Городской научно–практический марафон «Шаги в науку»

I этап

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКА

НЕСТАНДАРТНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Исследовательская работа

Выполнил: Езулов Андрей Валерьевич,
ученик 11 «А» класса МОУ «ЛИЦЕЙ № 230»
г. Заречного Пензенской области
Руководитель:
Платко Юлия Сергеевна,
учитель высшей квалификационной
категории МОУ «ЛИЦЕЙ № 230»
г. Заречного Пензенской области

г. Заречный

2020

Содержание

Введение

В школьной программе, в олимпиадных заданиях и тестах ЕГЭ встречаются различные логарифмические уравнения и неравенства. В школьном курсе алгебры и начал анализа изучаются методы решения несложных логарифмических уравнений, неравенств и их систем. При подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня мы столкнулись с тем, что некоторые задания по данной теме сложно, а порой и невозможно решить традиционными методами. Поэтому мы решили провести исследовательскую работу, **цель** которой **изучить нестандартные способы решения логарифмических уравнений и неравенств**.

Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

- ✓ познакомиться с историей логарифмов;
- ✓ повторить традиционные способы решения логарифмических уравнений и неравенств;
- ✓ изучить нестандартные способы решения логарифмических уравнений и неравенств;
- ✓ рассмотреть решения логарифмических уравнений и неравенств из заданий ЕГЭ нестандартными способами.

Объект исследования: логарифмические уравнения и неравенства

Предмет исследования: нестандартные способы решения логарифмических уравнений и неравенств.

Гипотеза исследования: решение некоторых логарифмических уравнений и неравенств нестандартными способами более рационально, чем другими традиционными способами, и является в некоторых случаях единственным способом решения.

Актуальность исследования определяется тем, что свободное владение нестандартными способами решения часто даёт выигрыш по времени решения задания, и порой является единственным способом их решения, что важно при подготовке к ЕГЭ.

Основная часть

Глава 1

Основные сведения по теории логарифмов

1.1. Историческая справка (Приложение)

1.2. Теоретические сведения

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b. Определение логарифма можно кратко записать так: $a^{\log_a b} = b$. Это равенство справедливо при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Его обычно называют **основным логарифмическим тождеством.**

При выполнении преобразований выражений, содержащих логарифмы, при вычислениях и при решении уравнений часто используют различные **свойства логарифмов**. Рассмотрим основные из них.

Пусть $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$; p – любое действительное число, $k \neq 0$, $s \neq 0$, $a \neq 1$.

Тогда справедливы формулы:

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a b^p = p \log_a b$
4. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$
5. $\log_a \sqrt[s]{b} = \frac{1}{s} \log_a b$
6. $\log_{a^p} b^p = \log_a b$
7. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
8. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

Уравнения вида $\log_a x = b$, где $x > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$ называются **логарифмическими**.

После нахождения корней логарифмического уравнения необходимо проверить условие: подлогарифмическое выражение должно быть больше 0.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ определена при $x > 0$ *и* $a > 0$, $a \neq 1$. Это обстоятельство необходимо учитывать при решении уравнений, содержащих логарифмы, и начинать с определения области допустимых значений, учитывая, что все выражения, от которых берутся логарифмы, должны быть положительны. Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ возрастает на всей своей области определения. Если же $0 < a < 1$, то $y = \log_a x$ убывает на всей области определения. Это свойство функции используется при решении неравенств.

1.3. Основные методы решения логарифмических уравнений и неравенств

Так как некоторые нестандартные способы решения логарифмических уравнений и неравенств мы будем рассматривать в сравнении с традиционными способами решения, считаем необходимым кратко остановиться на основных методах решения логарифмических уравнений и неравенств.

К ним относят:

- ✓ Применение определения логарифма
- ✓ Метод потенцирования (переход от уравнения $\log_{f(x)} \varphi(x) = \log f(x) \omega x$ к уравнению $\varphi x = \omega(x)$).
- ✓ Метод приведения к одному основанию
- ✓ Использование основного логарифмического тождества (переход от уравнения $f(x)^{\log f(x) \varphi(x)} = \omega(x)$ к уравнению $\varphi(x) = \omega(x)$).
- ✓ Метод логарифмирования (обе части равенства или неравенства, если они положительные, можно прологарифмировать по одному основанию)

Пример 1. Решить уравнение $\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x)$.

