Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
лицей № 21 города Кузнецка

Научно-исследовательская работа по математике на тему:

«Вспомогательная окружность – ключ к поиску правильного решения задач».

Выполнил:

обучающийся 10 класса МБОУ лицея №21
города Кузнецка
Титеев Рамиль Маратович

Научный руководитель:

учитель математики МБОУ лицея № 21
города Кузнецка
Букарева Ольга Алексеевна

Кузнецк, 2020

Цель:

Исследовать метод вспомогательной окружности, применить его при решении геометрических задач.

Задачи:

1) Обобщить и систематизировать теоретические сведения об окружности и её свойствах.
2) Изучить метод вспомогательной окружности.
3) Рассмотреть наиболее типичные ситуации, в которых удобно применять вспомогательную окружность.
4) Показать применение свойств метода вспомогательной окружности при решении задач.

Методы:

1) Работа с первоисточниками.
2) Исследовательский.
3) Сравнительный анализ.
4) Самостоятельный поиск решения.
5) Поисковый.

План:

Введение

В структуру выпускного экзамена ЕГЭ по математике профильного уровня входит геометрическая задача на доказательство повышенной сложности, требующая от обучающихся всестороннего знания планиметрии. Важнейшей особенностью является отсутствие единых алгоритмов решения таких задач, успех во многом зависит от накопленного учащимися опыта решения комбинированных планиметрических задач. Тем не менее, практика решения позволила выделить некоторые геометрические структуры, являющиеся вспомогательными ключами к поиску правильного решения. Одним из таких ключей является метод вспомогательной окружности. В моей работе сформулированы теоретические аспекты, лежащие в основе применения метода вспомогательной окружности, и показано, как он используется для решения различных геометрических задач.

Актуальность: данная тема является дополнением и углублением изученных в курсе геометрии свойств окружности.

Гипотеза: метод вспомогательной окружности является одним из ключей к поиску правильного решения геометрических задач.

Объект исследования: планиметрические задачи.

Предмет исследования: метод вспомогательной окружности.

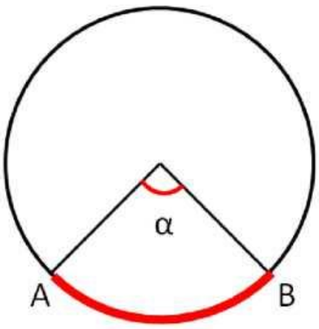
Глава 1. Окружность. Вспомогательная окружность

1.1. Теоремы и следствия, изучаемые в курсе 8-9 класса

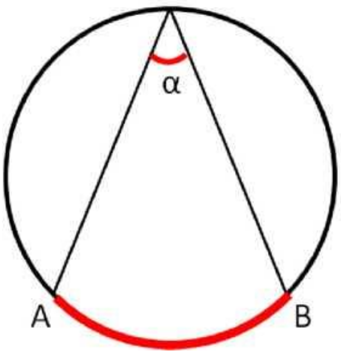
Окружность - геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки.

Вспомогательная окружность - одно из наиболее эстетичных дополнительных построений. Суть метода вспомогательной окружности заключается в том, что на чертежи к задаче вводится окружность, которую можно вписать или описать около треугольника, четырёхугольника или многоугольника. После этого связи между данными и искомыми величинами становятся очевидными. Использование вспомогательной окружности связано с характерными признаками фигуры, рассматриваемой в задаче. Целесообразность применение метода зависит от этих признаков. Они основаны на теоремах и их следствиях, изучаемых в курсе геометрии 8, 9 классов.

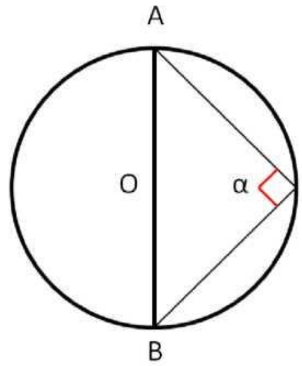
Углы, связанные с окружностью.



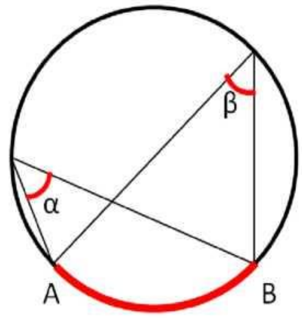
1. Градусная мера дуги окружности равна величине центрального угла: $\angle\alpha = \cup AB$



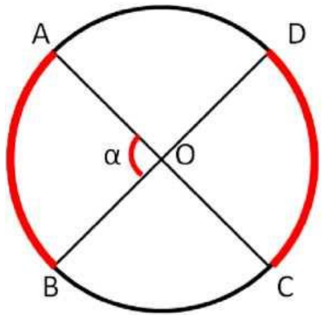
2.Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается: $\angle\alpha = \frac{1}{2}\cup AB$



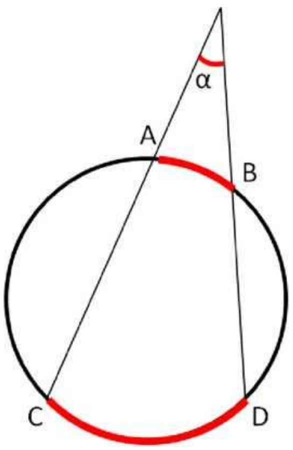
3. Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, прямой: $\angle\alpha = 90°$



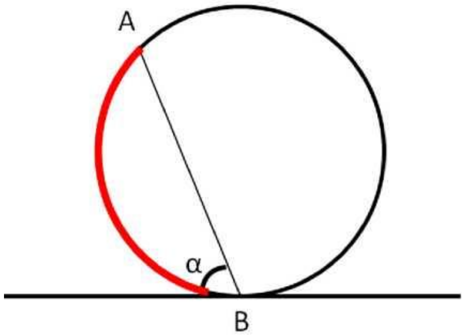
4. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны: $\angle\alpha = \angle\beta$



5. Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой двух дуг, одна из которых между его сторонами, а другая между их продолжениями : $\angle\alpha = \frac{1}{2}(\cup AB + \cup DC)$

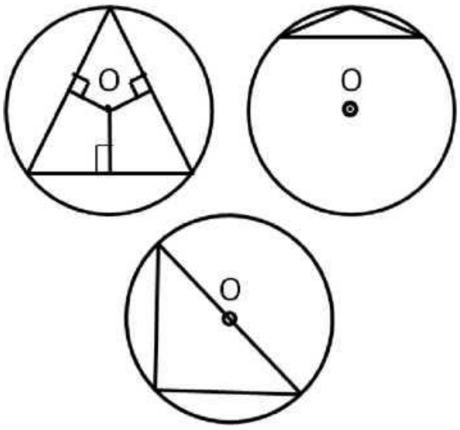


6. Угол с вершиной вне круга измеряется полуразностью дуг, заключённых между её сторонами: $\angle\alpha = \frac{1}{2}(\cup DC - \cup AB)$

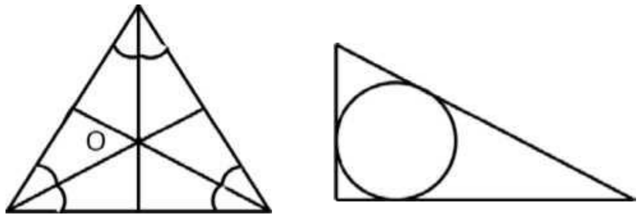


7. Угол, составленный касательной и хордой, проведённой в точку касания, равен половине дуги, заключённой внутри этого угла. $\angle\alpha = \frac{1}{2}\cup AB$

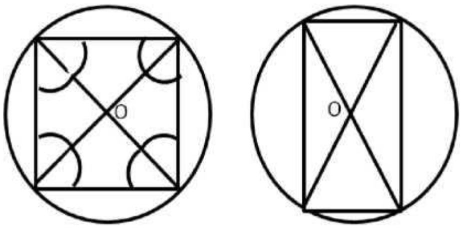
Вписанные и описанные окружности.



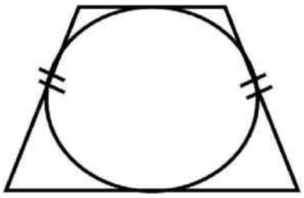
1. Около любого треугольника можно описать единственную окружность, центр - точка пересечения серединных перпендикуляров.



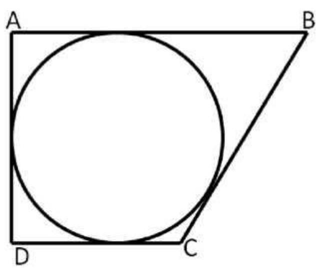
2. В треугольник можно вписать окружность и притом единственную. Центр окружности - точка пересечения биссектрис.



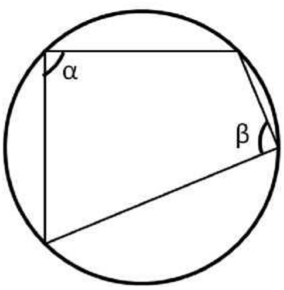
3. Из всех параллелограммов только около прямоугольника и квадрата можно описать окружность. Центр - точка пересечения диагоналей.



4. Только около равнобедренной трапеции можно описать окружность.

