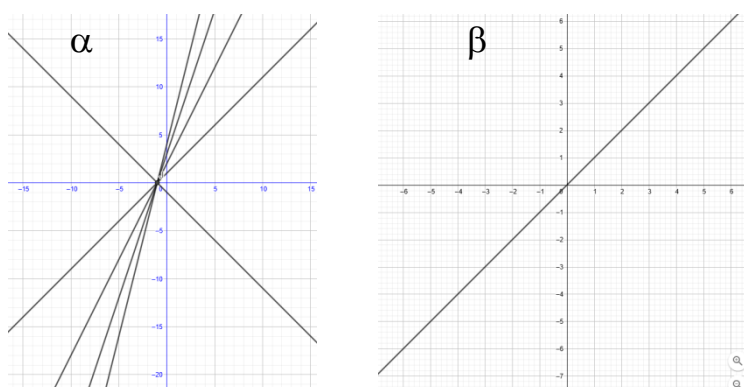


## § 2.2 Преобразы точек лежащих на прямой $b = k$

Рассмотрим в плоскости параметров множество точек лежащих на прямой  $b = k$ . Выясним, каким свойством обладают прямые, являющиеся их преобразами. Уравнение множества таких прямых имеет вид  $y = kx + k$ , где  $k$  – произвольное действительное число. На исходной плоскости все такие прямые имеют единственную общую точку с координатами  $(-1; 0)$ .

Действительно, координаты этой точки удовлетворяют каждому из уравнений этого семейства прямых:  $0 = k \cdot (-1) + k$ .

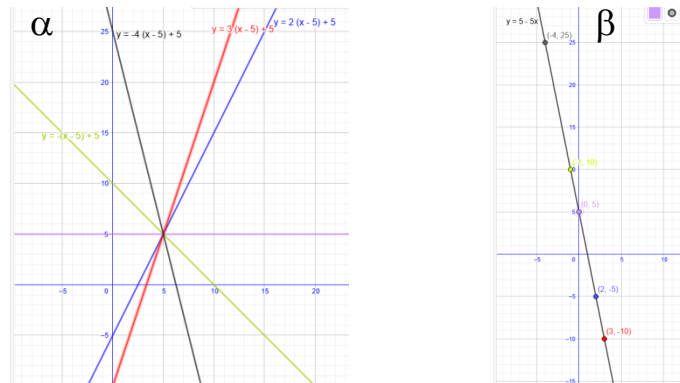
Очевидно, если две различные прямые  $y = k_1x + k_1$ ,  $y = k_2x + k_2$  и  $k_1 \neq k_2$ , имеют общую точку с координатами  $(x; y)$ , то  $k_1x + k_1 = k_2x + k_2$ , тогда  $(k_1 - k_2)(x + 1) = 0$ , откуда следует, что абсцисса общей точки равна  $-1$ , ордината равна  $0$ .



## § 2.3 Образ пучка прямых с центром в точке $(m; n)$

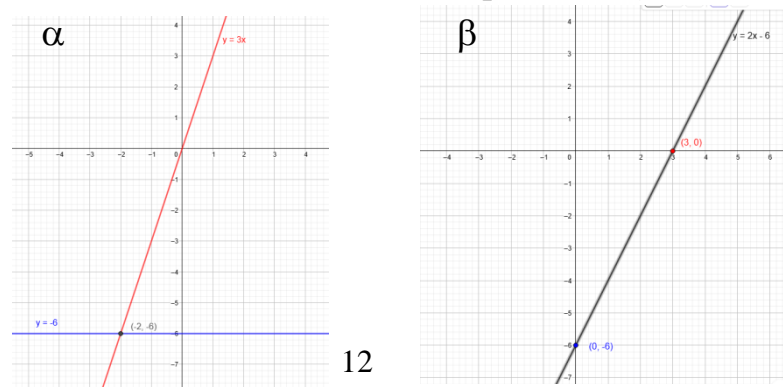
Рассмотрим семейство всех прямых плоскости  $(x; y)$ , которые проходят через точку  $(m; n)$ . Как это семейство прямых изображается на плоскости  $(k; b)$ ?

Заметим, что на исходной плоскости для семейства прямых проходящих через точку  $(m; n)$ , выполняется условие  $n = km + b$ , тогда  $b = n - km$ , тогда уравнение пучка прямых имеет вид  $y = k(x - m) + n$ , где  $m$  и  $n$  – фиксированные числа,  $k$  – произвольное действительное число. Уравнение пучка можно записать и в виде  $y = kx + n - km$ , из которого можно сделать вывод, что образом прямых этого пучка на плоскости параметров будут являться точки с координатами  $(k; n - km)$  на плоскости параметров. Геометрическим местом точек с координатами  $(k; n - km)$  является прямая  $b = n - km$  на плоскости параметров.