ОДЗ определено условиями: $\begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0 \\ 7 - 2x > 0 \end{cases}$

Решение. Потенцируя, получаем

$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$

$x^2 - x - 12 = 0$

$x_1 = 4$, $x_2 = -3$.

Проверим найденные корни по ОДЗ.

Значение $x = 4$ не удовлетворяет этой системе неравенств, т.е. $x = 4$ – посторонний корень для заданного уравнения. Значение $x = -3$ удовлетворяет обоим неравенствам системы, а потому $x = -3$ – корень заданного уравнения.

Ответ: – 3.

Глава 2

Нестандартные способы решения логарифмических уравнений и неравенств

2.1. Метод рационализации

Часто, при решении логарифмических неравенств, встречаются задачи с переменным основанием логарифма. Так, неравенство вида

$$\log_{a(x)} b(x) > \log_{a(x)} c(x)$$

является стандартным школьным неравенством. Как правило, для его решения применяется переход к равносильной совокупности систем:

$$\log_{a(x)} b(x) > \log_{a(x)} c(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a(x) < 1 \\ 0 < b(x) < c(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) > 1 \\ b(x) > c(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Недостатком данного метода является необходимость решения семи неравенств, не считая двух систем и одной совокупности. Уже при данных квадратичных функциях решение совокупности может потребовать много времени. Можно предложить альтернативный, менее трудоемкий метод решения этого стандартного неравенства. Это метод рационализации неравенств, который ещё называют методом декомпозиции, замены множителей, замены функций, обобщенный метод интервалов, правило знаков.

Метод рационализации заключается в замене сложного выражения F(x) на более простое выражение G(x), при которой неравенство G(x)^0 равносильно неравенству F(x)^0 в области определения F(x).

f, g, h – выражения с переменной x, a – фиксированное число или функция ($a > 0$, $a \neq 1$).

	Выражение F	Выражение G
1	$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
	$\log_a f - 1$	$(a-1)(f-a)$
	$\log_a f$	$(a-1)(f-1)$
2	$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$
	$\log_h f - 1$	$(h-1)(f-h)$
	$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
3	$\log_f h - \log_g h$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
	$\log_h f \cdot \log_p k$	$(h-1)(f-1)(p-1)(k-1)$
	$\dfrac{\log_a f - \log_a g}{\log_b h}$	$\dfrac{(a-1)(f-g)}{(b-1)(h-1)}$

Из данных выражений можно вывести некоторые следствия (с учетом области определения):

$$\log_h f \cdot \log_p k \,\hat{}\,0 \Leftrightarrow (h-1)(f-1)(p-1)(k-1)\,\hat{}\,0$$

$$\log_h f + \log_h k \Leftrightarrow (fk-1)(h-1)\,\hat{}\,0$$

$$f^h - k^p \,\hat{}\,0 \Leftrightarrow (a-1)\left(\log_a \mathrm{f}^{\mathrm{h}} - \log_a k^p\right)\hat{}\ 0$$

В указанных равносильных переходах символ ^ заменяет один из знаков неравенств: >, <, ≤, ≥.

Стандартные ошибки, которые допускают учащиеся при использовании метода рационализации, заключаются в следующем:

- ✓ проводят рационализацию без учета области определения данного неравенства;
- ✓ применяют метод рационализации к неравенствам, не приведенным к стандартному виду;
- ✓ формально применяют метод рационализации к выражениям вида $\log_a f(x) + \log_a g(x)$, заменяя на выражение $f(x) + g(x)$;
- ✓ подменяют формулировку «о совпадении знаков выражений для каждого допустимого значения x» на неверную формулировку «о совпадении значений выражений для каждого допустимого значения x».