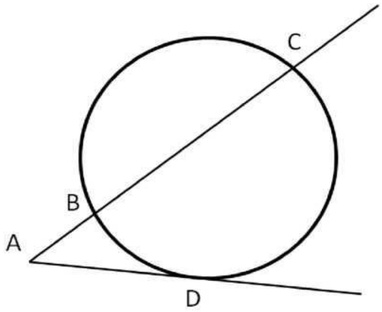


5. Если в четырехугольнике сумма длин его противоположных сторон равны, то в четырёхугольник можно вписать окружность. $AB + DC = AD + BC$



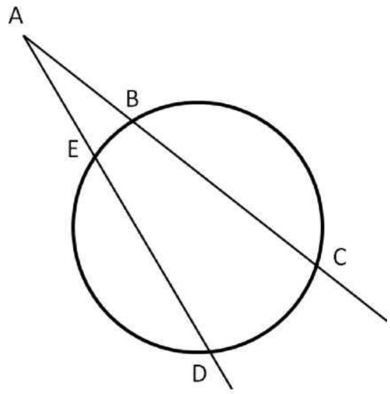
6. Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180 , то около него можно описать окружность. $\angle\alpha + \angle\beta = 180°$

Свойства окружности, пересекающихся хорд, секущих и касательных.



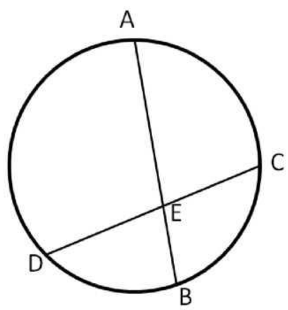
1. Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

$AD^2 = AC \cdot AB$



2. Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на ее внешнюю часть, равно произведению другой секущей на ее внешнюю часть.

$AB \cdot AC = AE \cdot AD$



3. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды

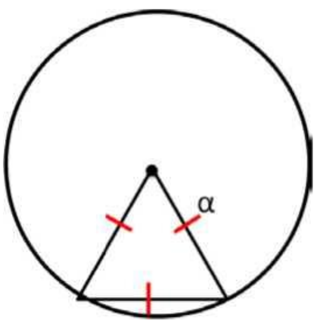
$AE \cdot EB = CE \cdot ED$

1.2. Признаки вспомогательной окружности

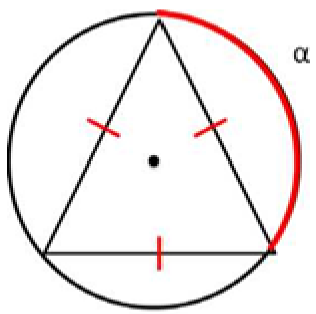
К построению вспомогательной окружности приводит наличие следующих признаков.

Первый признак.

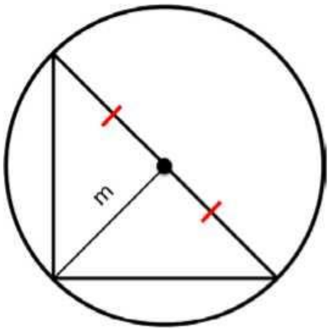
Если дан правильный треугольник, то можно провести окружность с центром в любой из его вершин и радиусом, равным длине его стороны, или описать около него окружность, которая разобьется вершинами треугольника на равные дуги по 120° каждая.



$R = \alpha$



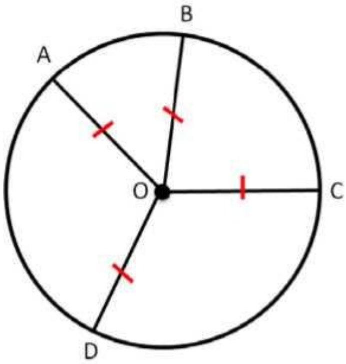
$\cup\alpha = 120°$



Второй признак

Если дан прямоугольный треугольник, то вокруг него описывается окружность, центром которой является середина гипотенузы, а радиус равен медиане, проведённой к гипотенузе этого треугольника.

$R = m$



Третий признак

Если можно указать точку, равноудалённую от рассматриваемых четырех точек, то эти четыре точки будут лежать на одной окружности.

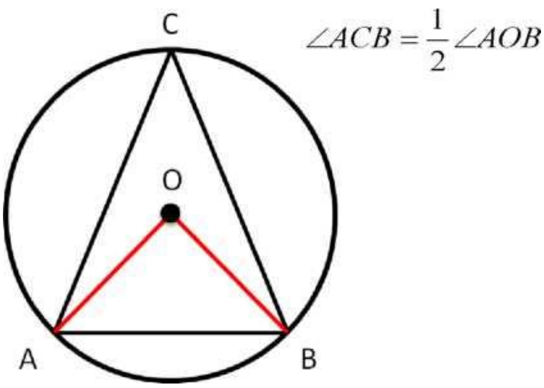
$BO = CO = DO = AO$

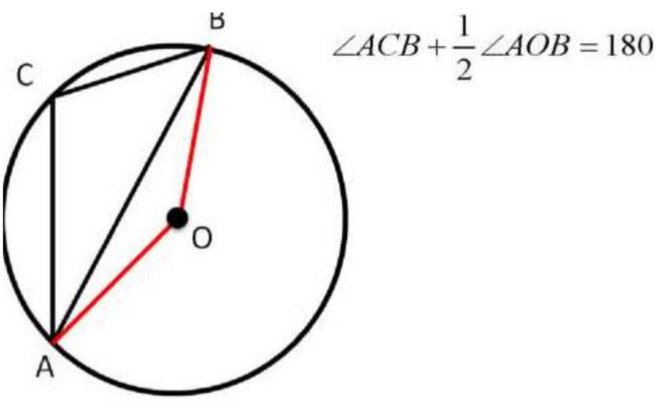
Четвертый признак.

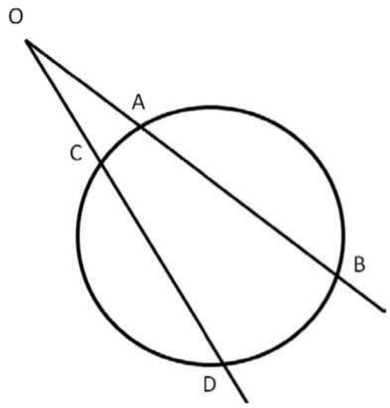
Пусть около треугольника ABC описана окружность с центром O. Если точки O и C лежат по одну сторону от прямой AB, то $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$;

Если же эти точки лежат по разные стороны от AB, то $\angle ACB + \frac{1}{2}\angle AOB = 180°$

<u>Обратно, если</u> 1) Точки O и C лежат по одну сторону от AB, $OA = OB$ и $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$; или 2) Точки O и C лежат по разные стороны от AB,$OA = OB$ и $\angle ACB + \frac{1}{2}\angle AOB = 180°$, то точка O - центр окружности, описанной около треугольника ABC.

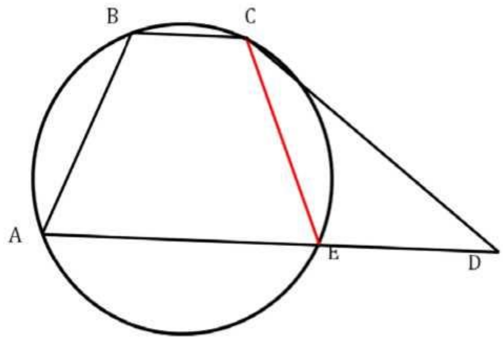






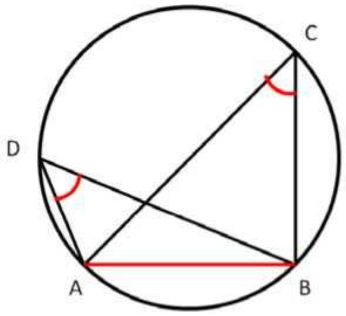
Пятый признак

Если точки A и B лежат на одной стороне неразвернутого угла с вершиной O, точки C и D на другой, и при этом $OA \cdot OB = OC \cdot OD$, то четыре точки A, B, C и D лежат на одной окружности.



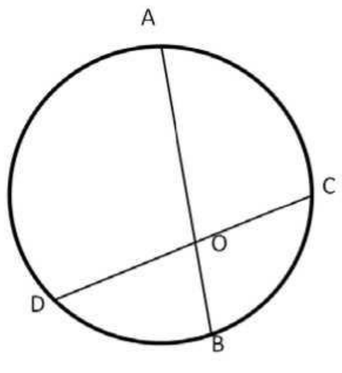
Шестой признак

Если в четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°, то вокруг него можно описать окружность.



Седьмой признак

Если отрезок AB из точек C и D виден под равными углами, то четыре точки A, B, C и D лежат на одной окружности.



Восьмой признак

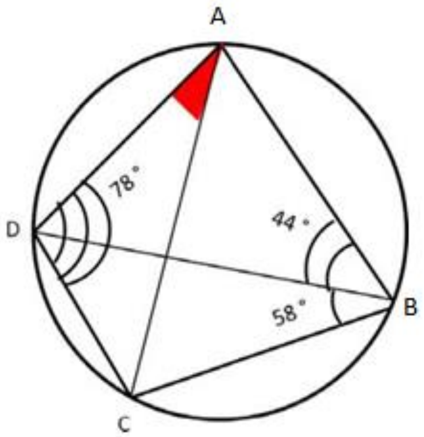
Если отрезки AB и CD пересекаются в точке O, и при этом $OA \cdot OB = OC \cdot OD$, то четыре точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

Г лава 2. Применение вспомогательной окружности.