## § 2.4 Прообраз прямой $b = uk + v$

Рассмотрим наклонную прямую  $b = uk + v$  на плоскости параметров. Найдем прообраз этой прямой на исходной плоскости. Выберем на прямой  $b = uk + v$  две точки пересечения с координатными осями. Точка с координатами  $(0; v)$  на плоскости параметров является образом горизонтальной прямой  $y = v$  на исходной плоскости. Точка пересечения с осью абсцисс на плоскости параметров имеет координаты  $k = -\frac{v}{u}$  и  $b = 0$ , в нашем случае  $u \neq 0$  так как прямая  $b = uk + v$  на плоскости параметров наклонная – не горизонтальная. Прообразом точки  $(-\frac{v}{u}; 0)$  плоскости параметров является прямая на исходной плоскости, проходящая через начало координат, определяемая уравнением  $y = -\frac{v}{u}x$ . Точка пересечения этих прямых на исходной плоскости имеет координаты  $(-u; v)$ .



Возьмем теперь произвольную точку на плоскости параметров, лежащую на прямой  $b = uk + v$ , её координаты  $(k; uk + v)$ . Преобразом этой точки на исходной плоскости является прямая, определяемая уравнением  $y = kx + uk + v$ . Это уравнение можно переписать в виде  $y = k(x + u) + v$ . Где  $u$  и  $v$  – фиксированные числа,  $k$  – произвольное число. Это уравнение определяет пучок прямых с центром в точке  $(-u, v)$ .

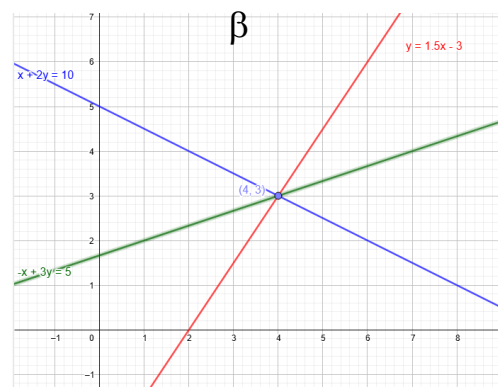
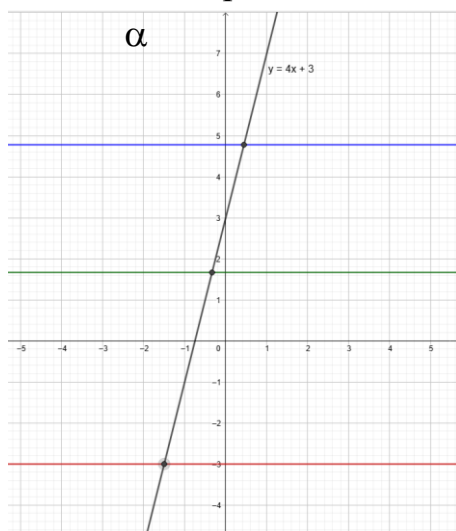
Таким образом, каждой наклонной прямой  $b = uk + v$  на плоскости параметров, а также и горизонтальной прямой  $b = v$  соответствует пучок пересекающихся прямых на исходной плоскости с центром в точке  $(-u; v)$ . Каждой вертикальной прямой на плоскости параметров соответствует пучок параллельных прямых. Если считать, что у вертикальной прямой угловой коэффициент равен бесконечности, а параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке, то можно считать, что результат для всех прямых плоскости параметров получился однообразный.

Возникает соответствие, между прямыми на плоскости параметров и точками на исходной плоскости. Полученная двойственность плоскостей  $(x; y)$  и  $(k; b)$  лежит в основе проективной геометрии, к понятиям которой и подводит эта задача. [3]

## § 2.5 Частные случаи расположения прямых на плоскости параметров

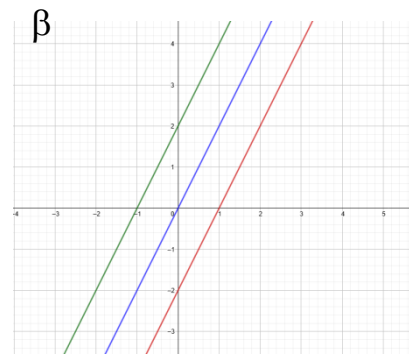
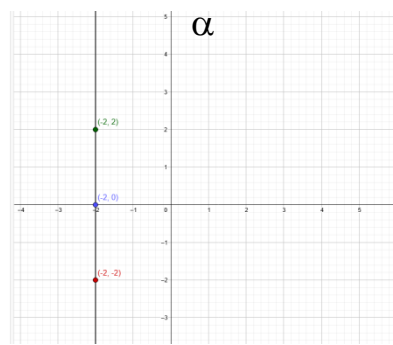
Рассмотрим теперь частные случаи взаимного расположения прямых на плоскости параметров.

