Всероссийский конкурс исследовательских и проектных работ
школьников «Высший пилотаж»

«Анализ методов приближённого вычисления числа π»

Исследовательская работа
Направление «Математика»

Автор: Левина Анастасия Александровна,
ученица 10 класса,
ФЭЛ №29 г. Пензы

2026 г.

Содержание

Введение

Про число π известно всем: это отношение длины окружности к её же диаметру. Эта загадочная величина уже более четырёх тысяч лет остаётся объектом внимания математиков, физиков и инженеров. Число π постоянно встречается в задачах из реальной жизни: в архитектуре и строительстве, при расчёте траекторий движения в кинематике, а также при исследовании механики колебательных движений, ведь часто они описываются функциями $\sin(x)$ и $\cos(x)$.

Приближённые значения π знали ещё в Древнем Вавилоне и Древнем Египте. Более, чем за две тысячи лет до нашей эры. В Вавилоне считали, что $\pi = 3{,}125$: именно такое значение зафиксировано на глиняных табличках этой цивилизации. Египтяне же полагали, что $\pi \approx 3{,}16$: в Папирусе Ринда записана формула для площади круга. Архимед в III веке до н. э. очень точно для своего времени нашёл оценку снизу и оценку сверху для числа π, вписывая и описывая правильные многоугольники около окружности. Он вычислил, что π лежит между 3,1408 и 3,1429.

Точное значение числа π невозможно записать и сейчас, поскольку это иррациональное число: его десятичная запись бесконечна и непериодична. Поэтому число π приходится вычислять приближённо.

В эпоху цифровых технологий особенно интересны статистические методы, в которых π получают как результат большого числа случайных испытаний. Эти методы иллюстрируют нам связь геометрии, теории вероятности / математической статистики и вычислительной математики. Тем более в настоящее время их удобно проверять, реализуя компьютерные эксперименты.

Мы решили рассмотреть два разных статистических метода вычисления числа π. А также получить оценку снизу и оценку сверху для π с помощью сетки из клеточек: одни клетки лежат целиком внутри круга (оценка снизу), а другие покрывают круг (оценка сверху). Эта идея пришла по аналогии с дискретизацией звука, которую мы изучали на информатике: речь в жизни непрерывна (как «иррациональный» аналоговый сигнал), а mp3-файл на компьютере — это приближение, в котором хранится конечное число значений сигнала в секунду. Так же и площадь круга можно приблизить суммарной площадью клеток (пикселей). Назовём такой способ вычисления числа π «пиксельным» (или «π-ксельным»).

Актуальность

Сегодня компьютерные вычисления доступны почти каждому, поэтому методы, основанные на большом числе испытаний, можно изучать и проверять на практике. Статистические подходы применяются в физике (моделирование движения частиц), финансах (оценка рисков) и других областях, где важны случайные процессы.

Для школьного проекта эти методы особенно удобны тем, что они наглядные: можно «бросать точки» или «бросать иглу» и видеть, как результат постепенно приближается к π. При этом существуют и сверхточные алгоритмы вычисления π (например, формула Чудновского), но статистические методы ценны прежде всего как учебный пример: они развивают вычислительное мышление и показывают основные идеи метода Монте-Карло.

Цель и задачи

Цель проекта — исследовать несколько способов приближённого вычисления числа π и оценить их точность и удобство на практике.

Для достижения цели поставлены задачи:

1. **Рассмотреть аналитически и программно реализовать три метода:**
    - метод Монте-Карло с генерацией случайных точек в квадрате и проверкой их принадлежности кругу;
    - задачу Бюффона о бросании иглы, связывающую вероятность пересечения линий с π;
    - ”пиксельный” метод, использующий аппроксимацию круга на клеточной сетке.
2. **Провести ряд вычислительных экспериментов** для оценки точности каждого из трёх методов при разных параметрах (число испытаний N, размер сетки L).
3. **Сравнить скорость сходимости и вычислительные затраты** и определить, какой метод удобнее в разных условиях.

Гипотеза исследования

Мы предполагаем, что метод Монте-Карло даст лучшее соотношение точности и времени вычислений. Пиксельный метод позволит получить строгие оценки π снизу и сверху, но для высокой точности потребует большой сетки. Метод Бюффона, несмотря на историческую значимость, будет сходиться медленно и потребует большого числа испытаний.

Проблемы и ограничения

Статистические методы (Монте-Карло и Бюффона) требуют большого числа испытаний N для получения устойчивого результата. В пиксельном методе погрешность связана с заменой круга конечным числом клеток. В задаче Бюффона особенно важно корректно задать равномерные распределения угла и расстояния, иначе результат может заметно искажаться.

