

Областная научно-практическая конференция школьников

«Старт в науку»

**Математический и интерпретационный
анализ полифонической структуры фуги как
одной из основных музыкальных моделей
творчества И.С.Баха**

Секция «Математика»

Выполнил ученик 10 «В»

МБОУ СОШ с углубленным изучением

информатики №68 г. Пензы

Карамышев Алексей

Научный руководитель

Богомолова Ольга Петровна, учитель математики;

Гудкова Елена Владимировна, преподаватель высшей категории

по классу фортепиано ДМШ №7 г. Пензы

Научный консультант Ланкова Людмила Николаевна,

дирижер хора ГБОУ ДО ЦТРИМЭО «Радость» г. Москва

Почетный работник общего образования РФ

г. Пенза

2020 г.

Содержание

Введение (проблематика).....	2
1.Теоретическая часть.....	2
1.1.Цели и задачи работы.....	2
1.2.Предмет и объект исследования.....	2
1.3.Понятие полифонии в музыке.....	2
1.4 Основы математического и интерпретационного анализа музыкальных произведений.....	3
1.5. Компьютерные программы, позволяющие писать и визуализировать музыку	8
2.Практическая часть.....	8
2.1 Анализ произведений И.С.Баха с точки зрения математики.....	8
2.2 Правила написания фуги, ее структура	10
2.3. Анализ самостоятельно написанной фуги (автор Карамышев Алексей).....	11
3.Художественная часть	12
3.1. Связь цвета и музыки.....	12
3.2.Исторические примеры творчества художников, рисующих музыку.....	12
3.3. Самостоятельно написанные картины (автор Мусалова Линара), интерпретирующие произведения И.С.Баха и фуги Карамышева Алексея.....	13
Выводы.....	14
Литература.....	15
Приложение 1. Графическая интерпретация фуги №3, №4(автор Карамышев А.).....	16
Приложение 2. Анализ Хроматической фантазии и фуги ре минор И.С.Баха на нотах....	16
Приложение 3 Справочный материал.....	16

Введение

Существует такое понятие, как совершенство. Что это? Как его достичь? Сам человек не способен стать идеальным, но он может стать очень близким к этому. Но к абсолютному совершенству люди могут прикоснуться только через математику. Она существовала до человека, и она неизменна. Это константа, которой подчиняется все. На нее нельзя повлиять, изменить. Человек в области математики не может ничего изобрести. Он лишь совершает открытия. Но математика как абсолютная истина обособлена от человеческих погрешностей. Поэтому человек внес свое творчество, духовную составляющую, мысли о высшем, душу.

Так получилась музыка. В ней творческий максимум (достигнут в 18 веке) как высшая точка человеческих возможностей находится в унисоне с изначальным совершенством, то есть с математикой. В этой работе мы рассмотрим связь человеческого и совершенного на примере полифонии И. С. Баха, как самой математической и сложной музыкальной мысли.

1. Теоретическая часть

1.1. Цели и задачи работы

Цель работы: выявить в полифонической структуре фуги математические закономерности, в частности закон «золотого сечения».

Задачи работы:

1. Изучить строение фуги, правила ее написания с точки зрения музыки и математики.
2. Выявить математические закономерности («золотое сечение») в музыкальных произведениях И.С. Баха.
3. Создать свое новое музыкальное произведение в соответствии с изученными правилами. Проанализировать его, опираясь на закон «золотого сечения» - критерий его верного исполнения.
4. Выявить связи между цветом и музыкой, изучить примеры из истории живописи, подтверждающие эти связи, создать самостоятельно образцы художественного творчества, отражающие содержание музыкальных произведений, которые изучаются в данной работе, и вновь созданных.
5. Расширить знаний по предмету, выйти за пределы школьной программы, чтобы на этой основе сделать шаг на пути выдвижения, исследования и подтверждения гипотез.
6. Исследовать, как на практике применяются теоретические знания по данной теме.

1.2. Предмет и объект исследования

Объект исследования: математическая закономерность - «золотое сечение».

Предмет исследования: полифоническая структура фуги.

1.3. Понятие полифонии в музыке

Полифония- (от греч. poly - многий и phon - звук, голос; букв. - многоголосие) - вид многоголосия, основанный на одновременном звучании двух и более мелодичных линий или мелодичных голосов. "Полифонию, в высшем ее смысле, - указывал А. Н. Серов, - надобно понимать гармоническим слиянием воедино несколько самостоятельных мелодий, идущих в нескольких голосах одновременно, вместе. В рассудочной речи немислимо, чтобы, например, несколько лиц говорили вместе, каждый свое, и чтоб из этого не выходила путаница, непонятная чепуха, а, напротив, превосходное общее впечатление. В музыке такое чудо возможно; оно составляет одну из эстетических специальностей нашего искусства". Понятие "П." совпадает с широким значением

термина контрапункт. Н. Я. Мясковский относил к области контрапунктического мастерства сочетание мелодически самостоятельных голосов и соединение в одновременности нескольких тематических элементов.

Полифония - одно из важнейших средств музыкальной композиции и художественной выразительности. Многочисленные приёмы полифонии служат разностороннему раскрытию содержания музыкальных произведений, воплощению и развитию художественных образов; средствами П. можно видоизменять, сопоставлять и объединять музыкальные темы. П. опирается на закономерности мелодики, ритма, лада, гармонии. На выразительность приёмов П. влияют также инструментовка, динамика и прочие компоненты музыки. В зависимости от определенного музыкального контекста может изменяться художественный смысл тех или иных средств полифонического изложения. Существуют различные музыкальные формы и жанры, применяемые для создания произведений полифонического склада: fuga, фугетта, инвенция, канон, полифонические вариации, в 14-16 вв. - мотет, мадригал и другие.

Полифонические эпизоды (например, фугато) встречаются и в рамках иных форм. Голоса полифонического построения редко кадансируют одновременно, обычно их кадансы не совпадают, что и вызывает ощущение непрерывности движения как особого выразит. качества, присущего П. В то время как одни голоса начинают изложение новой или повторение (имитацию) прежней мелодии (темы), другие ещё не окончили предыдущей:



предыдущей:

Палестрина. Ричеркар в I тоне. В такие моменты образуются узлы сложных структурных сплетений, совмещающие в одновременности разные функции музыкальной формы. Вслед за тем наступает определенное разрежение напряжённости, движение упрощается вплоть до следующего узла сложных сплетений и т.д. В подобных драматургических условиях протекает развитие полифонического

произведения, особенно если они разрешают большие художественные задачи, отличаются глубиной содержания.