Пример 2: Рассмотрим пример решения логарифмического неравенства двумя методами

$$\log_{x+2}(x^2 - 2) \geq \log_{x+2}(x+2)^2$$

1 способ:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2>1 \\ x^2-2 \geq x^2+4x+4 \\ x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x+2 < 1 \\ x^2-2 \leq x^2+4x+4 \\ x > -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -1 \\ 4x+6 \leq 0 \\ x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} -2 < x < -1 \\ 4x+6 \geq 0 \\ x > -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ x \in \left[-\frac{3}{2}; -\sqrt{2}\right) \end{array}\right.$$

2 способ (метод рационализации):

$$\log_{x+2}(x^2 - 2) \geq \log_{x+2}(x+2)^2$$

$$\begin{cases} (x+2-1)(x^2-2- (x+2)^2 \geq 0 \\ x+2>0 \\ x+2 \neq 1 \\ x^2 - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+1{,}5) \leq 0 \\ x > -2 \\ x \neq -1 \\ x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x \in \left[-\frac{3}{2}; -\sqrt{2}\right)$

Ответ: $\left[-\frac{3}{2}; -\sqrt{2}\right)$

2.2. Решение уравнений и неравенств за счет свойств, входящих в них функций.

Имеется довольно много уравнений и неравенств, которых можно решать за счет свойств, входящих в них функций. Этот метод дает возможность решить уравнение или неравенство проще, чем с помощью стандартных методов. Существует несколько таких нестандартных методов:

- **Использование областей существования функций**

Анализ области определения уравнения или неравенства в некоторых случаях позволяет существенно упростить процедуру нахождения решений.

Так, если множество, на котором определены обе части уравнения, окажется пустым множеством, то ответ в этом случае ясен – уравнение не имеет решений.

Пример 3. Решить уравнение $\lg\left(1+\sqrt{x^2-4}\right) + 3x - x^2 - 1 = 3^{\sqrt{4-x^2}}$

Решение.

Обе части уравнения определены только для тех x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ 4 - x^2 \leq 0 \end{cases}$$

Решением системы являются $x_1 = -2, x_2 = 2$. Проверка показывает, что $x_2 = 2$ удовлетворяет данному уравнению, а $x_1 = -2 - нет$.

Ответ: 2.

- **Использование ограниченности функции**

Пусть левая часть уравнения F(x)=0 есть сумма нескольких функций$F(x) = f_{1(}(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$, каждая из которых неотрицательна для x из области ее существования. Тогда уравнение F(x)=0 равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$$

Пример 4. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 7x + 12} + \lg^2(x^2 - 4x + 1) \leq 0$

Решение.

Каждая из функций в левой части неравенства неотрицательна при $x \in [3; 4]$ поэтому неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ \lg^2(x^2 - 4x + 1) = 0 \end{cases}$$

Из корней первого уравнения системы x=3, x=4; только x=4 удовлетворяет второму уравнению, то есть неравенство имеет единственное решение.

Ответ: 4.

- **Использование монотонности функций**

Напомним, непрерывная функция $f(x)$называется *строго монотонной*, если при $x_1 > x_2$ выполняется условие $f(x_{1)} > f(x_2)$ или $f(x_{1)} < f(x_2)$т.е. в случае строгой монотонности неравенство для значений функции так же строгое.

Решение уравнений и неравенства с использованием строгой монотонности основано на утверждениях:

1. Если $f(x)$ – непрерывная, строго монотонная функция на интервале (a;b), то уравнение $f(x) = const$ может иметь не более одного решения на этом интервале.

2. Если $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывны на интервале (a;b), и имеют в нем разный характер строгой монотонности (одна из функций возрастает, другая убывает), то уравнение $f(x) = g(x)$ может иметь не более одного решения на этом интервале.

В случае, когда определить характер или интегралы монотонности функции из общих соображений не удается, то такая задача решается с использованием производных.

Пример 5. Решить неравенство $\sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x+2) - \sqrt{1-x} < 4$

Решение.

ОДЗ данного неравенства есть промежуток $0 \leq x \leq 1$. На ОДЗ функция $f(x) = \sqrt[6]{x} + 2x^3$+$\log_3(x+2) - \sqrt{1-x}$ является непрерывной и строго возрастающей. Так как $f(1) = 4$, то все значения x из множества $[0; 1)$ удовлетворяет исходному неравенству.

Ответ: $0 \leq x < 1$

2.3. Использование числовых неравенств

Иногда применение того или иного числового неравенства к одной из частей уравнения (неравенства) позволяет заменить его равносильной ему системой уравнений. Часто применяется неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \qquad \text{где } a \geq 0, b \geq 0$$

(причем равенство здесь возможно лишь при $a = b$), и его следствия:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \text{где } a > 0$$

(причем $a + \frac{1}{a}$ = 2 тогда, когда $a = 1$).