Новизна, оригинальность

Новизна работы состоит в том, что:

- пиксельный подход реализован как способ получить строгие нижнюю и верхнюю оценки для π;

- статистические методы не только используются практически для программного получения приближённого числа π, но и рассматриваются с точки зрения анализа сходимоси стандартного отклонения к нулю;
- три метода сравниваются в одинаковых условиях и в одной вычислительной среде.

1. Метод Монте-Карло

Метод Монте-Карло является универсальным статистическим методом. Он назван в честь наиболее известного генератора случайных чисел Старого Света - курорта Монте-Карло, прославившегося своими казино. Идея метода основана на использовании большого числа случайных испытаний для получения приближённого результата. В данной работе метод Монте-Карло применяется для приближённого вычисления числа π с помощью геометрической модели.

1.1. Идея метода

Возьмём квадрат со стороной 2, внутри которого вписан круг с радиусом 1. Площадь такого круга будет равна π, а площадь квадрата - 4. Если равномерно и случайно выбирать точки внутри квадрата, то доля точек, попавших внутрь круга, будет приближённо равна отношению площади круга к площади квадрата.

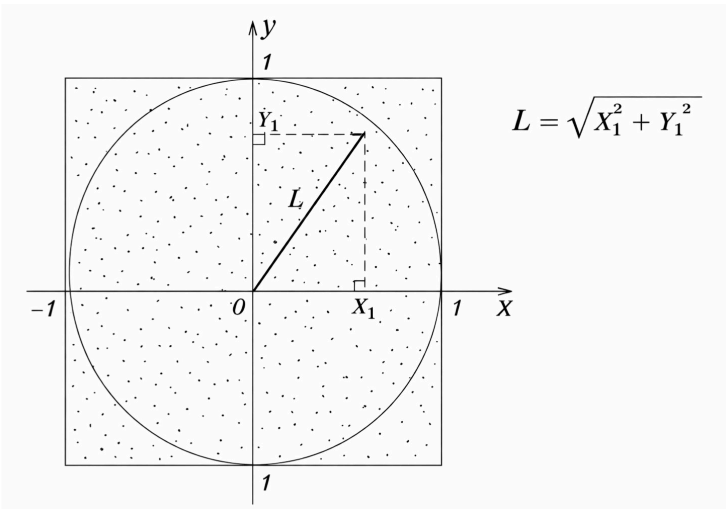

Рис. 1: Метод Монте-Карло в геометрической модели для приближённого вычисления значения π

Обозначим через N общее число случайно выбранных точек, а через K — количество точек, попавших внутрь круга. Тогда при достаточно большом N выполняется приближённое равенство

$$\frac{K}{N} \approx \frac{\pi}{4}. \tag{1}$$

Отсюда получаем формулу для приближённого вычисления числа π:

$$\pi \approx 4 \cdot \frac{K}{N}. \tag{2}$$

1.2. Случайный характер метода

Метод Монте-Карло является случайным по своей природе. Даже при одном и том же числе испытаний N результат одного эксперимента может заметно отличаться от результата другого, так как точки каждый раз выбираются случайным образом.

Поэтому использование одного запуска метода не позволяет надёжно оценить точность вычислений. Для более корректного анализа необходимо рассматривать серию независимых экспериментов.

1.3. Статистический анализ результатов

В данной работе для каждого значения N проводилось по 30 независимых экспериментов методом Монте-Карло. В результате для каждого N получалось 30 приближённых значений числа π.

Выбор числа экспериментов, равного 30, не является случайным. В математической статистике число 30 часто рассматривается как условный порог, после которого распределение средних значений становится близким к нормальному. Это связано с центральной предельной теоремой, согласно которой при достаточно большом числе независимых испытаний распределение средних значений стремится к нормальному независимо от распределения исходных случайных величин. В рамках данной работы строгое применение центральной предельной теоремы не доказывается, однако использование 30 экспериментов позволяет получить более устойчивые и наглядные статистические характеристики результатов.

Для анализа полученных данных вычислялись среднее арифметическое, медиана и стандартное отклонение. Среднее значение и медиана позволяют оценить типичное приближённое значение числа π, а стандартное отклонение характеризует разброс результатов.

1.4. Исследование сходимости

Для разных значений числа испытаний N исследовалось, как меняется стандартное отклонение приближений числа π. Экспериментально наблюдается, что при увеличении N стандартное отклонение уменьшается, то есть результаты становятся более устойчивыми и концентрируются около истинного значения числа π.

Полученные в экспериментах данные согласуются с теоретической оценкой порядка $1/\sqrt{N}$ (стандартное отклонение метода Монте-Карло). Это свойство иллюстрируется с помощью графика зависимости стандартного отклонения от числа испытаний N. Строгое аналитическое доказательство этой зависимости выходит за рамки школьного курса математики и в данной работе не приводится.