Рассмотрим один из интересных приёмов решения геометрических задач, который состоит в том, что в чертёж вводится вспомогательная окружность, помогающая установить связь между данными и неизвестными элементами фигуры. Отыскать удачное вспомогательное построение часто бывает нелегко. Продвинуться в решении помогают знания признаков вспомогательной окружности.

Ключевая идея 1.*Обнаружить или построить четырехугольник, сумма противоположных углов которого равна 180 °.*

Задача 1. В четырехугольнике *ABCD* известны углы: $\angle CBD = 58°$, $\angle ABD = 44°$, $\angle ADC = 78°$. Найти $\angle CAD$.

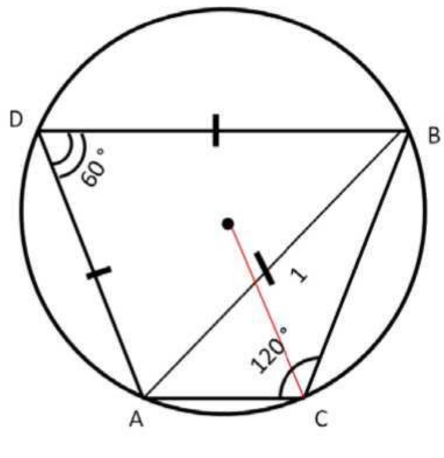


Решение:

1. $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 44° + 58° = 102°$
2. $\angle ABC + \angle ADC = 102° + 78° = 180°$ и, следовательно, около четырехугольника ABCD можно описать окружность.
3. $\angle CAD = \angle CBD = 58°$ (как вписанные углы, которые опираются на одну и ту же дугу)

Ответ: *58°*.

Задача 2. На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник. Найти расстояние между его центром и вершиной C, если AB=1 и ∠ C=120°.

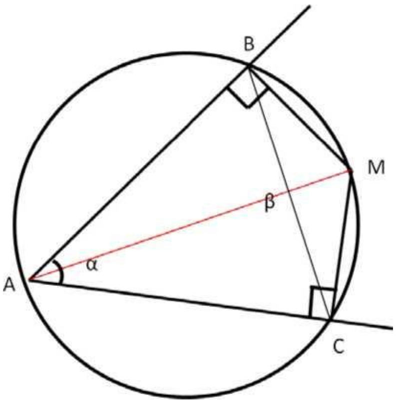


Решение: Четырехугольник ABCD: $\angle C + \angle D = 180° \Longrightarrow$ точки A, B, C, D лежат на окружности, описанной около равностороннего треугольника ABD.

Искомое расстояние равно радиусу этой окружности, $OC = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Задача 3. Дан угол величиной α с вершиной в точке A. Расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из некоторой точки M на стороны угла, равно β. Найти AM.



Решение:

1. Четырехугольник ABMC:

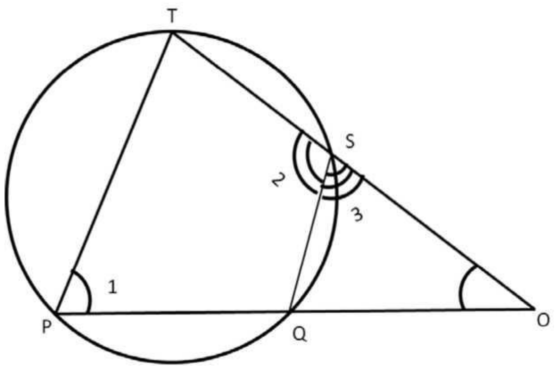
отрезок AM виден из точек B и C под прямым углом ⟹ точки A, B, M и C лежат на окружности с диаметром AM.

2. Δ ABC: По теореме синусов $\frac{\beta}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow$

$$AM = \frac{\beta}{\sin\alpha}$$

Ответ $AM = \frac{\beta}{\sin\alpha}$

Задача 4. Продолжение сторон PQ и ST вписанного четырехугольника PQST пересекаются в точке O. Доказать, что треугольники OPT и OQS подобны.



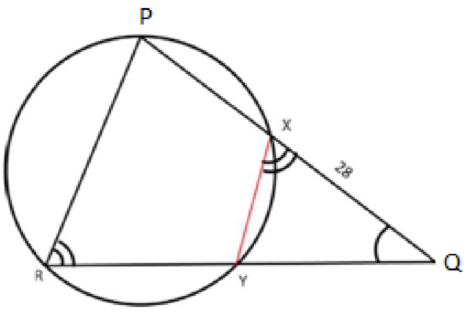
Доказательство: 1. Точки P,Q,S,T лежат на окружности ⟹ $\angle 1 + \angle 2 = 180°$

2. $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ (т. к. они смежные)

3. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 2 + \angle 3 = 180° \Rightarrow \angle 1 = \angle 3$

4. $\Delta OQS \sim \Delta OPT$ - по двум углам, ∠O- общий; $\angle 1 = \angle 3$.

Что и требовалось доказать.



Задача 5. Окружность пересекает стороны PQ и QR треугольника PQR в точках X и Y

соответственно и проходит через вершины P и R. Найдите длину отрезка XY, если $QX=28$, а сторона QR в 1,75 раз больше стороны PR.

Решение: 1. $PXYR$-вписанный четырехугольник => $\angle PRQ + \angle PXY = 180°$,

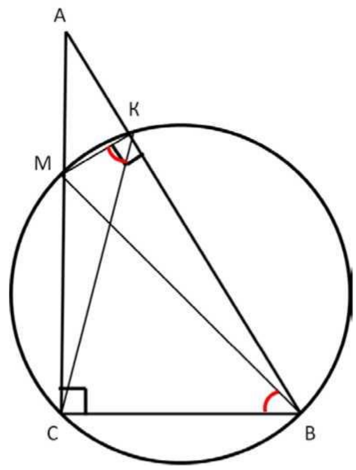
$\angle PXY + \angle YXQ = 180°$ (т.к. они смежные) => $\angle PRQ = \angle YXQ$

2. $\Delta XYQ \sim \Delta RPQ$ по двум углам => $\frac{XQ}{XY} = \frac{RQ}{PR}; \frac{28}{XY} = \frac{1{,}75}{1};$

$XY = 28:1{,}75 = 16$

Ответ: *16*

Задача 6. Из произвольной точки M катета AC прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр MK на гипотенузу AB. Доказать, что $\angle MKC = \angle MBC$.

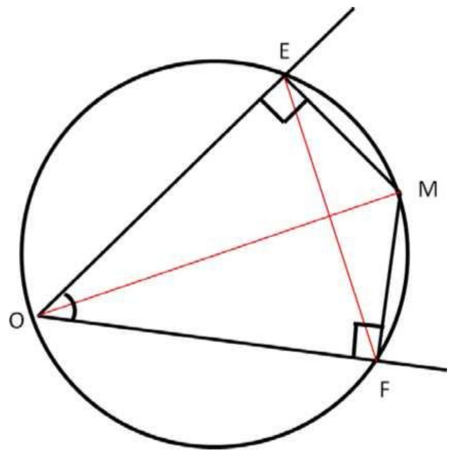


Доказательство: 1. Четырехугольник $CMKB$: $\angle C + \angle K = 180°$ ⟹ точки C, M, K и B лежат на одной окружности.

2. $\angle MKC = \angle MBC$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу MC).

Что и требовалось доказать.

Задача 7. Из точки M, которая принадлежит углу AOB, но не принадлежит его сторонам, опущены перпендикуляры ME и MF на прямые OA и OB.

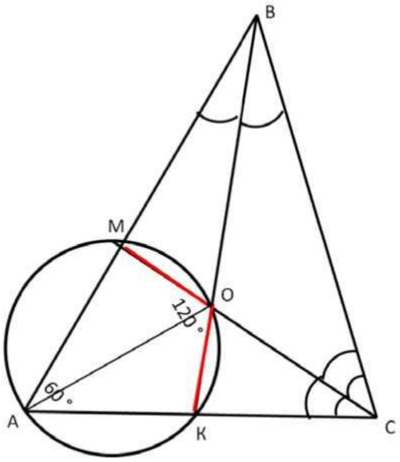


Доказать, что EF≤OM.

Доказательство: 1. Четырехугольник EMFO: $\angle E + \angle F = 180°$ => точки E, M, F и O лежат на одной окружности.

2. EF- хорда, MO- диаметр, т.к вписанный $\angle MEO=90°$, хорда EF<MO.

Что и требовалось доказать.



Задача 8. Биссектрисы ВК и СМ треугольника АВС пересекаются в точке О, $\angle A=60°$.