1) Пусть на плоскости параметров имеется три прямые, проходящие через одну точку с координатами  $(k_0, b_0)$ . На исходной плоскости они определяют три пучка прямых. Так как на плоскости параметров есть общая точка  $(k_0, b_0)$ , то на исходной плоскости имеется общая прямая  $y = k_0x + b_0$  у всех трех пучков, соответствующая этой общей точке. Значит, центры всех трех пучков лежат на этой прямой.



Полученный вывод соответствует принципу двойственности. На исходной плоскости прямые пересекаются в одной точке, тогда на плоскости параметров образы этих прямых лежат на одной прямой. Верно и наоборот. На плоскости параметров прямые пересекаются в одной точке, тогда соответствующие этим прямым центры пучков лежат на одной прямой.

2) Пусть на плоскости параметров имеются три параллельные прямые, тогда они имеют одинаковый угловой коэффициент  $u$  и отличаются свободными членами:  $b = uk + v_1$ ,  $b = uk + v_2$ ,  $b = uk + v_3$ . Тогда на исходной плоскости они определяют три пучка прямых с центрами в точках  $(-u; v_1)$ ,  $(-u; v_2)$ ,  $(-u; v_3)$ . Таким образом, центры пучков лежат на одной вертикальной прямой  $x = -u$ .



Если считать, что параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке, тогда пучку параллельных прямых на плоскости параметров соответствует вертикальная прямая на исходной плоскости. А вертикальной прямой на исходной плоскости соответствует бесконечно удаленная точка плоскости параметров.

## Список источников

1. **Преобразование Хафа** [Электронный ресурс] // Вики-энциклопедия «Руниверсалис». – URL: [https://ru.ruwiki.ru/wiki/Преобразование\\_Хафа](https://ru.ruwiki.ru/wiki/Преобразование_Хафа) (дата обращения: 08.01.2026).
2. **Николаев, Д. П. Об определении преобразования Хафа как дискретного приближения преобразования Радона** / Д. П. Николаев // Информационные процессы. – 2023. – Т. 23, № 2. – С. 274–288. – URL: <http://www.jip.ru/2023/274-288-2023.pdf> (дата обращения: 08.01.2026).
3. **Сгибнев, А. И. Исследовательские задачи для начинающих** / А. И. Сгибнев. – Москва : МЦНМО, 2015. – 136 с.
4. **Бесконечно удалённые элементы** // Математическая энциклопедия : в 5 т. / гл. ред. И. М. Виноградов. – Москва : Советская энциклопедия, 1977. – Т. 1.

**Рецензия**  
**на учебно-исследовательскую работу**  
**ученицы 10 класса МБОУ «Гимназия №53» г. Пензы**  
**Поповой Анастасии**

**«Исследование графиков линейных функций на плоскости параметров  $(k; b)$ »**

На практике математические преобразования, связывающие различные пространства, являются основой для алгоритмов обработки данных. Например, преобразование Хафа позволяет находить прямые на зашумленных изображениях, что критически важно для систем компьютерного зрения. В теории такая связь реализуется через переход из пространства изображений в пространство параметров.

В представленной работе с использованием математических методов исследованы свойства пары взаимосвязанных пространств: плоскости изображения  $(x, y)$  и плоскости параметров прямых  $(k, b)$ . Использование параметрического представления в данной модели помогает наглядно проиллюстрировать, как точка в одном пространстве соответствует семейству прямых в другом, и наоборот. Это преобразование лежит в основе классического алгоритма и имеет глубокий геометрический смысл, что создает ему преимущество как мощному инструменту для теоретического анализа. В ходе проведенного исследования автором получены конкретные геометрические интерпретации для различных семейств прямых, даны ответы на поставленные в научной литературе вопросы.

При выполнении работы Попова Анастасия освоила ключевые концепции преобразования Хафа, методы аналитической геометрии на параметрической плоскости. В работе приведена аргументированная связь полученных теоретических результатов с практическими применениями в технологиях.

Работа имеет четкую логическую структуру, строгую математическую обоснованность, выраженный метапредметный характер. Оформлена в соответствии с предъявляемыми требованиями.

Научный руководитель  
кандидат физ.-мат. наук  
доцент кафедры «Математическое образование» ПГУ



Монахова О.А.