1.5. Программная реализация

```
import random
import statistics
import math
```

```python
import matplotlib.pyplot as plotlib
import numpy as np

def run_monte_carlo(N, num_experiments=30):
    results = []
    print(f"\nЗапуск {num_experiments} экспериментов методом
     ↪  Монте-Карло (N = {N:,}):")
    print("-" * 50)

    for exp in range(num_experiments):
        K = 0
        for _ in range(N):
            x = random.uniform(-1, 1)
            y = random.uniform(-1, 1)
            if x * x + y * y <= 1:
                K += 1
        pi_approx = 4 * K / N
        results.append(pi_approx)
        print(f"Эксперимент {exp + 1:2d}: π ≈ {pi_approx:.6f}")

    mean_pi = statistics.mean(results)
    median_pi = statistics.median(results)
    std_dev = statistics.stdev(results)

    theoretical_std = 4 * math.sqrt((math.pi/4) * (1 - math.pi/4) /
     ↪  N)

    print("\nСтатистический анализ результатов:")
    print(f"Среднее арифметическое: {mean_pi:.6f}")
    print(f"Медиана:                {median_pi:.6f}")
    print(f"Стандартное отклонение (экспериментальное):
     ↪  {std_dev:.6f}")
    print(f"Теоретическое отклонение (1/√N):
     ↪  {theoretical_std:.6f}")

    return std_dev, mean_pi

print("="*60)
print("ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО")
print("="*60)

N_values = [1000, 10000, 20000, 40000, 60000, 80000, 100000]
std_devs = []

for N in N_values:
    std_dev, _ = run_monte_carlo(N, num_experiments=30)
    std_devs.append(std_dev)

print("\n\nАНАЛИЗ СХОДИМОСТИ:")
print("-"*50)
```

```
print(f"{'N':<10} | {'СКО':<15} | {'Теория (1/√N)':<15} | {'Отношение'}")
print("-"*50)

for i, N in enumerate(N_values):
    theoretical = 4 * math.sqrt((math.pi/4) * (1 - math.pi/4) / N)
    ratio = std_devs[i] / theoretical if theoretical > 0 else 0
    print(f"{N:<10} | {std_devs[i]:<15.6f} | {theoretical:<15.6f} | {ratio:.2f}")

plotlib.xlabel("Количество бросков", color='red')
plotlib.ylabel("Стандартное отклонение", color='red')
plotlib.xticks([1000, 10000, 20000, 40000, 60000, 80000, 100000])
plotlib.grid(True)
plotlib.plot(N_values, std_devs)
plotlib.show()
```

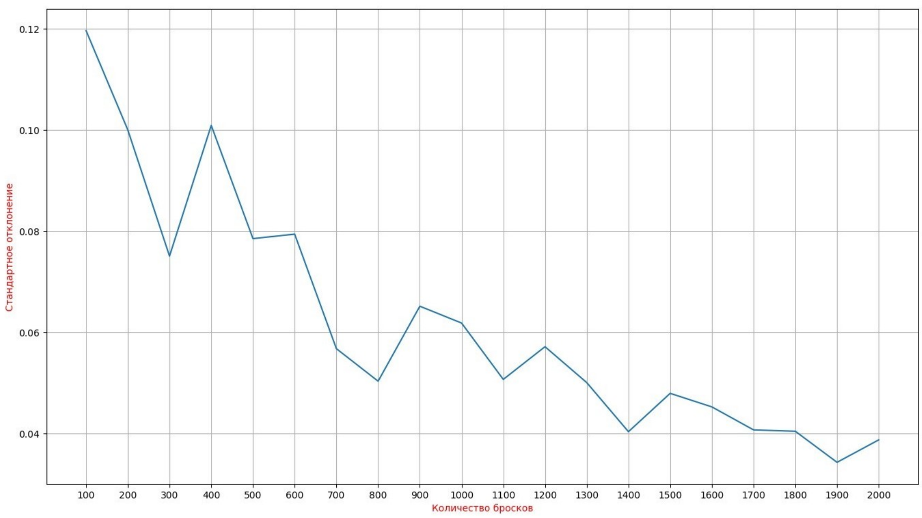

Рис. 2: Зависимость стандартного отклонения приближений числа π от числа испытаний N для метода Монте-Карло

1.6. Метод Монте-Карло - выводы

Проведенные вычислительные эксперименты показывают, что метод Монте-Карло позволяет получить приблизительные значения числа π, которые становятся более стабильными с увеличением числа тестов. Использование серии экспериментов и статистического анализа даёт более надёжную картину, чем одиночный запуск метода.