Виды П. разнообразны и с трудом поддаются классификации в силу большой текучести, свойственной этому роду музыкального искусства. В музыке Баха П. достигла высшей точки своего развития. В музыке рубежа 20–21 вв. П. остаётся одной из важнейших форм музыкального мышления. Как учебный предмет П. входит в систему музыкально-теоретического образования. [Музыкальная энциклопедия], [Фраёнов В. П. ПОЛИФОНИЯ // Большая российская энциклопедия. Электронная версия (2016); <https://bigenc.ru/music/text/3154742>]

1.4 Основы математического и интерпретационного анализа музыкальных произведений [1]

В начале нашего столетия на одном из заседаний Московского научно-музыкального кружка, членами которого вместе с композиторами и пианистами Танеевым, Рахманиновым, Глиэром, Гольденвейзером были и крупные московские ученые, Розенов

выступил с докладом "Закон золотого сечения в поэзии и музыке". Эту работу можно считать одним из первых математических исследований музыкальных произведений. Остановимся на ней подробнее.

Очевидно, что при делении целого на две неравные части возможно бесконечное множество отношений между целым и одной из его частей, а также между самими частями целого. Но только в единственном случае эти отношения могут быть равными. Этот случай представляет собой золотое сечение, когда целое относится к большей части, как большая часть к меньшей.

Обозначая целое через a , большую часть x и, следовательно, меньшую $a - x$, имеем $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = a \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. (12.1)

Поскольку x есть часть целого, т. е. величина положительная, а второй корень (12.1) отрицателен, то приходим к единственному значению

корня: $x = a\varphi$, $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$. (12.2) где величина φ является коэффициентом золотого

сечения. Тогда $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi \approx 1,618$, (12.3), причем $\Phi = 1/\varphi$. Для меньшей части имеем $a - x = a(1 - \varphi) = a\varphi^2$, причем $a\varphi + \varphi^2 = a$.

Разделив теперь величину $a\varphi$ в золотой пропорции, получим $\frac{a\varphi}{y} = \frac{y}{a\varphi - y} \Rightarrow y^2 + a\varphi y - a^2\varphi^2 = 0 \Rightarrow y = a\varphi^2$, $a\varphi - y = a\varphi^3$, причем $a\varphi^2 +$

$a\varphi^3 = a\varphi$. Легко видеть, что большая часть второй золотой пропорции $y = a\varphi^2$ совпадает с меньшей частью первой $a - x = a\varphi^2$. Итак, при последовательном делении целого a в золотой пропорции имеет место геометрическая прогрессия (ряд золотого сечения) со

$\div a, a\varphi, a\varphi^2, a\varphi^3, \dots$ знаменателем φ , каждый член которой равен сумме двух последующих членов прогрессии:

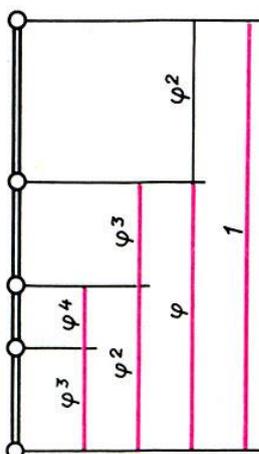
$$a = a\varphi + a\varphi^2,$$

$$a\varphi = a\varphi^2 + a\varphi^3,$$

$$\dots$$

$$a\varphi^n = a\varphi^{n+1} + a\varphi^{n+2}.$$

Огромная роль золотого сечения в пространственных искусствах (скульптуре, архитектуре, живописи) известна с античных времен и имеет немало объяснений. Что касается искусств, развивающихся во времени (поэзия, музыка), то здесь неизвестны аналогичные природные предпосылки закона золотого сечения. Но тем более удивительным оказывается действие этого закона в поэзии и музыке, которое, по-видимому, первым обнаружил Розенов.



$$1, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^n, \varphi^{n+1}, \varphi^{n+2}, \dots$$

$$\frac{\varphi^n}{\varphi^{n+1}} = \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^{n+2}},$$

$$\varphi^n = \varphi^{n+1} + \varphi^{n+2}$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618.$$

$$\Phi = \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618.$$

Последовательное деление единичного отрезка в золотом сечении
Ряд золотого сечения

Розенов проанализировал "популярнейшие и наиболее излюбленные произведения гениальных авторов Баха, Моцарта, Бетховена, Шопена, Вагнера, Глинки, а также произведения народного творчества наиболее древнего происхождения, живучесть которых является достаточным доказательством их эстетической ценности и широкой популярности".

Остановимся на анализе Хроматической фантазии и фуги И. С. Баха, которые объединены общей тональностью *ре минор* и контрастны по жанру и образу. Хроматическая фантазия с фугой *ре минор* - одно из величайших творений Баха, образец совершенства формы и содержания, "могущественнейшее клавесинное произведение" (А. Н. Серов). Анализ Хроматической фантазии и фуги *ре минор* И.С.Баха на нотах представлен в Приложении 2.



Главные золотые сечения Хроматической фантазии И. С. Баха. Цифры обозначают число четвертей теоретического ряда золотого сечения ($a = 316$). Слева дано описание соответствующих характерных мест нотного текста фантазии.

1) Хроматическая фантазия написана в размере 4/4, имеет 79 тактов, т. е. $79 \cdot 4 = 316$ четвертных долей. Итак, "целое" $a = 316$. Фантазия состоит из двух ясно различимых по характеру частей, отделенных друг от друга паузой. Первая часть, прелюдия, заканчивается на арпеджированном доминантовом трезвучии с разрешением на 2-й четверти 49-го такта, на которой стоит знак ферматы (удлинение звука), и затем идет пауза. Таким образом, первая часть фактически заканчивается на 3-й четверти 49-го такта, т. е. на 195-й ($48 \cdot 4 + 3$) четверти ($a_1 = 195$).