Доказать, что *ОК=ОМ.*

Доказательство: *1.* Δ *ABC:* $\angle A=60° \Rightarrow$

$\angle B + \angle C = 120°$, тогда $\frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2} * 120° = 60°$

2. ΔBOC: $\angle BOC = 180° - 60° = 120°$

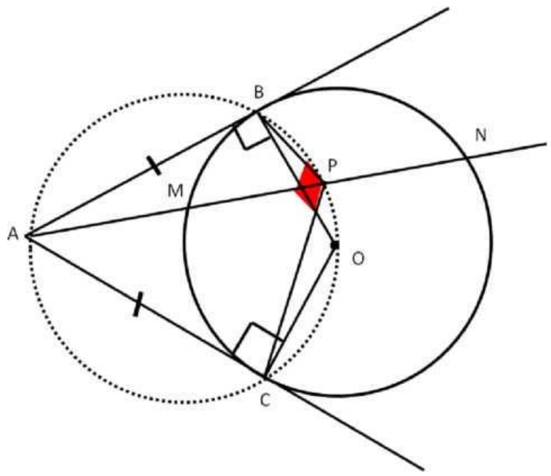
3. $\angle MOK = \angle BOC = 120°$ (вертикальные)

4.Четырехугольник АМОК: $\angle A + \angle MOK = 180° \Longrightarrow$точки А, М, О, К лежат на одной окружности.

5.АО - биссектриса $\angle A \Rightarrow \angle MAO = \angle KAO \Rightarrow \cup MO = \cup OK \Longrightarrow MO = OK$ (хорды, стягивающие равные дуги).

Что и требовалось доказать.

Задача 9. Из точки А, расположенной вне окружности, проведены касательные АВ, АС и секущая MN. Пусть В и С- точки касания, а Р- середина хорды MN. Доказать, что $\angle BPA = \angle CPA$.



Доказательство: 1. $OB \perp AB$, $OC \perp AC$ (свойство касательных к окружности) $\angle ABO + \angle ACO = 180° \Longrightarrow$ точки А, В, О, С лежат на окружности с диаметром АО.

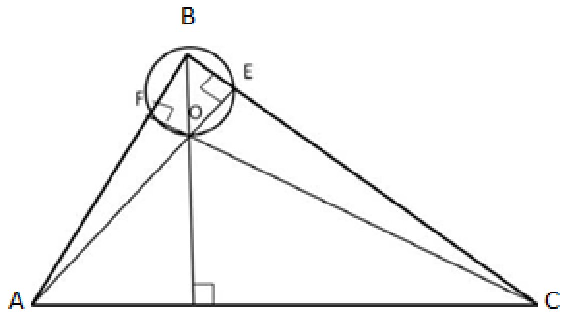
2.Хорды АВ и АС равны (отрезки касательных проведенных к окружности из одной точки) $\Longrightarrow$ $\smile AB = \smile AC$

3. Р - середина MN $\Longrightarrow$PO $\perp$ MA $\Longrightarrow$ медиана в равнобедренном Δ MON является высотой) $\Longrightarrow \angle APO=90°$, $\angle$ АРО опирается на диаметр АО $\Longrightarrow$ Р лежит на окружности.

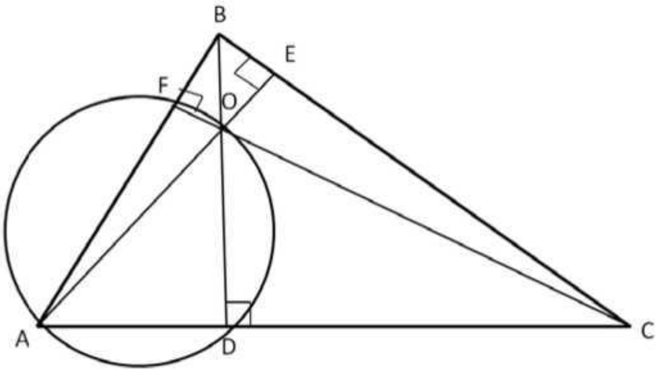
2. $\angle BPA = \angle CPA$ (вписанные углы, опирающиеся на равные дуги).

Что и требовалось доказать.

Задача 10. В треугольнике ABC проведены высоты AE, BD, CF, пересекающиеся в точке O. Известно, что $AE \cdot AO + BD \cdot BO + CF \cdot CO = 5$. Найти сумму квадратов длин сторон Δ ABC.



Решение: 1. $\angle BFO + \angle BEO = 180° \Rightarrow$ около четырехугольника FBEO можно описать окружность. По теореме о секущих, проведенных к окружности из одной точки следует, что



$AB \cdot AF = AE \cdot AO$ (1);

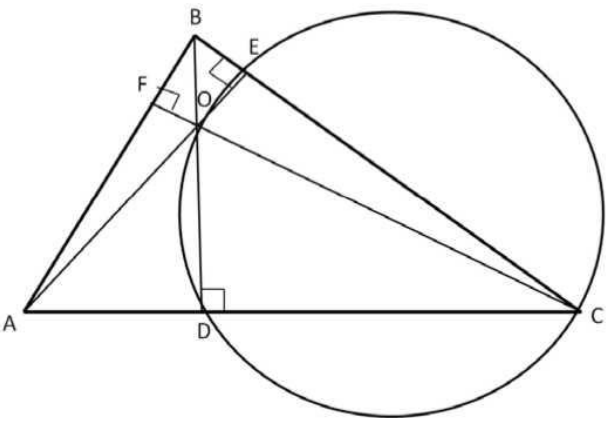
$BC \cdot EC = CF \cdot CO$ (2)

3. $\angle AFC + \angle ADB = 180° \Rightarrow$ точки A, F, O, D лежат на одной окружности $\Rightarrow$

$AB \cdot BF = BD \cdot BO$ (3);

$AC \cdot CD = CF \cdot OC$ (4)

4. $\angle AEC + \angle BDC = 180° \Rightarrow$ точки O, E, C, D лежат на одной окружности $\Rightarrow$



$AC \cdot AD = AE \cdot AO$ (5);

$BC \cdot BE = BD \cdot BO$. (6);

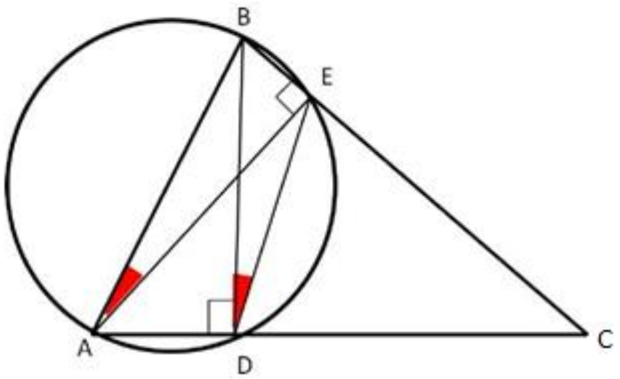
$$AB * AF = AE * AO$$
$$BC * EC = CF * CO$$
$$AB * BF = BD * BO$$
$$+$$
$$AC * CD = CF * OC$$
$$AC * AD = AE * AO$$
$$BC * BE = BD * BO$$

$$AB * AF + BC * EC + AB * BF + AC * CD + AC * AD + BC * BE = 2AE * AO + 2BD * BO + 2CF * CO$$
$$AB(AF + BF) + BC(BE + EC) + AC(CD + AD) = 2(AE * AO + BD * BO + CF * CO)$$
$$AB * AB + BC * BC + AC * AC = 2 * 5$$
$$AB^2 + BC^2 + AC^2 = 10$$

Ответ: *10*

Ключевая идея 2*.Обнаружить две точки, лежащие в одной полуплоскости от данной прямой, из которых данный отрезок, принадлежащий этой прямой, виден под одинаковыми углами.*

Задача 11. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты AE и BD. Доказать, что углы *BDE* и *BAE* равны.



Доказательство:

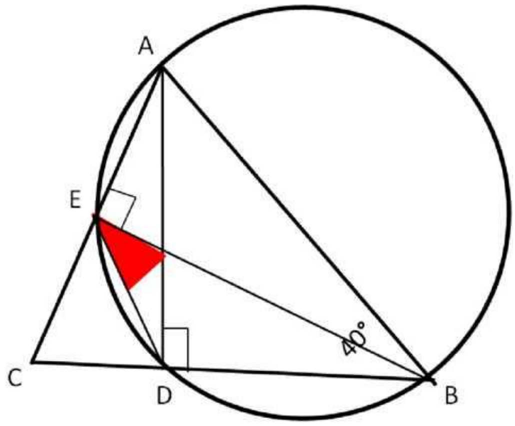
1. ∠*ADB* = ∠ *AEB* = 90° .Отрезок AB виден из точек E и D под одним и тем же углом => около четырехугольника ADEB можно описать окружность.

2. ∠*BDE*= ∠ *BAE* (вписанные углы,

С опирающиеся на одну дугу BE).

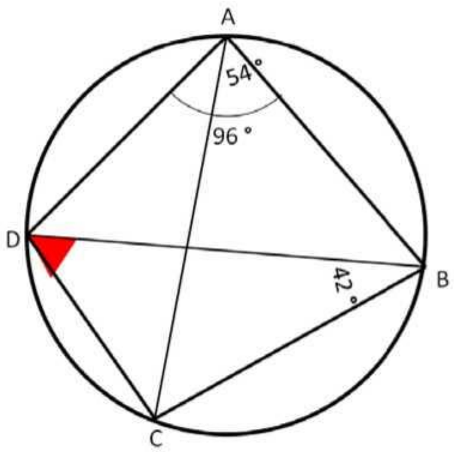
Что и требовалось доказать.

Задача 12. В остроугольном треугольнике ABC ∠B=40° проведены высоты AD и BE. Найдите ∠*BED*.