Главный недостаток метода — относительно медленная сходимость: для повышения точности нужно значительно увеличить количество случайных испытаний. Тем не менее, метод Монте-Карло наглядно демонстрирует связь геометрии, теории вероятностей и вычислительной математики, хорошо подходит для компьютерных экспериментов.

2. Метод Бюффона

Задача Бюффона - классический пример геометрической вероятности. Она показывает, что число π можно получить не только из геометрических формул, но и с помощью случайного эксперимента. В данном проекте метод Бюффона используется для приближённого вычисления числа π на основе моделирования бросков иглы на разлинованную поверхность.

2.1. Идея метода

Рассмотрим плоскость, на которой проведены параллельные прямые линии на одинаковом расстоянии друг от друга. Пусть длина иглы равна расстоянию между линиями. Если случайным образом бросать иглу на такую поверхность, то с некоторой вероятностью игла будет пересекать одну из линий.

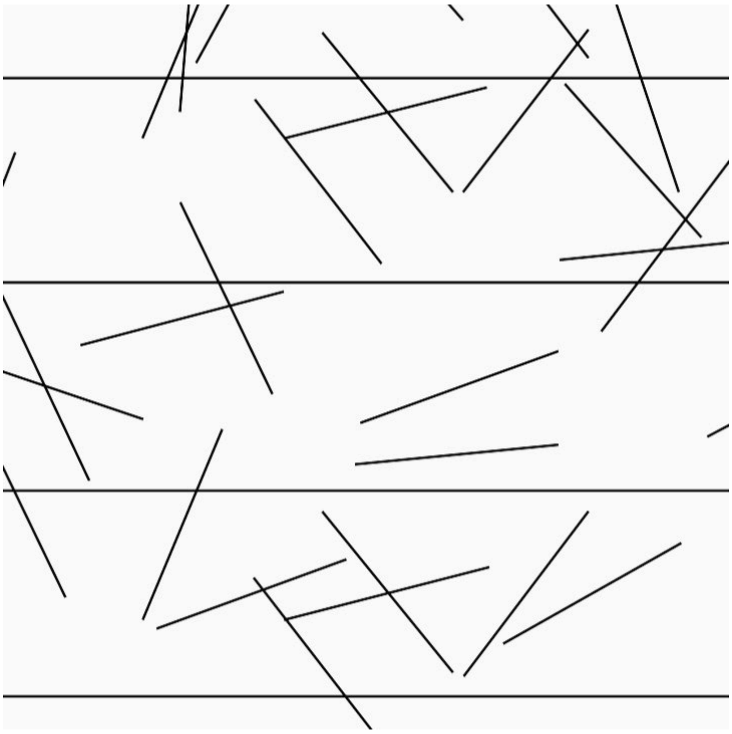

Рис. 3: Задача Бюффона для экспериментального вычисления приближённого значения π

Бюффон показал, что в этом случае вероятность пересечения выражается формулой

$$P = \frac{2}{\pi}. \tag{3}$$

Выполним большое число бросков и обозначим через N их общее число, а через K — число случаев, когда игла пересекла линию. Тогда при достаточно большом N верно, что

$$\frac{K}{N} \approx \frac{2}{\pi}. \tag{4}$$

Отсюда получается формула для приближённого вычисления числа π:

$$\pi \approx \frac{2N}{K}. \tag{5}$$

2.2. Случайный характер метода

Метод Бюффона, как и метод Монте-Карло, является случайным. Результат одного эксперимента может заметно отличаться от результата другого, даже при одном и том же числе бросков N. Это связано со случайным выбором положения иглы и угла её наклона.

Поэтому для получения более надёжных результатов необходимо рассматривать серию независимых экспериментов.

2.3. Статистический анализ результатов

В данной работе для каждого значения N проводилось по 30 независимых экспериментов методом Бюффона. В результате для каждого N получалось 30 приближённых значений числа π.

Выбор числа экспериментов, равного 30, обусловлен теми же статистическими соображениями, что и в методе Монте-Карло. В математической статистике число 30 часто рассматривается как условный порог, после которого распределение средних значений становится близким к нормальному. Это связано с центральной предельной теоремой. В рамках данной работы строгое доказательство этого факта не рассматривается, однако использование серии из 30 экспериментов позволяет получить более устойчивые и наглядные результаты.

Для анализа вычислялись среднее значение и стандартное отклонение полученных приближений числа π. Среднее значение характеризует типичный результат метода, а стандартное отклонение показывает разброс результатов.

2.4. Особенности сходимости метода

Численные эксперименты показывают, что метод Бюффона сходится значительно медленнее, чем метод Монте-Карло. Даже при большом числе бросков стандартное отклонение остаётся сравнительно большим, а отдельные приближения числа π могут заметно отличаться от истинного значения.