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{x^2+2x+4} + \frac{4}{\sqrt{x^2+2x+4}} = 4 - \log_3^4(x^2+x^4+1)$

Решение:

ОДЗ этого уравнения есть все действительные числа. Переписав левую часть уравнения в виде

$$2(\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x^2+2x+4}})$$

замечаем, что она не меньше 4, как сумма двух взаимно обратных положительных величин, и только при x =0 она равна четырем. В то же время правая часть при $x = 0$ также равна 4, а для всех $x \neq 0$ меньше 4. Следовательно, $x = 0$ есть единственное решение уравнения.

Ответ: 0.

2.4. Метод мажорант (метод оценивания)

Название **метода мажорант** происходит от французских слов majorer – объявлять большим и minorer – объявлять меньшим.

Метод мажорант основан на том, что множество значений некоторых функций ограничено. При использовании **метода мажорант** мы выявляем точки ограниченности функции, то есть в каких пределах изменяется данная функция, а затем используем эту информацию для решения уравнения или неравенства.

Как понять, что в задании присутствует мажоранта и его нужно решать именно предложенным методом? Для этого нужно знать основной признак подобных задач: имеется смешанное уравнение (неравенство), то есть в задании присутствуют разнородные функции, например: линейная и логарифмическая, тригонометрическая и квадратичная.

Пример 7. Решить неравенство: $7^{-|x-3|}\cdot\log_2(6x-x^2-7)\geq 1$.

Решение: Преобразуем данное неравенство: $\frac{\log_2(6x-x^2-7)}{7^{|x-3|}}\geq 1$.

Т.к. $7^{|x-3|}>0$, то $\log_2(6x-x^2-7)\geq 7^{|x-3|}$.

Рассмотрим левую часть $\log_2(6x-x^2-7)$. Преобразуем подлогарифмическое выражение: $6x-x^2-7=-(x^2-6x+9)+2=-(x-3)^2+2$. Получаем, что подлогарифмическое выражение $6x-x^2-7\leq 2$. Т. к. $y=\log_2 t$ возрастает при $t>0$, то $\log_2(6x-x^2-7)\leq\log_2 2 \;\;\Leftrightarrow\;\; \log_2(6x-x^2-7)\leq 1$.

Рассмотрим правую часть $7^{|x-3|}$. Мы знаем, что $y = 7^t$ возрастает. Т. к. $|x-3| \geq 0$, то $7^{|x-3|} \geq 7^0 \;\Leftrightarrow\; 7^{|x-3|} \geq 1$. Получаем, что левая и правая части равны 1. Следовательно, неравенство $\log_2(6x - x^2 - 7) \geq 7^{|x-3|}$ равносильно системе:

$$\begin{cases} \log_2(6x - x^2 - 7) = 1, \\ 7^{|x-3|} = 1. \end{cases}$$

Решив первое уравнение системы, получаем $x = 3$. Проверим первое уравнение, подставив значение x. Получаем верное равенство $\log_2(6 \cdot 3 - 3^2 - 7) = 1$. Значит, $x = 3$ является решением неравенства $7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x - x^2 - 7) \geq 1$.

Ответ: 3.

Глава 3

Использование нестандартных способов при решении логарифмических уравнений и неравенств ЕГЭ

Пример 8: Решить неравенство: $\log_{x-3}\left(x^2 - 12x + 36\right) \leq 0$

Решение:

$$1)\ \begin{cases} x - 3 > 0, \\ x - 3 \neq 1, \\ x^2 - 12x + 36 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 3, \\ x \neq 4, \\ (x-6)^2 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 3, \\ x \neq 4, \\ x \neq 6; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} 3 < x < 4, \\ 4 < x < 6, \\ x > 6. \end{array}\right.$$

2) $\log_{x-3}\left(x^2 - 12x + 36\right) \leq 0$,

$(x - 3 - 1)\left(x^2 - 12x + 36 - 1\right) \leq 0$,

$(x - 4)\left((x - 6)^2 - 1\right) \leq 0$,

$x = 4$, $\quad x - 6 = \pm 1$,

$x = 7$, $\quad x = 5$

$(x - 4)(x - 7)(x - 5) \leq 0$,

$x \leq 4$, $\quad 5 \leq x \leq 7$;

3) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3 < x < 4, \\ 4 < x < 6, \\ x > 6, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \le 4, \\ 5 \le x \le 7; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} 3 < x < 4, \\ 5 \le x < 6, \\ 6 < x \le 7. \end{array}\right.$ $(3;4) \cup [5;6) \cup (6;7]$.