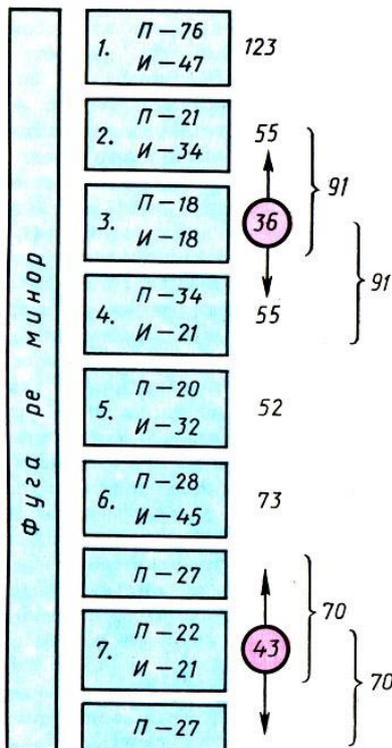
Розенов писал: «Вторая часть состоит из ряда в высшей степени выразительных колорированных речитативов, то развивающихся по силе, энергии и размаху до гигантской мощи, то нежных и жалобных, то сердитых и запальчивых, то впадающих в необычную для той эпохи романтическую мечтательность». На вторую часть приходится 121 четверть ($a_2 = a - a_1 = 316 - 195 = 121$). Вычисляя "теоретическую" длину первой части с помощью коэффициента золотого сечения, мы с поражающей точностью находим $a_1 = a \cdot \phi = 0,316 \cdot 0,618 = 195,3!$ Итак, Хроматическая фантазия разделена на первую и вторую части в золотой

пропорции: $\frac{316}{195} = \frac{195}{121}$, $195 + 121 = 316$. Но на этом чудеса гениального творения Баха только начинаются. Построив ряд золотого сечения (12.4) при $a = 316$, имеем **316; 195,3; 120,7; 74,6; 46,1; 28,5; 17,6**. Каково же должно быть наше удивление, когда мы обнаружим, что на 124-й четверти находится кульминация первой

части и стоит знак ферматы, а на 77-й четверти от начала второй части имеет место кульминация второй части! Таким образом, кульминация обеих частей с небольшой погрешностью, легко объяснимой растяжимостью темпов, делит эти части по закону золотого сечения. Далее, каждый из полученных четырех разделов Хроматической фантазии имеет характерные особенности, которые также с потрясающей точностью приходится на точки золотого деления этих разделов! Наконец, Розенов нашел и более мелкие деления Хроматической фантазии в золотой пропорции, на которых мы не будем останавливаться.

Итак, Хроматическая фантазия, произведение свободного по форме жанра, буквально соткано из золотых пропорций! Пожалуй, эстетическое впечатление от математического анализа Хроматической фантазии имеет не меньшую силу, чем прослушивание бессмертного творения Баха. А взятые вместе - чувственное впечатление и рациональный анализ, безусловно, позволяют еще на один шаг приблизиться к сокровенным тайникам гения.

2) Перейдем к анализу фуги. *Фуга* (от лат. fuga - бег) является наиболее совершенной формой многоголосной музыки (полифонии). Фуга строится на многократных *проведениях* (повторениях) основной музыкальной темы в разных голосах. Проведения основной темы обычно перемежаются в фуге с промежуточными вставками, называемыми *интермедиями*. Таким образом, фуга в отличие от фантазии имеет четко определенный закон построения. Но тем не менее точность "математического" построения фуги *ре минор* просто поражает! Фуга *ре минор* состоит из семи пар проведений и интермедий и двух самостоятельных проведений. Из семи пар "проведение-интермедия" пять пар строго подчиняются закону золотого сечения.



Те же две пары "проведение-интермедия", для которых закон золотого деления не выполнен, являются своеобразными центрами симметрии относительно обрамляющих их разделов фуги и с каждым из них находятся в золотой пропорции! Именно для того, чтобы выделить эти два центра симметрии, Бах специально допускает в их строении отклонения от золотого деления и делает эти две пары "проведение-интермедия" симметричными. На рисунке приведена схема строения фуги *ре минор*. Здесь же указано число четвертей в каждом разделе фуги (целые числа) и даны теоретические значения членов золотой пропорции (дробные числа). Как видим, все пять пар "проведение-интермедия" с изумительной точностью разделены в золотой пропорции (абсолютные ошибки колеблются в диапазоне от 0,05 до 0,15 четверти, относительные ошибки - от 0,02% до 0,7%).

Строение фуги ре минор И. С. Баха. Целые числа указывают число четвертей в фуге, дробные - теоретические значения золотых сечений. Золотые пропорции в более крупных частях фуги отмечены фигурными скобками, центры симметрии - кружками. П - проведение, И - интермедия

$$\begin{array}{l}
123 \cdot \varphi = 76,01 \quad \frac{123}{76} = \frac{76}{47} \quad 76 + 47 = 123 \\
123 \cdot \varphi^2 = 46,97 \\
55 \cdot \varphi = 33,99 \quad \frac{55}{34} = \frac{34}{21} \quad 34 + 21 = 55 \\
55 \cdot \varphi^2 = 21,00 \\
91 \cdot \varphi = 56,23 \quad \frac{91}{55} = \frac{55}{36} \quad 55 + 36 = 91 \\
91 \cdot \varphi^2 = 34,75
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
52 \cdot \varphi = 32,13 \quad \frac{52}{32} = \frac{32}{20} \quad 32 + 20 = 52 \\
52 \cdot \varphi^2 = 19,85 \\
73 \cdot \varphi = 45,11 \quad \frac{73}{45} = \frac{45}{28} \quad 45 + 28 = 73 \\
73 \cdot \varphi^2 = 27,87 \\
70 \cdot \varphi = 43,26 \quad \frac{70}{43} = \frac{43}{27} \quad 43 + 27 = 70 \\
70 \cdot \varphi^2 = 26,73
\end{array}$$

Таким относительным погрешностям могут позавидовать многие из современных инженерных расчетов! В более крупных разделах абсолютные ошибки, естественно, возрастают. Но и при делении самого большого раздела (91 четверть) эти ошибки не превышают 1,25 четверти. Не следует, однако, забывать, что мы имеем дело с художественным произведением. Отметим, что в фуге ре минор существуют также и более мелкие, и более крупные соотношения золотого сечения, на которых мы просто не

останавливаемся. Итак, простой математический анализ, не выходящий за рамки арифметики, позволяет совершенно иными глазами взглянуть на музыкальное произведение, увидеть его скрытую внутреннюю красоту, которую мы только ощущаем, слушая произведение, и которую мы "видим", проводя его математический анализ. Вот как сказал об этом Розенов: "При взгляде на схемы Хроматической фантазии и фуги... невольно приходишь в священный трепет перед гениальностью мастера, воплотившего силой художественной чуткости до такой степени точности законы природного творчества".