Решение: 1. Отрезок AB виден из точек D и E под прямыми углами ⟹ точки D, E,A и B лежат на одной окружности.
2. ∠B + ∠AED = *180°* =>
∠*BED* = 180° - 40° - 90° = 50°
Ответ: 50°

Задача 13. В четырехугольнике ABCD известны углы: ∠ *BAD=96°*, ∠*BAC=54°*.Найти, чему равен ∠ *BDC.*

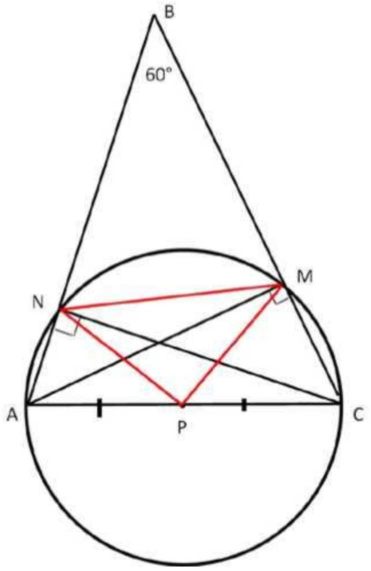


Решение: ∠*DAC* = ∠*BAD* - ∠*BAC* = 96° - 54° = 42° , т.е. ∠*DAC*= ∠ *CBD.* Но тогда около четырехугольника ABCD можно описать окружность. Следовательно, ∠ *CBD* = ∠*BAC* =

54°(вписанные углы, которые опираются на одну и ту же дугу).

Ответ: 54°

Задача 14.В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60°, AM и CN- его высоты, а P- середина стороны AC. Доказать, что треугольник MNP- равносторонний.



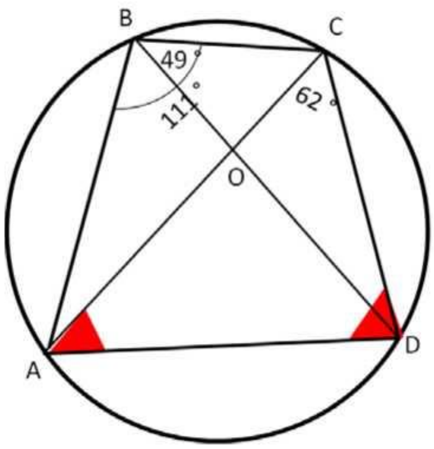
Доказательство: 1. Четырехугольник ANMC: Отрезок AC из точек N и M виден под прямым углом ⟹ точки A, N, M и C лежат на одной окружности с диаметром AC.

2. ∠ *NPM*- центральный, ∠ *NAM*- вписанный, опираются на одну и ту же дугу NM ⟹ ∠NPM = 2 ∠NAM = 2 ∠BAM = *2·30° = 60°*

3. ΔNMP- равнобедренный с углом при вершине P, равном 60° ⟹ ΔNMP- равносторонний.

Что и требовалось доказать.

Задача 15. В выпуклом четырехугольнике ABCD диагонали AC и BD пересекаются в точке O. *∠ABC=111°, ∠OBC=49°, ∠ACD=62°*. Найти ∠ CAD и ∠ADC.



Решение: 1. *∠ABD* = 111°- 49° = 62°

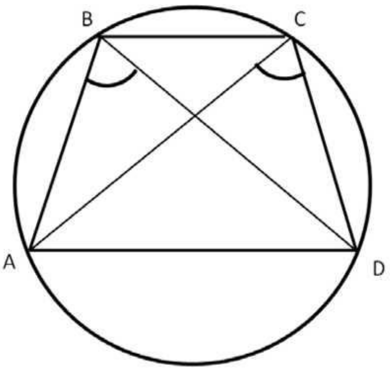
2.Отрезок AD из точек B и D виден под одним и тем же углом ⟹ точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

3. ∠ B + ∠ D = 180° ⟹ *∠ ADC* = 180°-111° = 69°

4. ∠ CAD = *∠ CBD* = 49° (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу).

Ответ: ∠ CAD=49°; ∠ ADC=69°

Задача 16.В трапеции ABCD с основанием AD и BC угол ABD равен углу ACD. Доказать, что ABCD- равнобедренная трапеция.



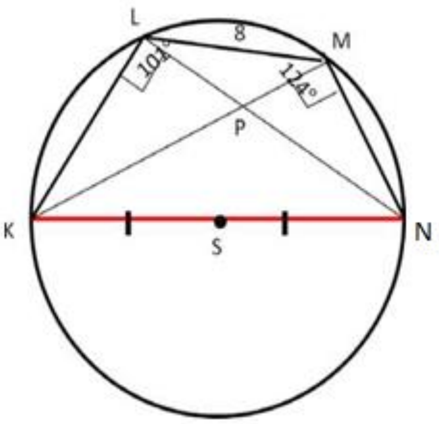
Доказательство: 1. Отрезок AD из точек B и C виден под одним и тем же углом $\Rightarrow$ точки A, B,C, и D лежат на одной окружности.

2. $BC \parallel AD \Rightarrow \smile AB = \smile CD \Rightarrow AB = CD$

(равные дуги стягивают равные хорды) $\Rightarrow$ ABCD-равнобедренная трапеция.

Что и требовалось доказать.

Задача 17. Середина S стороны KN выпуклого четырехугольника KLMN равноудалена от всех его вершин. Найдите KN, если *LM=8, ∠ L=101°,* *∠ M=124°.*



Решение: 1. Точка S равноудалена от вершин четырехугольника $\Rightarrow$ KLMN- вписанный четырехугольник, KN- диаметр окружности.

2. ∠ KMN = ∠ KLN = *90°*

3. ∠ LMP = 124°- 90° = 34° $\Rightarrow$ $\smile LK = 68°$

∠ *MLP* = 101° - 90° = 11° $\Rightarrow$ $\smile MN = 22°$, тогда

$\smile LM = 180° - (68° + 22°) = 90° \Rightarrow \angle LKM = 45°$

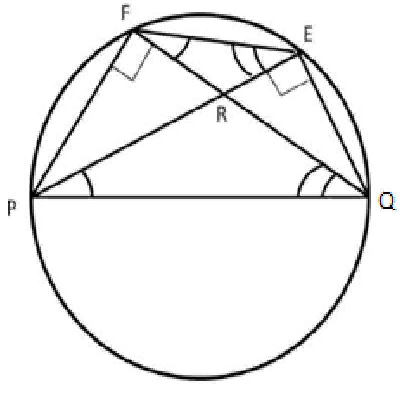
4. $\dfrac{LM}{\sin \angle LKM} = 2R$; $2R = \dfrac{8}{\sin 45°} = \dfrac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$

$\Rightarrow KN = 8\sqrt{2}$

Ответ: $\boldsymbol{KN = 8\sqrt{2}}$

Вписанные углы, опирающиеся на общую дугу позволяют выявить подобные треугольники.

Задача 18. В треугольнике PQR с тупым углом R проведены высоты PE и QF. Доказать, что треугольники ERF и PRQ подобны.



Доказательство: *1.* ∠ PEO= ∠ PFQ=90° $\Rightarrow$ P, E, F, Q лежат на одной окружности диаметром PQ.

2. ∠ FEP= ∠ FOP (вписанные углы,

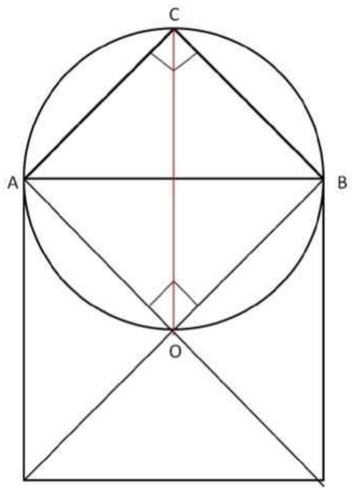
опирающиеся на одну и ту же дугу P*F)*

3. $\angle EFO = \angle EPO$ (вписанные углы, опирающиеся на дугу QE)

4. $\Delta ERF \sim \Delta PRO$ (по 2-м углам).

Что и требовалось доказать

Задача 19. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O. Доказать, что CO - биссектриса прямого угла.

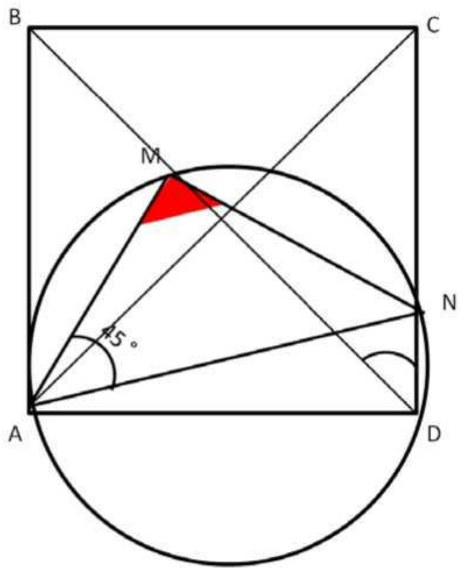


Доказательство: 1. Четырехугольник ACBO: $\angle C=90°($ по условию); $\angle AOB=90^0$(диагонали квадрата перпендикулярны) $\Rightarrow$ отрезок AB из точек C и O виден под прямым углом $\Rightarrow$ A,C,B, и O лежат на окружности с диаметром AB.

2. AO=OB (диагонали квадрата в точке пересечения делятся пополам) $\Rightarrow$ $\cup AO = \cup OB$ $\Rightarrow$ CO - биссектриса прямого угла C.