Ответ. $(3;4)$, $[5;6)$, $(6;7]$.

Пример 9: Решить неравенство: $\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \ge \log_{2x^2-5x+3}(3-x)$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{12x^2-41x+35}(3-x) - \log_{2x^2-5x+3}(3-x) \ge 0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)(-10x^2+36x-32) \ge 0, \\ 12x^2-41x+35 > 0, \\ 2x^2-5x+3 > 0, \\ 12x^2-41x+34 \ne 0, \\ 2x^2-5x+2 \ne 0, \\ 3-x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^4\left(x-\frac{8}{5}\right)\left(x-\frac{17}{12}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) \ge 0, \\ \left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{7}{4}\right) > 0, \\ (x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) > 0, \\ \left(x-\frac{17}{12}\right)(x-2) \ne 0, \\ (x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right) \ne 0, \\ x < 3 \end{cases}$$

Для решения первых трёх неравенств системы используем метод интервалов.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};1\right) \cup \left[\frac{8}{5};\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4};2\right) \cup (2;3)$.

Пример 10: Решить неравенство

$$(\sqrt{x^2-6x+5}+1)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{12x-2x^2-10}+1\right)>0$$

Решение.

Обе части неравенства определены только для тех x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x>0 \\ x^2-6x+5\geq 0 \\ 12x-2x^2-10\geq 0 \end{cases}$$

Данной системе неравенств удовлетворяют лишь два числа: $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$. Поэтому если данное неравенство имеет решения, то они могут быть только среди этих двух чисел. Проверка показывает, что число x_1 не удовлетворяет неравенству, а число x_2 ему удовлетворяет. Следовательно, неравенство имеет единственное решение x_2

Ответ: $x = 5$.

Пример 11. Решить неравенство: $\cos^2(x+1)\cdot\lg(9-2x-x^2)\geq 1$.

Решение: Определим, чем ограничены функции. Так, $0\leq cos^2(x+1)\leq 1$. Проведем преобразование второй функции:

$\lg(9-2x-x^2)=\lg(-(x^2+2x+1)+10)=\lg(10-(x+1)^2)$. Мы видим, что наибольшее значение этой функции равно 1.

Следовательно, неравенство $\cos^2(x+1)\cdot\lg(9-2x-x^2)\geq 1$ равносильно системе: $\begin{cases} cos^2(x+1)=1, \\ \lg(10-(x+1)^2)=1. \end{cases}$

Решив второе уравнение системы, получаем $x=-1$. Проверим первое уравнение, подставив значение x. Получаем верное равенство $cos^2(-1+1)=1$. Значит, $x=-1$ является решением неравенства $\cos^2(x+1)\cdot\lg(9-2x-x^2)\geq 1$.

Ответ: –1.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите неравенство: $\log_{5-x}\frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4$. (Ответ: $x \in [-1;\ 4)$)

2. Решите неравенство: $5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1$. (Ответ: $x = 2$)

3. Решите уравнение: $\log_2(2x - x^2 + 15) = x^2 - 2x + 5$. (Ответ: $x = 1$)

4. Решите неравенство: $4\sqrt{(3x-1)^2} + \sqrt{{\log_2}^2 x^2 + 16\log_4 x} \leq 4 - 12x$. (Ответ: $x = \frac{1}{4}$)

5. Решите неравенство: $\log_{6-x}\frac{(x-6)^2}{x-2} \geq 2$. (Ответ: $x \in (2;\ 3] \cup (5; 6)$)

6. Решите неравенство: $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}\left(10x^2 + x - 2\right) \leq 0$. (Ответ: $x \in (-\infty;-1) \cup \left(\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right] \cup (1;+\infty)$)

7. Решите неравенство: $\log_{x+1}(x^3 + 3x^2 + 2x) < 2.$ (Ответ: $x \in \left(0;\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$).