Но помимо установления самого факта наличия закона золотого сечения в музыкальных произведениях и его огромного эстетического значения в музыке математический анализ музыки (даже такой элементарный) позволяет сделать некоторые выводы о характерных особенностях творчества самих композиторов. Так, сравнивая проявление закона золотого сечения у Баха и Бетховена, Розенов пишет: "Мы находим у Баха сравнительно более детальную и органическую сплоченность. Закон золотого деления проявляется у него с поразительной точностью в соотношениях крупных и мелких частей как в строгих, так и в свободных формах, что, несомненно, соответствует с характером этого гениального мастера-труженика, сильным, здоровым и уравновешенным, с его глубоко сосредоточенным отношением к работе и детально отделанной манерой письма».

Термин интерпретация имеет много значений. Мы выбрали для себя наиболее значимые с точки зрения раскрытия темы работы.

1) Интерпретация-метод научного познания, направленный на понимание внутреннего содержания через внешнее проявления (звук, ощущение). Википедия.

2) Интерпретация (лат. *interpretatio* — истолкование) — художественное раскрытие музыкального произведения в процессе исполнения, зависящее от его замысла и индивидуальных особенностей, эстетических принципов школы или направления, к которым относится исполнитель. (Словарь музыкальных терминов.)

В.Б.Носина в книге «Символика музыки И.С.Баха»[4] раскрывает глубинные философские, эстетические смыслы творчества этого великого композитора.

3)Интерпретация (лат. interpretatio)-истолкование, объяснение, перевод на более понятный язык; построение моделей для абстрактных систем. (Политическая наука: Словарь-справочник.)

1.5.Компьютерные программы, позволяющие писать и визуализировать музыку. Sibelius –профессиональное приложение для прописывания музыкальных партитур, их воспроизведения, сохранения в графическом формате, записи на CD или публикации на популярных ресурсах. Этот нотный редактор имеет в своем арсенале более 1500 готовых инструментальных партий, синхронизацию с виртуальными секвенсорами и синтезаторами, эмулятор гитарного грифа и фортепианной клавиатуры, а также функции для подключения MIDI-гитары, микрофона, электронных инструментов (<https://tvoiprogrammy.ru/sibelius>). Все фуги №1-4 написаны в данной программе.

2.Практическая часть.

2.1 Анализ произведений И.С.Баха с точки зрения математики.

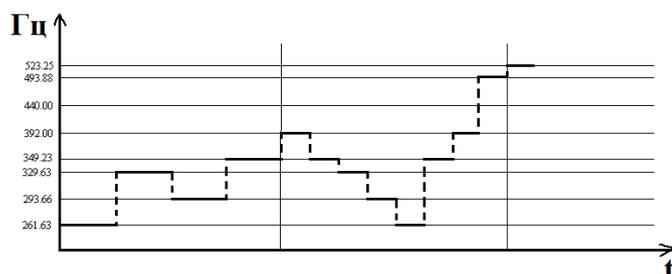
Краткий экскурс по нотной символике для понимания некоторых закономерностей и математических процессов. Что из себя представляют ноты?

Нота (лат. nōta — «знак», «метка») в музыке — это графическое обозначение звука музыкального произведения, один из основных символов современной музыкальной нотации.

Звук музыкальный (др.-греч. φῶνός, лат. vox, sonus, нем. Ton, англ. musical tone, musical pitch) в специальном значении — звук определённой высоты, использующийся как материал для создания музыкальных сочинений. В БРЭ (2013 г.) музыка определяется как «искусство звуков, организованных главным образом по высоте и во времени». Мы можем представить музыкальное произведение в виде графика зависимости частоты звука от времени. Для анализа и интерпретации музыкальных произведений воспользуемся таблицей соответствия частот и нот.

Ноты	Суббконтр-октава	Контр-октава	Большая	Малая	Первая	Вторая	Третья	Четвертая	Пятая
ДО	16,35	32,70	65,41	130,82	261,63	523,26	1046,52	2093,04	4186,08
ДО диез	17,32	34,65	69,30	138,59	277,18	554,36	1108,72	2217,44	4434,88
РЕ	18,35	36,71	73,42	146,83	293,66	587,32	1174,64	2349,28	4698,56
РЕ диез	19,45	38,89	77,78	155,57	311,13	622,26	1244,52	2489,04	4978,08
МИ	20,60	41,20	82,41	164,82	329,63	659,26	1318,52	2637,04	5274,08
ФА	21,83	43,65	87,31	174,62	349,23	698,46	1396,92	2793,84	5587,68
ФА диез	23,12	46,25	92,50	185,00	369,99	739,98	1479,96	2959,92	5919,84
СОЛЬ	24,50	49,00	98,00	196,00	392,00	784,00	1568,00	3136,00	6272,00
СОЛЬ диез	25,96	51,91	103,83	207,65	415,30	830,60	1661,20	3322,40	6644,80
ЛЯ	27,50	55,00	110,00	220,00	440,00	880,00	1760,00	3520,00	7040,00
ЛЯ диез	29,14	58,27	116,54	233,08	466,16	932,32	1864,64	3729,28	7458,56
СИ	30,87	61,74	123,47	246,94	493,88	987,76	1975,52	3951,04	7902,08

Рассмотрим какой-нибудь отрывок и ему абсолютно идентичный, привычный математический график.



Как можно видеть, штили (палочки) и закрашенность/незакрашенность нот определяют их длину в такте (а так же наличие других знаков, в которые мы не будем углубляться).

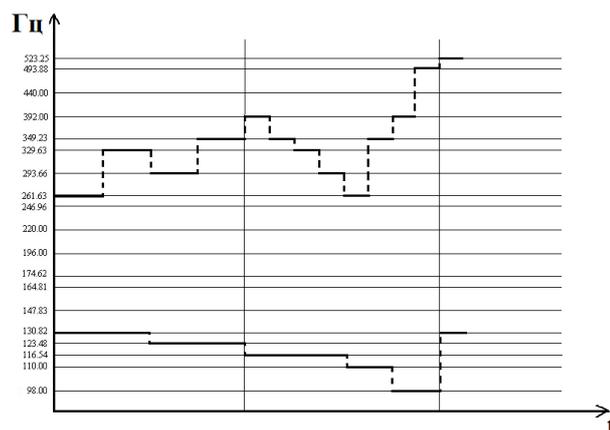


Такт (вертикальные линии на оси (t) и соответственно, на нотах) – это единичный отрезок оси (t). «Размер» определяет количество долей, то есть одинаковых дробных частей в нем. (в нашем случае указано 4/4 (4*1/4)) (но это не так важно).