Что и требовалось доказать.

Задача 20.Из вершины A квадрата ABCD проведены лучи, образующие между собой угол 45°. Один из них пересекает диагональ BD в точке M, другой- сторону CD в точке N. Найти величину угла AMN.

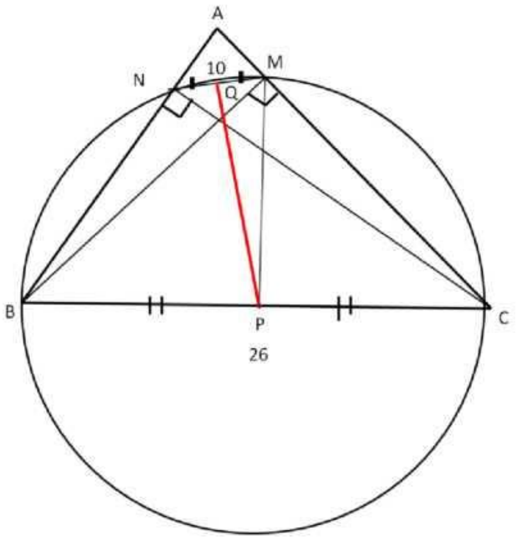


Решение: 1. Отрезок MN виден из точек A и D под углом 45°$\Rightarrow$ около четырехугольника ADNM можно описать окружность.

2. По теореме о вписанном четырехугольнике $\angle MAD + \angle MND = \angle ADN + \angle AMN = 180° \Rightarrow$ $\angle AMN = 180° - 90° = 90°$

Ответ: $\angle AMN=90°$.

Задача 21. Известно, что BM и CN высоты треугольника ABC, при этом *MN=10, BC=26.* Найти расстояние между серединами отрезков MN и BC.



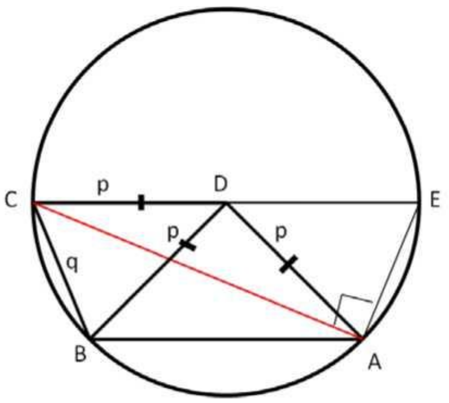
Решение: 1. Из точек M и N отрезок BC виден под прямым углом ⟹ точки M, N, B и C лежат на одной окружности с диаметром BC.

2. P- центр окружности, Q- середина хорды NM⟹ $PQ \perp NM$

3. ΔPQM: $\angle Q=90°$;MP=13, QM=5⟹QP=12

Ответ:12.

Задача 22.Основание CD, диагональ BD и боковая сторона AD трапеции ABCD равны *p.* Боковая сторона BC равна *q*. Найдите диагональ AC.



Решение: 1. Точки C,B и A равноудалены от точки D⟹ окружность проходит через точки C, B и A.

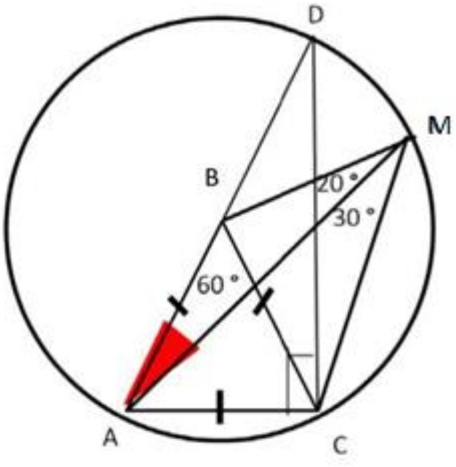
2. Продолжим отрезок CD до пересечения с окружностью. CE - диаметр ⟹CEAB- равнобедренная трапеция, *EA=BC=q*

3. ΔCAE: $\angle A=90°$; По теореме Пифагора

$$AC^2 = CE^2 - AE^2 = 4p^2 - q^2;\ AC = \sqrt{4p^2 - q^2}$$

Ответ: $\sqrt{4p^2 - q^2}$

Задача 23.Из вершины A правильного треугольника ABC проведен луч, пересекающий сторону BC. Точка M расположена на этом луче таким образом, что $\angle AMB=20°$, $\angle AMC=30°$. Найти $\angle MAB$.



Решение: 1. На продолжении прямой AB отложим отрезок BD, равный AB.

2. $AB=BC=BD \Longrightarrow BC$ - медиана Δ ACD.

Медиана BC равна половине стороны AO. Это возможно только в прямоугольном треугольнике $\Longrightarrow \angle ACD=90°$

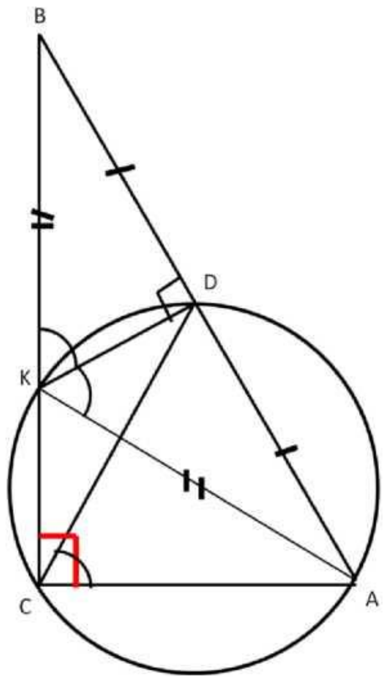
3. $\Delta\, ACD$: $\angle ACD=90°$, $\angle DAC=60°$ (по условию) $\Longrightarrow \angle ADC=30°$

4. Сторона AC из точек D и M видна, под одним и тем же углом $\Longrightarrow$ точки A,D,M,C лежат на одной окружности.

5. $\angle$ ACD=90° $\Longrightarrow$ AD- диаметр окружности, B-центр $\Longrightarrow BA=BM \Longrightarrow \angle BAM = \angle BMA = 20°$.

Ответ: $\angle BMA = 20°$.

Задача 24. В треугольнике ABC ($AC<BC$) проведена медиана CD. Известно, что $\angle DCA + \angle DBC = 90°$. Доказать, что $\angle ACB=90°$.



Доказательство: 1. Проведём KD $\perp$ AB

2. Δ *BKD:* $\angle$ B + $\angle$ BKD = *90°;* $\angle$ B + $\angle$ DCA = *90°* $\Longrightarrow$ $\angle$ BKD= $\angle$ DCA

3. Δ BAK: KD- высота, медиана $\Longrightarrow$ Δ BAK- равнобедренный $\Longrightarrow \angle BKD= \angle AKD$

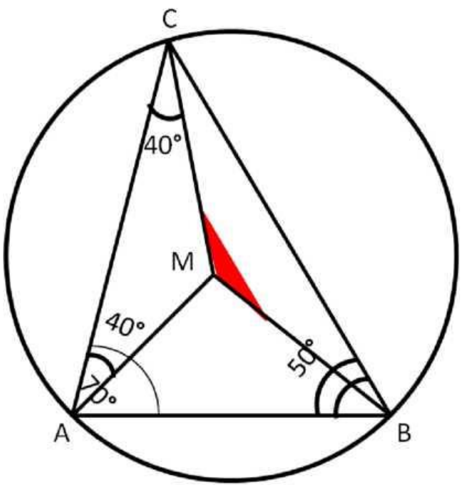
4. Отрезок AD виден из точек К и С под одним и тем же углом $\Longrightarrow$ точки C, K, D и A лежат на одной окружности

5. Суммы противоположных углов вписанного четырехугольника равны 180° $\Longrightarrow \angle ACB=90°$.

Что и требовалось доказать.

***Ключевая идея 3.**Сопоставление данных (чаще всего числовых) приводит к выводу о возможности использования свойств вписанных и соответствующих им центральных углов вспомогательной окружности.*

Задача 25.В треугольнике ABC: $\angle A=70°$, $\angle B=50°$. Точка M лежит внутри треугольника, причем $\angle MAC = \angle MCA = 40°$.Найдите $\angle BMC$.



Решение: 1. Δ ACM: $\angle A = \angle C = 40° \Longrightarrow$ Δ ACM-равнобедренный, $MC=MA$

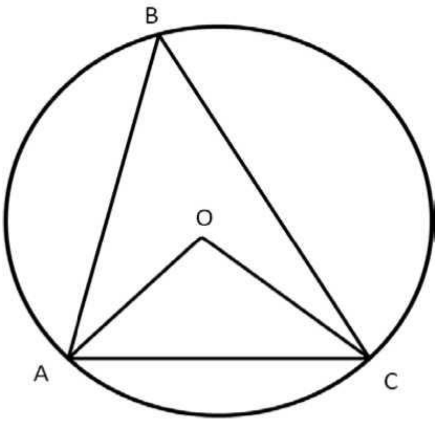
2. Точки A и C равноудалены от точки M. Значит лежат на одной окружности с центром в точке M.

3. $\angle M=100°$, $\angle B=50° \Longrightarrow$ точки B, A и C лежат на окружности.