Это объясняется тем, что вероятность пересечения линии иглой относительно мала, и число пересечений K растёт медленно. В результате для получения приемлемой точности требуется очень большое число бросков, что делает метод Бюффона вычислительно менее эффективным.

2.5. Программная реализация

```
# Подключаем библиотеки
import random  # Для случайных чисел
import math    # Для математических операций (pi, sin)
import statistics  # Для расчёта среднего и отклонения
import matplotlib.pyplot as plotlib
import numpy as np

# Список значений N, которые будем проверять
##N_values = [1000, 10000, 20000, 40000, 60000, 80000, 100000]
```

```
N_values = [100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000,
 ↪  1200, 1300, 1400, 1500, 1600, 1700, 1800, 1900, 2000]
std_devs = []

# Сколько раз проводить эксперимент для каждого N
experiments = 30

print("МЕТОД БЮФФОНА: ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧИСЛА ПИ")
print("=" * 50)

# Для каждого значения N из списка
for N in N_values:
    print(f"\nПроверяем N = {N:,} (бросков в одном эксперименте)")
    print("-" * 40)

    # Результаты всех экспериментов
    pi_results = []

    # Серия экспериментов
    for exp in range(experiments):
        crosses = 0  # Счётчик пересечений прямых

        # Бросаем иголку N раз
        for _ in range(N):
            # Расстояние от центра иголки до ближайшей прямой (от 0
             ↪  до 0.5)
            y = random.random() * 0.5

            # Угол падения иголки (от 0 до 90 градусов)
            angle = random.random() * (math.pi / 2)

            # Проверяем, пересекает ли иголка линию
            if y <= 0.5 * math.sin(angle):
                crosses += 1

        # Вычисляем приближение числа Пи
        pi_approx = (2 * N) / crosses

        # Сохраняем результат
        pi_results.append(pi_approx)
        print(f"Эксперимент {exp+1}: π ≈ {pi_approx:.6f}")

    # Считаем среднее и стандартное отклонение
    average_pi = statistics.mean(pi_results)
    std_dev = statistics.stdev(pi_results)

    std_devs.append(std_dev)

    # Печатаем результаты для этого N
    print(f"\nИтоги для N = {N:,}:")
    print(f"Среднее значение π:   {average_pi:.6f}")
```

```
    print(f"Стандартное отклонение: {std_dev:.6f}")
    print(f"Точное π:               {math.pi:.6f}")

# plotlib.xticks([1000, 10000, 20000, 40000, 60000, 80000, 100000]) # Деления для построения графика по оси x
plotlib.xticks([100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000 ,1100, 1200, 1300, 1400, 1500, 1600, 1700, 1800, 1900, 2000]) # Деления для построения графика по оси x

plotlib.xlabel('Количество бросков', color='red') # Название оси x
plotlib.ylabel('Стандартное отклонение', color='red') # Название оси y

plotlib.grid(True)
plotlib.plot(N_values , std_devs )
plotlib.show()
```

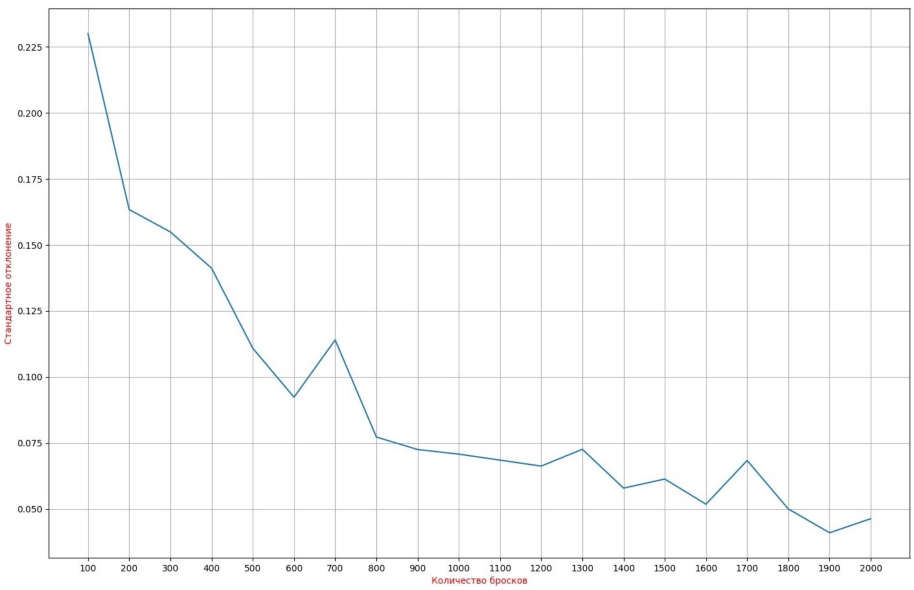

Рис. 4: Зависимость стандартного отклонения приближений числа π от числа испытаний N для метода Бюффона

2.6. Выводы по методу Бюффона

Проведённые вычислительные эксперименты наглядно показывают, что метод Бюффона действительно позволяет приближённо вычислять число π, но при этом его практическая эффективность невысока. Метод можно охарактеризовать медленной сходимостью и значительным разбросом результатов даже при использовании серии экспериментов.