Можно сказать, что на каждую первую долю такта делается ударение и музыка становится ритмичной. Быстроту исполнения и кол-во секунд, приходящихся на такт, устанавливают словесно. Таким образом, музыканты только и занимаются тем, что читают графики и являются своеобразными конвертерами из написанного в услышанное.

Бах говорил: „Играть на любом музыкальном инструменте очень легко: все, что для этого требуется, — нажимать в нужное время на нужную клавишу. А играть он будет сам“. Однако, сложность также заключается в том, что для пианистов чтение происходит сразу с 2ух графиков, как мы может заметить, на нотном стане имеется 2 строки, верхнюю мы определили. На нижней происходит тоже самое, но с абсолютно другой последовательностью частот, ритмов И ТОЧКОЙ ОТСЧЕТА. Ключи и определяют точку отсчета.

Скрипичный ключ (верхняя строчка в нотах) соответствует тому, что на 2-ой линейке располагается нота Соль, частота которой 392 Гц (можно посмотреть по графику). В нижней строчке басовый ключ означает, что на 2ой линейке теперь располагается нота Си, частота которой 123.48 Гц. Если мы перенесем в точности ноты с верхней на нижнюю строчку, то произойдет атоналивание, то есть потеря гармонической логики из-за устройства тональностей и гамм. (Будет звучать фальшиво).



Пример правильной гармонизации и сочетания «графиков»:

Полифония. Такие отдельные «ломаные линии» в музыке являются линиями голосов. Голос – это самостоятельная мелодия, но

гармонизированная с другими голосами. Каждый момент сочетания голосов должен анализироваться и быть подобран по правилам гармонии и собственного ощущения. Очень нелегко гармонизировать уже 2 линии между собой, ведь это – чистая математика.

Бах же писал каноны и фуги и в 6 голосов у одного инструмента (включая двухголосную Инвенцию №1 C-dur Баха для наглядности (сначала, где поют, потом где играют), потом можно включить 6-тиголосную и противопоставить первой, как очень сложную для понимания). Разумеется, не в каждом произведении можно выделить конкретные голоса, но в конце 17 - начале 18 веков многоголосие (полифония) являлось нормой. Такая сложная музыка была привычна, и люди находились на пике своего развития, а в современном мире преобладает гомофонная музыка, как простая и удовлетворяющая обычные потребности массы. Сейчас вместо большого количества голосов, являющиеся выражением высшей математики (у Баха) существует только фон и простая мелодия, не выходящая за рамки одной тональности. Посмотрите, как изменилась музыка (а именно, количество голосов и их поведение, гармония) с 18 века, на примере случайных 2-ух тактов 4-ехголосной фуги Баха и песни Макса Коржа.

Фрагмент 4-ехголосной фуги Баха



График 1. Фрагмент 4-ехголосной фуги Баха

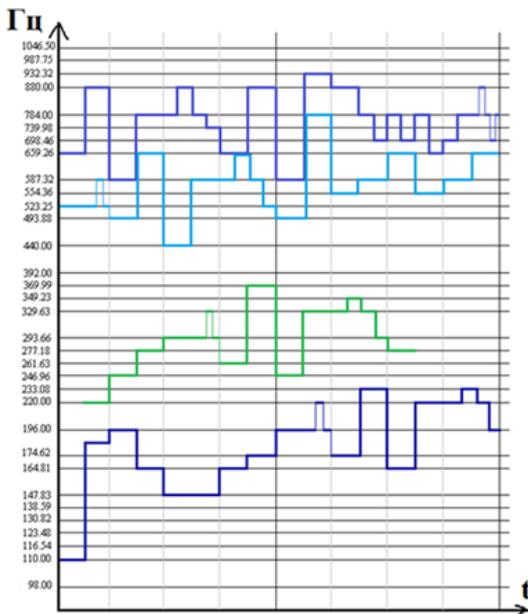
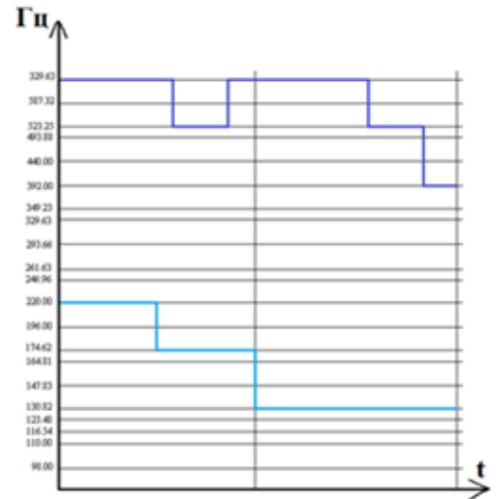


График 2. Фрагмент песни Макса Коржа



Фрагмент песни Макса Коржа



2.2 Правила написания фуги, ее структура

В процессе изучения научной литературы по направлению как написать фугу [2], [3] мы выделили основные элементы строения фуги и правило как проверить-верно она написана или нет. Полифоническая структура фуги:

- 1.Проведения голосов.
- 2.Интермедия.

3.Разработка (проведения тем в разных тональностях).

4.Реприза.

5.Стретта (Канон).

Чтобы рассчитать кульминацию в фуге, необходимо посчитать общее количество тактов во всем произведении и умножить его на 0,618. Таким образом, мы получим момент, наиболее подходящий для кульминации. Так делают при планировании написания фуги.

А если фуга пишется интуитивно или проводится анализ готовой, то чтобы проверить- верно она написана или нет, необходимо посчитать отношение количества тактов до кульминации к количеству тактов после кульминации или найти отношение количества тактов до кульминации к количеству тактов во всем произведении. Это отношение должно быть равно 0,618. Получаем «золотое сечение»: меньшая часть относится к большей части как большая к целому.

2.3. Анализ самостоятельно написанной фуги (автор Карамышев Алексей)

При написании правильной фуги №4 мы прошли несколько этапов. Фуги №1,2 назвать верными нельзя, так как в них присутствуют следующие недостатки и недоработки:

В №1: Отсутствие всякой фугированной формы (структуры), неправильное ведение голосов, несоответствие с правилами. Больше похоже на прелюдию, но не на фугу.