4. $\angle A=70° \Longrightarrow \angle M=140°$(центральный)

Ответ: *140°*

Задача 26.Точки O и B расположены в одной полуплоскости относительно прямой AC. Известно, что OA=OC и $\angle AOC=2\cdot\angle ABC$. Докажите, что точки A, B и C лежат на окружности с центром O.

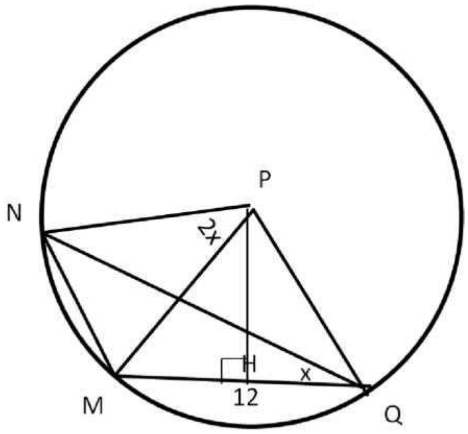


Доказательство: 1. Точки A и C равноудалены от точки O $\Longrightarrow$ A и C лежат на окружности с центром O.

2. Предположим, что точка B также лежит на окружности. Тогда $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$ (вписанный); .$\angle AOC = \cup AC$ Значит $\angle AOC = 2 \cdot \angle ABC$. Условие задачи выполняется, значит точки A, B и C лежат на окружности с центром O.

Что и требовалось доказать.

Задача 27.В трапеции MNPQ(*MQ//NP)* угол NQM в 2 раза меньше угла MPN. Известно, что *NP* = *MP* = $\frac{13}{2}$, *MQ=12*. Найти площадь трапеции.



Решение: 1. *NP=MP* ⟹P- центр окружности, проходящий через точки M и N.

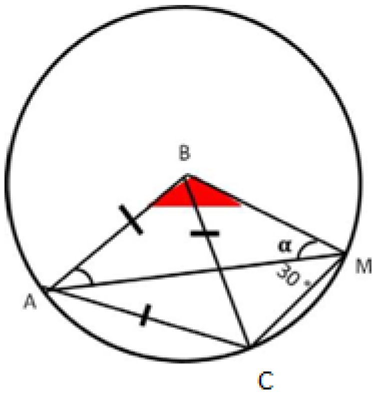
2. ∠NPM- центральный, ∠ *NQM* меньше ∠ *NPM* в 2 раза ⟹ точка Q лежит на окружности с центром в точке P и радиусом 6,5.

3. ΔMPQ: *HP* ⊥*MQ; PH* = $\sqrt{6{,}5^2 - 6^2}$ = 2,5

4. *S(MNPQ*) = (6,5 +12): 2 · 2,5 = $\frac{185}{8}$

Ответ: $\frac{185}{8}$

Задача 28. Вне равностороннего треугольника ABC, но внутри угла BAC взята точка M, причем ∠CMA=30°, ∠BMA=*α*. Найти ∠ABM.



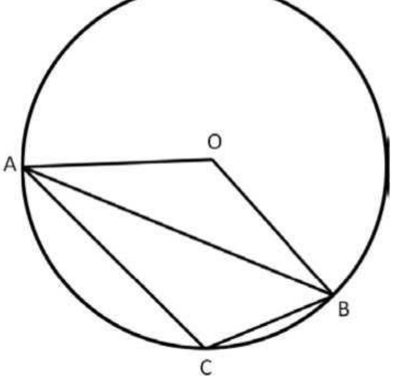
Решение: 1. *AB=BC* ⟹ *B*- центр окружности, проходящей через точки A и C.

2. ∠ *ABC=60°;* ∠ *AMC=30°*=> точка M лежит на окружности с центром в точке B и радиусом AB.

3. Δ ABM- равнобедренный ⟹ ∠ ABM = *180°- 2α*

Ответ: 180°—2*α*

Задача 29.Точки O и C расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AB. Известно, что AO=OB и ∠ *AOB* = 2 ·(180° - ∠ *ACB).* Докажите, что точки A, B и C лежат на окружности с центром O.



Доказательство: 1. По условию *AO=OB* ⟹ точки A и B лежат на окружности; OA, OB- радиусы, AB- хорда.

2. Предположим, что точка C лежит на окружности.

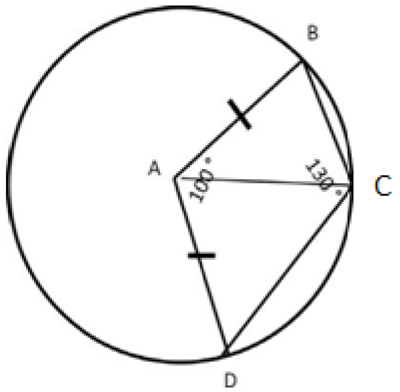
∠ *AOB* - центральный; ∠ *ACB*-вписанный;

∠ *AOB* = 360° - 2 · ∠*ACB* = 2·(180°- ∠*ACB)*

Условия задачи выполняются $\Longrightarrow$ предположение о том, что точка С лежит на окружности верно, значит точки А, В и С лежат на окружности с центром О.

Что и требовалось доказать.

Задача 30. В выпуклом четырехугольнике ABCD известно, что $\angle BAD=100°$, $\angle$ BCD=130°, AB=AD. Докажите, что AB=AC.



Доказательство: 1. По условию $AB= AD \Longrightarrow$ точки B и D лежат на окружности с центром в точке A, AB и AD - радиусы

2. Предположим, что точка С лежит на окружности. Тогда

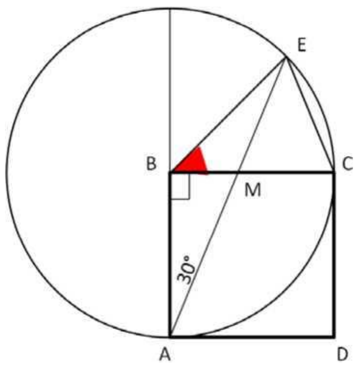
$\angle BAD$ = 360° - 2 · $ZBCD$ = 360° - 2·130° = 100°

3. Равенство выполняется.

Предположение о том, что точка С лежит на окружности верно, значит D, B и C лежат на одной окружности $\Longrightarrow$ AB=AC.

Что и требовалось доказать.

Задача 31. Дан квадрат ABCD. Вне квадрата отметили точку E так, что $\angle BAE=30°$, $\angle BCE=75°$. Найдите угол CBE.



Решение: 1. Δ BAM: $\angle M$ = 90° - 30° = 60°

2. $\angle BMA = \angle EMC$ = 60° (вертикальные)

3. Δ EMC: $\angle MEC$ = 180°- 60°- 75° = 45°

4.Точки А и С равноудалены от точки В $\Longrightarrow$ А и С лежат на одной окружности

5. Предположим, что точка Е лежит на этой же окружности. $\angle AEC=45°$(вписанный) $\Longrightarrow \angle ABC=90°$. Условия задачи выполняются $\Longrightarrow$ точки А, С, Е лежат на одной окружности.

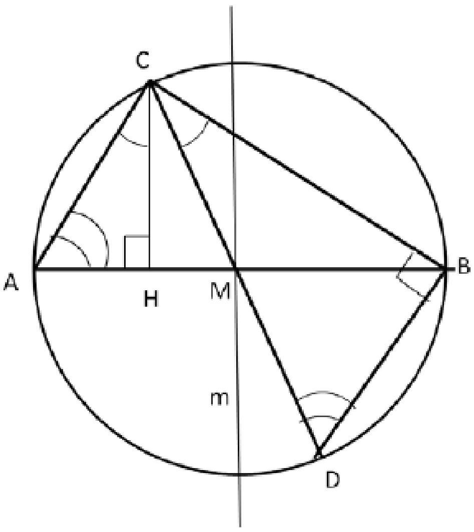
6. Продолжим АВ до пересечения с окружностью (точка N); $\angle BAE=30° \Longrightarrow$

$\smile NE=60°$, $\smile EC$ = 180°- 90°- 60° = 30° $\Longrightarrow \angle CBE=30°$(центральный)

Ответ: *30°*

Ключевая идея 4. *Если на чертеже к задаче есть треугольник, в котором заданы замечательные линии, то около треугольника описывается окружность, и рассматриваются точки пересечения заданных замечательных линий с ней. Чаще всего этот прием применяется в случаях, когда заданы биссектриса, высота и медиана, проведенные к одной и той же стороне треугольника.*

Задача 32. Высота и медиана треугольника, проведённые из одной вершины внутри него, различны и образуют равные углы со сторонами, выходящими из той же вершины. Доказать, что треугольник прямоугольный.



Доказательство: 1. Опишем около Δ ABC окружность

2. Продолжим медиану CM до пересечения с окружностью в точке D

3. Рассмотрим Δ ACH и Δ CBD:

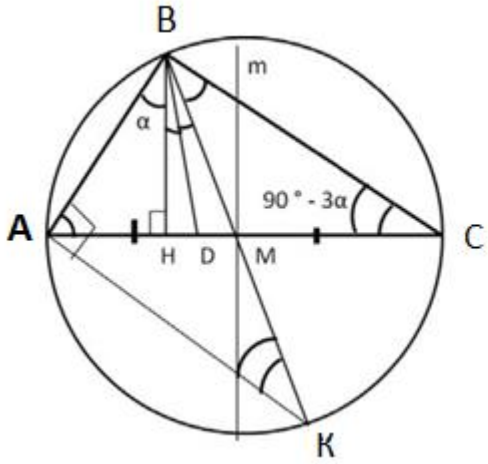
$\angle ACH = \angle DCB$ (по условию), $\angle A = \angle D$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC), $\Longrightarrow \angle ACH = \angle DBC = 90° \Longrightarrow$ CD-диаметр окружности.