Заключение

В работе представлены нестандартные способы решения логарифмических уравнений и неравенств. Конечно, мы не ставили цели рассмотреть все возможные нестандартные способы. Но, рассмотренные на конкретных примерах и заданиях ЕГЭ способы позволяют значительно упростить, а в некоторых случаях и ускорить процесс нахождения решений и дают возможность выполнить задания по данной теме на экзамене на максимальный балл.

Цель нашего исследования достигнута, поставленные задачи выполнены. В ходе реализации были решены большое количество уравнений и неравенств, что окажет реальную помощь при сдаче ЕГЭ.

Выполненная работа может быть использована обучающимися для повторения и систематизации материала по данной теме, а также учителями математики для элективных курсов.

Источники информации:

1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин]. – 6-е изд. – М.: Просвещение, 2019

2. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Задания с развёрнутым ответом / Ю.В. Садовничий. – М.: Издательство «Экзамен», 2020

3. Открытый банк заданий ЕГЭ по математике, [электронный ресурс] **mathege.ru**

4.Материалы по математике: подготовка к олимпиадам и ЕГЭ / Яковлев И.В. [электронный ресурс] – режим доступа https://mathus.ru

5. Школково – образовательный портал для подготовки к ЕГЭ, ОГЭ и олимпиадам [электронный ресурс] – режим доступа https://shkolkovo.net

6. Решу ЕГЭ [электронный ресурс] – режим доступа https://math-ege.sdamgia.ru

Приложение

Историческая справка

Ещё в XVI-XVII вв. практика поставила перед математиками задачу упрощения вычислений, связанных с расчётами сложных процентов в финансовых, страховых и кредитных делах. Тогда все учёные воспользовались идеей, в основе которой лежат свойства степеней. Эти свойства были известны ещё Архимеду в III в. до н.э., который в своём сочинении "Псаммит" ("Исчисление песчинок") рассматривал последовательности степеней одного и того же числа $a^0, a^1, a^2, a^3, ..., a^n, ...$ и высказывал утверждение, что $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Но чтобы воспользоваться этой идеей, нужны были таблицы, в которых сопоставлялись бы последовательности степеней чисел с последовательностями их показателей. Автором изобретения логарифмов и составителем первых таблиц логарифмов считают англичанина Дж. Непера (1550 – 1617), опубликовавшего в 1614 г. работу под названием "Описание удивительной таблицы логарифмов". Непер также ввёл и сам термин "логарифм". Самым удобным основанием для таблицы логарифмов является число 10, так как мы пользуемся в расчётах десятичной системы счисления. Действительно, любое положительное число N можно представить в стандартном виде $N = a \cdot 10^k$, где $k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq a < 10$. Поскольку порядок числа k легко определяется, то для нахождения логарифма числа ($\lg N = k + \lg a$) достаточно иметь лишь таблицу мантисс – таблицу чисел $\lg a$, где $1 \leq a < 10$.

Таблицы десятичных логарифмов, которыми вплоть до появления микрокалькуляторов пользовались в России, разработал на основе неперовских таблиц отечественный педагог – математик В. М. Брадис (1890 – 1975).

На основе той же идеи замены произведения степеней суммой, а частного степеней разностью показателей этих степеней была создана логарифмическая линейка, которой пользовались более 300 лет инженеры и математики всего мира. Изобретателем логарифмической линейки (в 1624 г.) считается английский учёный Э.Гунтер.

Десятичные логарифмы в силу традиций и удобства использования до сих пор широко применяются в практике. Однако для математической науки и её приложений более значимыми являются натуральные логарифмы. Значимость функции $y = \ln x$ объясняется тем, что в математике часто используются показательные функции с основанием e и соответственно обратные им функции.

Законченный вид теории логарифмической функции придал выдающийся математик XVIII в. Л. Эйлер (1707 – 1783). Отметим, что значительную часть своей жизни Эйлер, сын небогатого пастора из Базеля, провёл в России, приняв в 1727 г. приглашение работать в только что организованной в Петербурге Академии наук. Ему принадлежат общие определения показательной и логарифмической функций как взаимно обратных, а также введение числа e. Развитие теории логарифмических функций после Эйлера происходило в основном в рамках математического анализа.