В №2: появились зачатки формы, но неверное ведение голосов осталось, ошибки в гармонии. При проверке отношения «золотого сечения» у нас не совпадали коэффициенты с 0,618, получались следующие отношения $13.5/24 \approx 0.56$ (отношение количества тактов до кульминации к количеству тактов во всем произведении).

Фуга 1

Musical score for Fuga 1, measures 1-18. The score is written in 3/4 time and consists of two staves (treble and bass clef). The music is in a single voice, with the right hand playing the melody and the left hand providing a simple accompaniment. The key signature has one flat (B-flat). The score ends with a double bar line and repeat dots at measure 18.

Фуга 2

Musical score for Fuga 2, measures 1-21. The score is written in 3/4 time and consists of two staves (treble and bass clef). The music is in a single voice, with the right hand playing the melody and the left hand providing a simple accompaniment. The key signature has one flat (B-flat). The score ends with a double bar line and repeat dots at measure 21. A timestamp '2019/12/20 09:14' is visible in the bottom right corner of the image.

Поэтому после консультаций нам пришлось изменить следующие элементы: Изменить финал, сделать из свободного завершения строгий канон.

Так появилась fuga №3, но и в ней необходимо было учесть замечания по поводу последних гармонических нюансов. После внесения исправлений «все встало на свои места» и в фуге №4 уже все необходимые отношения соответствуют закону «золотого сечения».

На графиках в Приложении 1. Графическая интерпретация фуги №3, fuga №4 заметна существенная разница в 19 такте: четко видна точка пересечения линий голосов, так как мы перенесли 2ой голос в доминантовую тональность. И в фуге №4 коэффициенты следующие: всего 22 такта, кульминация в 14 такте, составляем отношение $13,5/22=0,61$ -верно.

Фуга 2. Замечания специалистов: тема в нижнем голосе – на октаву выше, в конце – канон и 3-ий такт сделать без кульминаций. Фуга 3. Замечание: в 19 такте тема должна быть от соль, в соль мажоре

Фуга 3

Фуга 4

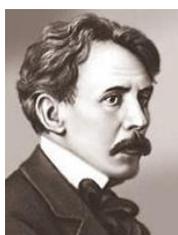
3.Художественная часть. 3.1. Связь цвета и музыки.

Музыка и живопись, схватывая жизнь во всём её многообразии, гармонии (созвучии, согласии) и противоречиях, обнаруживают общность языка художественных произведений, которую можно выразить следующим образом. Линия - форма - цвет в картине (в живописи) воспринимаются как единство мелодии - формы - лада в музыке.

Это помогает понять способ воплощения замысла художника, который стремился своими картинами вызвать у зрителей ощущение звучащей музыки.

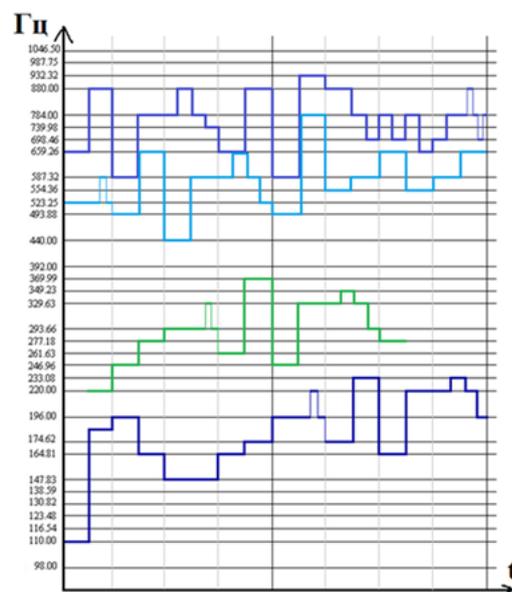
3.2.Исторические примеры творчества художников, рисующих музыку

<https://www.sites.google.com/site/muzyka6klass/urok-no26---27> Микалоюс Константинос



Чюрлёнис (1875-1911)-литовский художник и композитор. Живописное полотно Чюрлёниса "Фуга" - одна из тех работ, которая позволяет говорить о его искусстве, как о наивысшем воплощении идеи синтеза искусства - одной из основных идей символизма, т.е. с помощью различных символов мы сможем раскрыть истину, познать глубину произведения как художественного так и музыкального. Почему же Чюрлёнис назвал своё

живописное полотно музыкальным термином (понятием) - "Фуга"? Об этом говорят линейно выстроенные ряды образов картины.

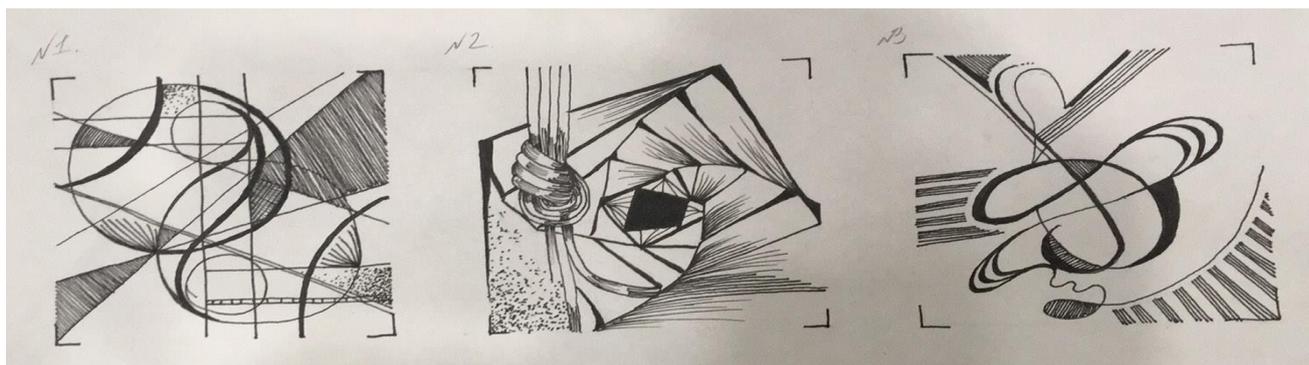


Чередование одинаковых или подобных друг другу элементов, расположенных на нескольких уровнях, напоминает мелодическое движение. Ритм, гармония из музыкальных определений, так же как и линия, колорит из определений зрительных, дают точные представления о явлении, запечатлённом на полотне.

Пространство живописной "Фуги" можно трактовать как ряд уровней, которые подобны записи партитуры музыкального сочинения - от верхней горизонтали до самого нижнего "голоса". И в то же время - как изображение прозрачных вод озера, поверхность которого отделена от "неба" верхней горизонталью, а всё что ниже, - это видимое сквозь воду, на дне, и частично (самый низ), может быть на берегу.