4. Центр окружности лежит на диаметре CD и на серединном перпендикуляре m к стороне AB. Т.к. медиана CM не является высотой, то прямые CD и m имеют одну общую точку M, которая является центром окружности $\Longrightarrow \angle ACB = 90°$

Что и требовалось доказать.

Построение дополнительной окружности значительно упрощает решение, даже в тех случаях, когда в условии задачи нет и намёка на окружность.

Задача 33. Высота, биссектриса и медиана, проведённые из одной вершины треугольника ABC, делят угол при этой вершине на четыре равных части. Найдите углы треугольника.



Решение: 1. Опишем около Δ ABC окружность и продолжим медиану BM до пересечения с окружностью в точке K

2. Пусть ∠ ABH= ∠ HBD= ∠ DBM= ∠ MBC= α

3. Δ HCB: $\angle HCB$ = 90° - 3α

4. $\angle HCB = \angle AKB$ = 90° - 3α (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу AB)

5. Δ ABK: $\angle BAK$ = 180°-(3α + 90°-3α) = 90° BK- диаметр описанной окружности около Δ ABK.

6. Центр описанной окружности- точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC. Пусть m один из таких перпендикуляров, проходящих через точку M, т.к. M - середина AC. MϵBK, M$\epsilon m \Longrightarrow$ M- центр, описанной окружности около Δ ABC $\Longrightarrow \angle ABC$ = 90° $\Longrightarrow \alpha = \frac{90}{4}$ = 22,5°

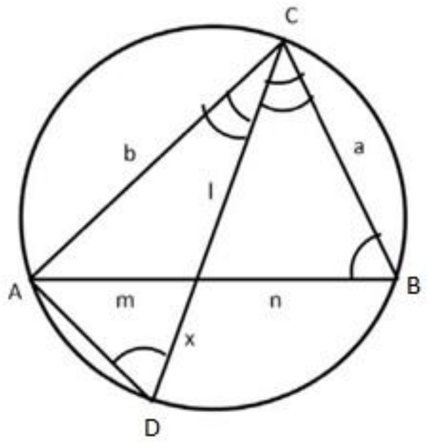
7. ∠ BCA = *90° - 3· 22,5° = 22,5°*

∠ CAB = *180° - 90° - (90° - 3· 22,5°) = 180° - 90° - 22,5° = 67,5°*

Ответ: *90°; 22,5°; 67,5°.*

Введение вспомогательной окружности позволяет увеличить количество рассматриваемых отрезков, что дает возможность использовать теоремы об отрезках хорд, секущих и касательных.

Задача 34. Доказать, что квадрат биссектрисы треугольника равен разности между произведением заключающих её сторон и произведением отрезков третьей стороны, на которые она делится биссектрисой. $l^2 = ab-mn$



Доказательство: 1. Около треугольника ABC опишем окружность и продлим биссектрису CD треугольника до пересечения с окружностью в точке E.

2. $\angle ACE = \angle BCE$(CD- биссектриса),

$\angle AEC = \angle ABC$(вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AC=>

$\Delta AEC \sim \Delta DBC$ по двум углам => $\frac{l+x}{a} = \frac{b}{l}$

$\Longrightarrow l^2 = ab - lx$

3.Хорды AB и CE пересекаются в точке D =>$mn=lx$

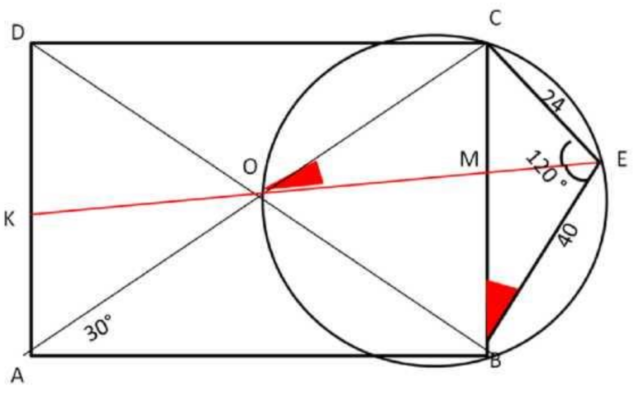
Тогда $l^2 = ab - mn$

Что и требовалось доказать.

Идея решения данной задачи основывалась на подобии треугольников, на использовании теоремы о пропорциональности отрезков пересекающихся хорд окружности, на описании вспомогательной окружности около треугольника, в котором проведены биссектрисы.

Задача 35. Диагональ AC прямоугольника ABCD с центром O образует со стороной AB угол 30°. Точка E лежит вне прямоугольника, причем $\angle BEC=120°$

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$



б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K. Найдите EK, если известно, что $BE=40$ и $CE=24$

Решение:

а) 1. По теореме о внешнем угле треугольника

$\angle BOC = \angle BAO + \angle ABO = 2 \cdot 30° = 60°$

2. Четырехугольник *OCEB*:

$\angle BOC + \angle BEC = 60° + 120° = 180°$ $\Rightarrow$точки *O,C,E и B* лежат на одной окружности.

3. $\angle CBE = \angle COE$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу *CE*)

Что и требовалось доказать.

б) 4. ΔBEC: $\angle E=120°$; $CE=24$; $BE=40$. По теореме косинусов

$CB^2 = CE^2 + BE^2 - 2CE \cdot BE \cdot \cos 120°$

$CB^2 = 576 + 1600 - 2 \cdot 24 \cdot 40 \cdot (-\frac{1}{2}) = 2176 + 960 = 3136 = 56^2$

$CB=56$

5. Хорды *OC* и *OB* равны $\Rightarrow \angle CEO = \angle BEO \Rightarrow EO$- биссектриса

6. ΔCBE: по формуле биссектрисы угла

$$ME = \frac{2CE * BE * \cos 120°}{CE + BE} = \frac{2 * 24 * 40 * \frac{1}{2}}{24 + 40} = \frac{960}{64} = 15$$

7. ΔCBE: по свойству биссектрисы *ME*: $\frac{CE}{BE} = \frac{CM}{BM} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow CM = \frac{3}{8} \cdot BC = \frac{3}{8} \cdot 56 = 21$

8. По свойству пересекающихся хорд $OM \cdot ME = CM \cdot MB$; $OM \cdot 15 = 21 \cdot (56 - 21)$; $OM = \frac{35 \cdot 21}{15} = 49$

9. $\Delta COM = \Delta KOA$ ($AO=CO$; $\angle COE = \angle AOK$; $\angle KAO = \angle MCO$) $\Rightarrow$

$OM = OK = 49$

10. $EK = 49 + 49 + 15 = 113$

Ответ: *113*

В задаче использованы: метод вспомогательной окружности; свойства сторон и диагоналей прямоугольника; свойства вписанных углов; свойства дуг, которые стягиваются равными хордами; свойства пересекающихся хорд; свойства биссектрисы треугольника и формула для вычисления её длины; теорема косинусов; признаки равенства треугольников.

Вывод:

Решать геометрические задачи помогает введение в чертеж дополнительных линий. Одной из таких является окружность. Вспомогательная окружность - ключ к решению задачи. Изучение теоретического материала по методу вспомогательной окружности позволило повторить теоремы планиметрии, которые являются основой для применения метода вспомогательной окружности. Выявить и сформулировать признаки, наличие которых в задаче приводит к построению вспомогательной окружности. Установить связи между методом вспомогательной окружности и решением задач.

Заключение.

В работе рассмотрен один из интересных приёмов решения геометрических задач, который состоит в том, что в чертёж вводится вспомогательная окружность. Построение вспомогательной окружности позволяет увеличить число теорем, которыми можно пользоваться при решении задач, и благодаря этому отыскивать зависимость между элементами фигуры. В работе выделены наиболее типичные ситуации, в которых можно применить вспомогательную окружность, рассмотрены задачи различных уровней сложности.

Данная исследовательская работа помогает "увидеть" окружность там, где ее нет. Помогает описать окружность там, где это возможно, что значительно облегчает решение задач. Вспомогательная окружность- ключ к решению ряда геометрических задач.

Практическая значимость.

1. Применение опыта решения планиметрических задач с использованием метода вспомогательной окружности повышают уровень математической культуры.
2. Изучение данной темы - глубокая подготовка к ЕГЭ, успешному участию в математических конкурсах и олимпиадах.
3. Работа может быть использована для практических занятий и элективных курсов в 11 классах.

Список литературы

1. Гордин Р.К. «ЕГЭ 2011. Математика. Задача С4» под редакцией А.Л. Семёнова и И.В. Ященко.- М.: МЦНМО, 2011 г.
2. Мерзляк А.Г. «Учимся решать задачи по геометрии».
3. Погорелов А.В. «Геометрия: учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений».- М.: Просвещение, 2018 г.
4. Черняк А.А. «ЕГЭ по математике. Геометрия. Практическая подготовка».- СПБ.: БХВ- Петербург, 2015 г.
5. Ященко И. В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. М.: Издательство «Национальное образование», 2018.