Тем не менее, метод Бюффона интерессен произведение искусства. Он наглядно демонстрирует связь геометрии, теории вероятностей и случайных экспериментов, а также показывает, как число π возникает в задачах, иногда не связанных напрямую с окружностями.

3. Пиксельный метод: оценка числа π через дискретную аппроксимацию

Общая идея

Число π можно оценить детерминированно (строго определённо), если заменить гладкий круг «ступенчатой» фигурой из квадратных клеток («пикселей»). Вписываем круг в квадратную сетку размером $L \times L$ клеток и считаем:

- **нижняя оценка:** клетки, целиком лежащие внутри круга;
- **верхняя оценка:** клетки, которые пересекаются с кругом хотя бы частично.

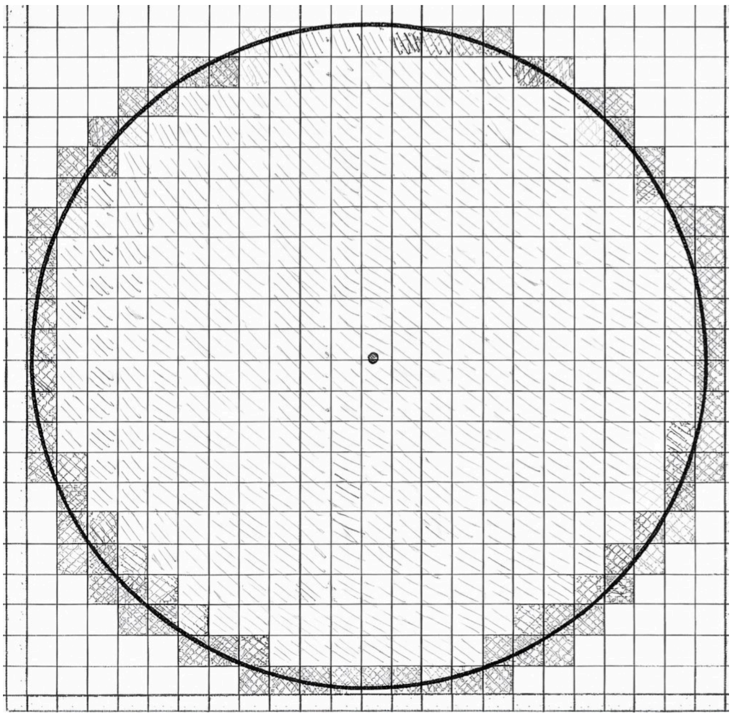

Рис. 5: π-ксельный метод детерминированной оценки значения числа π

При увеличении L обе оценки приближаются к точному значению π.

Геометрическая модель

- **Квадрат:** состоит из $L \times L$ клеток; сторона квадрата равна L (в условных единицах).
- **Круг:** вписан в квадрат, радиус $R = L/2$, центр в точке $(L/2,\ L/2)$. Уравнение:

$$(x - L/2)^2 + (y - L/2)^2 \leq R^2.$$

Площади:

$$S_{\square} = L^2, \qquad S_{\circ} = \pi R^2 = \pi \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{\pi L^2}{4}.$$

Отношение площадей:

$$\frac{S_\circ}{S_\square} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \pi = 4 \cdot \frac{S_\circ}{S_\square}.$$

Дискретные оценки

Обозначим $\frac{\sqrt{2}}{2}$ как половину диагонали клетки (при стороне 1). Пусть dist — расстояние от центра клетки до центра круга.

- **Нижняя оценка** $\pi_{\text{низ}}$: считаем клетки, **целиком** лежащие внутри круга. Достаточное условие (проверка по центру клетки):

$$\text{dist} + \frac{\sqrt{2}}{2} \le R,$$

тогда

$$\pi_{\text{низ}} = 4 \cdot \frac{S_{\text{низ}}}{L^2}.$$

- **Верхняя оценка** $\pi_{\text{верх}}$: считаем клетки, которые **пересекаются** с кругом (хотя бы одна точка клетки внутри круга). Достаточное условие:

$$\text{dist} \le R + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

тогда

$$\pi_{\text{верх}} = 4 \cdot \frac{S_{\text{верх}}}{L^2}.$$

Гарантированная граница:

$$\pi_{\text{низ}} < \pi < \pi_{\text{верх}}.$$

Программа

```
import math  # математические функции

def pixel_method(L):
    center = L / 2 + 0.5  # координаты центра круга (по центрам
    ↪ клеток)
    R = L / 2             # радиус вписанного круга

    inside_full = 0  # число клеток, полностью внутри круга
    inside_any = 0   # число клеток, пересекающих круг

    half_diag = math.sqrt(2) / 2  # половина диагонали клетки
    ↪ (сторона клетки = 1)

    for i in range(L):
        for j in range(L):
```

```
            x = i + 1.0  # координата центра клетки по x
            y = j + 1.0  # координата центра клетки по y

            # расстояние от центра клетки до центра круга
            dist = ((x - center)**2 + (y - center)**2) ** 0.5

            # клетка точно внутри круга
            if dist + half_diag <= R:
                inside_full += 1

            # клетка пересекает круг
            if dist <= R + half_diag:
                inside_any += 1

    pi_low = 4 * inside_full / (L * L)   # нижняя оценка π
    pi_high = 4 * inside_any / (L * L)   # верхняя оценка π

    return pi_low, pi_high

L = 100  # размер сетки
pi_low, pi_high = pixel_method(L)

print(f"Для сетки {L}x{L}:")
print(f"Нижняя оценка π = {pi_low:.6f}")
print(f"Верхняя оценка π = {pi_high:.6f}")
print(f"π приблизительно равен: {(pi_low + pi_high)/2:.6f}")
```

Численные примеры

Размер сетки L	$\pi_{\text{низ}}$	$\pi_{\text{верх}}$	$\frac{\pi_{\text{низ}}+\pi_{\text{верх}}}{2}$
100	3.048000	3.219200	3.133600
500	3.123584	3.158464	3.141024
1000	3.132464	3.150144	3.141304
10000	3.140704	3.142469	3.141586

Плюсы и минусы

Плюсы:

- Наглядность: легко реализовать вручную на бумаге в клетку.
- Гарантированные границы: истинное π всегда лежит между оценками.
- Детерминированность: результат повторяется при одинаковом L.

Минусы:

- Медленная сходимость: для точности порядка 10^{-4} нужна сетка примерно $L \geq 500$.

- Вычислительная сложность: время работы растёт как $O(L^2)$.
- Зависимость от положения: оценки меняются, если круг сдвинуть относительно сетки.

Заключение и выводы

Выводы

В ходе выполнения проекта была достигнута поставленная цель — исследованы и сопоставлены три способа приближённого вычисления числа π: метод Монте-Карло, метод Бюффона и ”пиксельный” метод. Для каждого из них было дано математическое обоснование, рассмотрены нюансы сходимости, статистические или иные факторы, выполнена программная реализация на Python, построены графики.

Для статистических методов (метода Монте-Карло и метода Бюффона) проведена серия из 30 независимых экспериментов для различных значений параметров. По результатам вычислялись средние значения и стандартные отклонения, что позволило оценить устойчивость и точность получаемых приближений.

Экспериментально установлено, что метод Монте-Карло обладает более быстрой сходимостью по сравнению с методом Бюффона. При увеличении числа испытаний разброс уменьшается, а приближённые значения концентрируются около истинного значения π. Метод Бюффона также позволяет получить приближение числа π, однако характеризуется значительно более медленной сходимостью и большим разбросом результатов.

Пиксельный метод принципиально отличается от статистических методов. Он является детерминированным и позволяет получать гарантированные оценки числа π снизу и сверху. При увеличении размера сетки эти оценки сближаются, что подтверждает корректность метода.

Гипотеза подтверждена

Выдвинутая в начале работы гипотеза подтверждена результатами вычислительных экспериментов. Метод Монте-Карло демонстрирует наилучшее соотношение точности и вычислительных затрат. Пиксельный метод позволяет получить строгие границы числа π, а метод Бюффона, несмотря на историческую и учебную ценность, оказывается наименее эффективным.

Заключение

Выполненное исследование показывает, что различные методы приближённого вычисления числа π имеют разные области применения. Статистические методы удобны для компьютерных экспериментов и иллюстрации идей теории вероятностей, тогда как пиксельный метод полезен для наглядного понимания дискретизации и получения гарантированных оценок.

Результаты работы могут быть использованы в учебных целях при изучении вероятностных методов, численных приближений и компьютерного моделирования.

Благодарности

Выражаю искреннюю благодарность моему научному руководителю — Сафроной Ларисе Николаевне — за ценные рекомендации, педагогические наставления и время, уделявшееся мне в процессе подготовки научного проекта. Особая признательность — преподавателю-исследователю Левину Максиму Александровичу — за помощь в программной реализации работы, выявлении ошибок и несостыковок, а также за участие в оформлении и редактировании текста, предоставлении научных рекомендаций. Благодарю также Горельникову Юлию Александровну, педагога-филолога, за то, что познакомила меня со структурой и сутью научной работы.