Советский композитор Д.Шостакович подчёркивал: "Полифония может передавать всё: и размах мысли, и размах мечты, творчества". Пространство картины как отзвук зримого мира. Её линии, колорит, ритм напоминают партитуру музыкального произведения. Живописная фуга по композиции аналогична музыкальной фуге, в которой краткая музыкальная мысль (тема-мелодия) имитируется (повторяется с небольшим изменением) в верхних и нижних голосах, так что при одновременном звучании в разных регистрах (низком, среднем или высоком звучании) повторы тем, переплетаясь, сходятся и расходятся вновь. Это хорошо видно в нотной записи фуги И.-С.Баха.

3.3. Самостоятельно написанные картины (автор Мусалова Линара), интерпретирующие произведения И.С.Баха (рис.1, рис.2) и фугу №4 Карамышева Алексея (рис.3)





«Этими тремя квадратами мы иллюстрируем музыкальные произведения. Очень сложно уместить прекрасные произведения И.С.Баха в маленький квадрат. Поэтому я попыталась с помощью абстрактных иллюстраций в стиле динамики передать форму и композицию произведений».

Рис.1 И.С.Бах. Прелюдия и фуга ре-минор. Хорошо темперированный клавир (ХТК), 2 том. Фуга ре-минор принадлежит к числу одно-тональных фуг. Строение фуги опирается на взаимодействие двух приблизительно равносильных по-своему значению структурных принципов: неравно-длительная двух-частность (9 тактов и 18 тактов). Эти значения можно

увидеть, если присмотреться к картине и ее окружностям. Также очень хорошо отражено деление на 2 равно-длительные масштабные фазы, обусловленное закономерностями двухчастно-вариационной формы. А линии и графические заполнения показывают этическое содержание, красочность и вариативность этого произведения, воплощенное в форме безупречного совершенства, позволившего занять положение величайшего явления мирового искусства.

Рис.2 И.С.Бах. Хроматическая фантазия и фуга ре-минор.

«Хроматическая фантазия и фуга» - произведение, рассчитанное на большую аудиторию и пространство. Очень динамично по звучанию. Здесь, интенсивность развития, осуществляемого в виде разрастающихся линий и постепенным повышением кульминации, позволяет говорить о предвосхищенной Бахом принципов симфонической драматургии. Эти нарастающие линии отчетливо заметны в квадрате №2. Здесь синтезированы различные фактуры, как и в произведении: гаммообразные пассажи, ломаные аккорды, гармонические фигурации. Все это создает рельеф крупного композиционного тела, выявляют его опорные узлы, который тоже изображен. Слушая это произведение, мы будто идем по длинной спиральной лестнице.



Выводы

1. В процессе работы мы изучили строение фуги, правила ее написания с точки зрения музыки и математики.
2. Смогли выявить математические закономерности («золотое сечение») в музыкальных произведениях И.С.Баха.
3. Создали свое новое музыкальное произведение в соответствии с изученными правилами. Проанализировали его, опираясь на закон «золотого сечения»- критерий его верного исполнения.
4. Выявили связи между цветом и музыкой, изучили примеры из истории живописи, подтверждающие эти связи, создать самостоятельно образцы художественного творчества, отражающие содержание музыкальных произведений, которые изучаются в данной работе, и вновь созданных.
5. В данной работе мы расширили круг знаний по предметам математика и музыка, вышли за пределы школьной программы, подтвердили гипотезу взаимосвязи музыки и

математики, музыки и живописи (самостоятельно создали рисунки, в которых воплощена идея полифонического строения музыкальных произведений И.С.Баха).

6. Смогли на практике применить теоретические знания как написать фугу, самостоятельно написали фугу по соответствующим правилам, оценили -верно ли она написана, опираясь на закон «золотого сечения».

Литература

1. Волошинов А.В. Математика и искусство. М.: Просвещение,1992
<http://mathemlib.ru/books/item/f00/s00/z0000011/>Гл.12.Математический анализ музыки.<http://mathemlib.ru/books/item/f00/s00/z0000011/st015.shtml>
2. Бонфельд М.Ш. Анализ фуги. Пособие по полифонии для студентов ОЗО музыкально-педагогического факультета. Изд-во «Русь», Вологда, 1995.
3. Дубовской И.И., Евсеев С.В., Способин И.В., Соколов В.В. Учебник гармонии (для консерваторий). Издательство «Музыка», Москва, набережная Мориса Тореза,30,1965 <http://en.bookfi.net/book/1516540>; <https://sheba.spb.ru/za/uchebnik-garmonii-1965.pdf>
4. Носина В.Б. Символика музыки И.С.Баха. Международные курсы высшего художественного мастерства пианистов памяти С.В. Рахманинова. Тамбов, 1993
<http://en.bookfi.net/book/699736;file:///C:/Users/%D0%9E%D0%BB%D1%8C%D0%B3%D0%B0/Downloads/2059.pdf>
- 5.Розенов Э.К. Закон золотого сечения в поэзии и музыке.1903.https://ozlib.com/819269/literatura/emiliy_karlovich_rozenov_zakon_zoloto_secheniya_poezii_muzyke
6. Петров Ю.П. Тайнопись музыки барокко. М: Музыка, 2019
<https://www.musica.ru/blogs/news>

Приложение 1

Графическая интерпретация фуги №3, №4 (автор Карамышев А.)

(Отдельный лист)

Приложение 2

Анализ Хроматической фантазии и фуги ре минор И.С.Баха на нотах

(Отдельный лист)

Приложение 3

Справочный материал <https://surikovschool.com/article/id/9>

Музыка – это искусство, средством воплощения художественных образов для которого являются звук и тишина, особым образом организованные во времени. Музыка – это звук, созданный только при непосредственном участии живых существ.

Теория музыки

Теоретические аспекты музыки изучает музыковедение.

Теория музыки даёт ответы на вопросы о том, каким правилам подчиняется музыка, что лежит в её основе и чему надо научиться, чтобы не только грамотно исполнять музыку, но и понимать её. При анализе музыки выделяются следующие основные категории - мелодия, гармония, контрапункт (полифония), форма.