Список используемой литературы

1. Мордкович А. Г., Семёнов П. В., Александрова Л. А., Мардахаева Е. Л. *Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10 класс. Учебник: в 2 ч.* — М.: Просвещение, 2024.

2. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. *Геометрия. 10–11 класс. Учебник. Базовый и углублённый уровни.* — М.: Просвещение, 2025.

3. Бунимович Е. А., Булычёв В. А. *Математика. Вероятность и статистика. 10 класс. Базовый и углублённый уровни: учебное пособие.* — М.: Просвещение, 2025.

4. Перельман Я. И. *Занимательная геометрия.* — М.: АСТ, 2023.

5. Гарднер М. *Математические головоломки и развлечения.* — М.: Мир, 1999.

Рецензия на исследовательскую работу «Анализ методов приближённого вычисления числа π»

1. Общая характеристика работы

Представленная исследовательская работа посвящена актуальной и фундаментальной теме — сравнительному, а также статистическому анализу методов приближённого вычисления математической константы π. Выбор темы является обоснованным и соответствует как содержанию школьного курса математики, так и современным направлениям анализа, вычислительной математики и математической статистики.

Работа отличается удачным сочетанием теоретических рассуждений и вычислительных экспериментов. Автор не ограничивается формальным изложением методов, а стремится исследовать их свойства, точность и особенности сходимости, что придаёт работе исследовательский характер и повышает её учебную и практическую ценность.

2. Структура и логика изложения

Работа имеет чёткую и логичную структуру. Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель, задачи и гипотеза исследования. В основной части последовательно рассматриваются три метода приближённого вычисления числа π: метод Монте-Карло, метод Бюффона и пиксельный метод. Каждый метод сопровождается математическим объяснением, программной реализацией и анализом полученных результатов.

Завершающий раздел содержит обобщённые выводы, подтверждение гипотезы и итоговые замечания. Такая структура соответствует требованиям, предъявляемым к учебным научно-исследовательским работам, и обеспечивает целостное восприятие материала.

3. Научная и методическая ценность

Работа обладает заметной научной и методической ценностью для школьного уровня. Автор рассматривает методы разной природы — статистические и детерминированные — и сравнивает их в одинаковых вычислительных условиях, что позволяет сделать корректные и содержательные выводы.

Особого внимания заслуживает использование серий вычислительных экспериментов. Для статистических методов (Монте-Карло и Бюффона) автор проводит по 30 независимых экспериментов для каждого значения параметров, после чего анализирует средние значения и стандартные отклонения. Такой подход выходит за рамки типичных школьных работ и демонстрирует осознанное применение элементов математической статистики.

В работе наглядно исследуется характер сходимости методов. Построение графиков зависимости стандартного отклонения от числа испытаний позволяет визуально подтвердить теоретические представления о сходимости статистических методов и сравнить их эффективность. Пиксельный метод, в свою очередь, корректно представлен как детерминированный способ получения гарантированных оценок числа π.

4. Результаты и выводы

В ходе исследования убедительно показано, что метод Монте-Карло обладает наилучшим соотношением точности и вычислительных затрат среди рассмотренных статистических методов. Экспериментальные данные и графики подтверждают уменьшение разброса результатов при увеличении числа испытаний.

Метод Бюффона также позволяет приближённо вычислять число π, однако характеризуется значительно более медленной сходимостью и большим разбросом результатов, что снижает его практическую эффективность. Пиксельный метод даёт гарантированные оценки числа π снизу и сверху, которые закономерно сближаются при увеличении размера сетки, что делает данный метод особенно ценным с точки зрения наглядности и понимания процесса приближения.

Полученные выводы обоснованы результатами вычислительных экспериментов, корректно интерпретированы и полностью соответствуют поставленной цели исследования.

5. Оформление и стиль

Работа оформлена на высоком уровне. Математические формулы записаны корректно, программный код структурирован и снабжён пояснениями. Таблицы и графики логично встроены в текст и способствуют лучшему пониманию результатов. Используемая терминология точна и соответствует школьному и углублённому уровню изучения математики.

6. Итоговая оценка

В целом представленная работа является качественно выполненным исследовательским проектом, выполненным на высоком уровне для школьной конференции. Она демонстрирует осмысленное понимание математических идей, умение применять вычислительные методы и анализировать результаты экспериментов. Работа носит завершённый характер и заслуживает высокой оценки.

Научный руководитель Сафронова Лариса Николаевна

Директор ФЭЛ № 29 Загороднев Денис Валерьевич