Прикладная теория, основываясь на материале исследований, ставит своей целью создание и совершенствование методов обучения музыке, позволяющих овладевать исполнительской практикой, тренировать восприятие музыки. Базовыми навыками являются сольфеджио — чтение музыки с листа, запись нот на слух, анализ на слух и пр., чтение различных видов партитур, оркестровка, искусство импровизации, азы композиции.

Музыкальный звук

Музыка строится из музыкальных звуков. Они обладают определённой высотой (высота основного тона обычно от «до» субконтроктавы до «до» - «ре» пятой октавы (от 16 до 4000 — 4500 Гц). Тембр музыкального звука определяется присутствием обертонов и зависит от источника звука. Громкость музыкального звука не превышает порога болевого ощущения. Музыкальный звук обладает определённой длительностью. Физическая особенность музыкального звука состоит в том, что звуковое давление в нём является периодической функцией времени.

Музыкальные звуки организуются в музыкальную систему. Базисом для построения музыки является звукоряд. Динамические оттенки подчинены шкале громкостей, не имеющей абсолютных значений. В наиболее употребительной шкале длительностей соседние звуки находятся в отношении 1:2 (восьмые так относятся к четвертям, как четверти к половинам, и т. п.).

Обозначение музыкальных звуков

Многие музыкальные культуры выработали свои системы фиксации музыки с помощью письменных знаков. Преобладание семиступенчатых диатонических ладов в европейской музыке стало причиной того, что в процессе эволюции было выделено семь нот, названия которых происходят из латиноязычного гимна св. Иоанна – до, ре, ми, фа, соль, ля, си. Эти ноты образуют семиступенчатый диатонический звукоряд, звуки

которого могут быть расположены по квинтам, а интервалы между соседними ступенями составляют большую или малую секунду. Названия нот распространяются на все октавы звукоряда.

Остальные 5 звуков 12-ступенчатого ряда могут быть получены продолжением квинтового круга или построением аналогичного 7-ступенчатого звукоряда от другой ноты. Для обозначения этих звуков принято использовать знаки альтерации – диез и бемоль, изменяющие высоту ноты на маленький музыкальный интервал — один полутон.

Но́та (лат. *nōta* — «знак», «метка») в музыке — это графическое обозначение звука музыкального произведения, один из основных символов современной музыкальной нотации. Нота (музыка) — Википедия)

Изобретатель нот Гвидо Аретинский <https://propiano.ru/gvido-darecco>

В Ареццо Гвидо руководил детским хором кафедральной школы. Его педагогический талант и свобода научной деятельности под покровительством епископа способствовали тому, что Гвидо Аретинский совершил реформу нотной записи и основал сольмизацию – прообраз современного сольфеджио.

Для того, чтобы ученики Гвидо в кафедральной школе и певцы монастырской капеллы легче и точнее исполняли мелодию, музыкант ввёл шестиступенный звукоряд с определённым соотношением интервалов – гексахорд. В трактате Гвидо «Микролог» 1025 г. раскрывалась суть теории монаха. В работе, в частности, упоминались полные названия нот Гвидо Ареццо.

Это были Ut, Re, Mi, Fa, Sol, La по начальным буквам каждой строчки молитвы-акростиха к Иоанну Крестителю, которого монах-бенедиктинец очень ценил:

Do – Dominus – Господь

Re – rerum – Материя

Mi – miraculum – Чудо

Fa – familias planetarium – Семья планет,
т.е. солнечная система

Sol – solis – Солнце

La – lactea via – Млечный путь

Si – siderae – Небеса

UT queant laxis

REsonare fibris

MIRA gestorum

FAMuli tuorum,

SOLve polluti

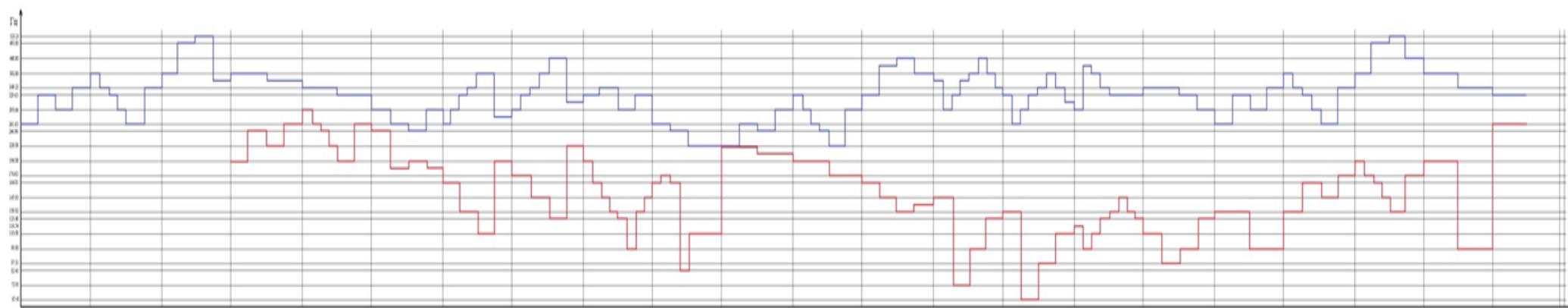
LABii reatum,

Sancte Ioannes.

В упомянутом трактате фигурировала и знаменитая Гвидова рука, на каждом суставе которой условно располагался звук. Управляя своими певчими, монах-музыкант сгибал и разгибал пальцы, указывая на ту или иную ноту.

Это вокальное упражнение в чтении нот без текста используется и сейчас – распевать ноты при помощи Гвидовой руки учат современных детей в музыкальных школах, им владеют даже уличные музыканты в Италии.

Фуга №3 Карамышев Алексей



Фуга №4 итог Карамышев Алексей



Приложение 2 Анализ Хроматической фантазии и фуги ре минор И.С.Баха на нотах

CD Sheet Music
Chromatic Fantasia and Fugue
in D Minor
BWV 903

Fantasia.

КУЛЬМИНАЦИЯ 1-Й ЧАСТИ

ГРАНИЦА ЧАСТЕЙ

КУЛЬМИНАЦИЯ ВТОРОЙ ЧАСТИ

СМЕША ЧАСТЕЙ:
Всего 80 тактов

Длина 1ой части - 49,5 т.

Длина 2ой части - 30,5 т.

$$\frac{49,5}{80} \approx \frac{30,5}{49,5} \approx 0,618$$

Кульминации:

1 часть : $0,618 = \frac{x}{49,5}$ $x = 30,5$ ТАКТ

2 часть : $0,618 = \frac{x}{30,5}$ $x = 18,85$ ТАКТ

