

МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА № 3 ГОРОДА КУЗНЕЦКА

Научно – исследовательская работа
по математике

Тема: «Свойства круглого треугольника»

Выполнил: Кулишов Даниил
учащийся 9 а класса МБОУ СОШ № 3 города Кузнецка

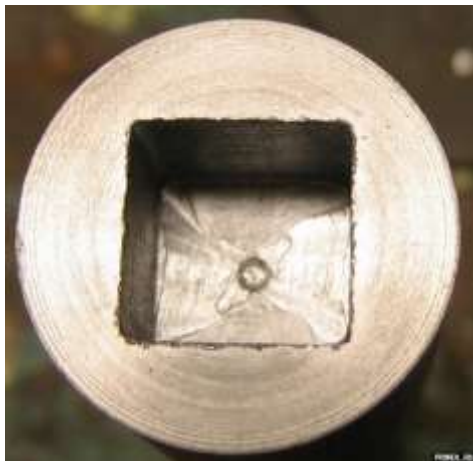
Руководитель: Сергеева Елена Владимировна
учитель математики МБОУ СОШ № 3 города Кузнецка

СОДЕРЖАНИЕ.

- 1. Введение**
- 2. Немного теории**
- 3. Историческая справка**
- 4. Свойства треугольника Рело**
- 5. Применение треугольника Рело**
- 6. Обобщения и аналоги треугольника Рело**
- 7. Мои исследования**
- 8. Заключение**
- 9. Список использованной литературы и сайтов**

Введение

В нашей школе проходила неделя точных наук и одиннадцатиклассник рассказал о том, что с помощью специальной насадки на дрель в стене возможно просверлить квадратное отверстие, и что эта технология основывается на необычной геометрической фигуре – «круглом треугольнике». Я решил разузнать про эту геометрическую фигуру и нашел немало информации.



Итак, цель моей работы: изучить основные свойства треугольника Рело, историю его изобретения, рассмотреть свойства и области применения, выявить задачи, связанные с треугольником Рело.

Для достижения своей цели я выдвинул следующие **задачи:**

- 1) познакомиться с историей изобретения необычного треугольника;
- 2) рассмотреть и изучить свойства треугольника Рело;
- 3) выяснить области его применения;

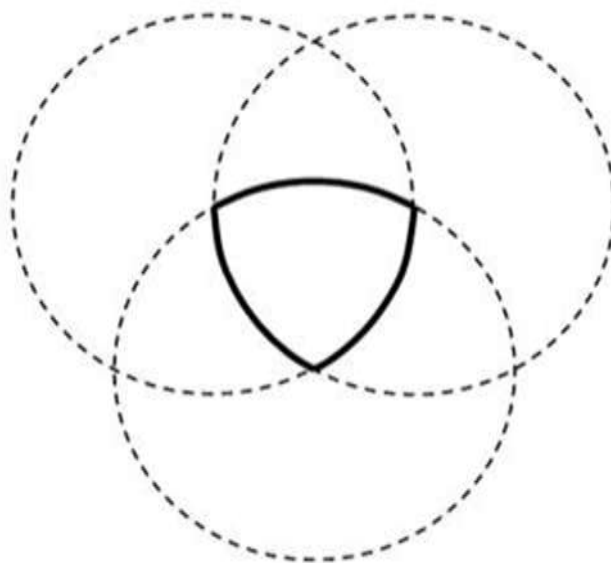
Немного теории

Треугольник Рело или «*круглый треугольник*» - плоская выпуклая геометрическая фигура, простейшая после круга фигура постоянной ширины. Представляет собой область пересечения трёх равных кругов, центры которых расположены в вершинах правильного треугольника, а радиусы равны его стороне. Негладкая замкнутая кривая, ограничивающая эту фигуру, также называется треугольником Рело.

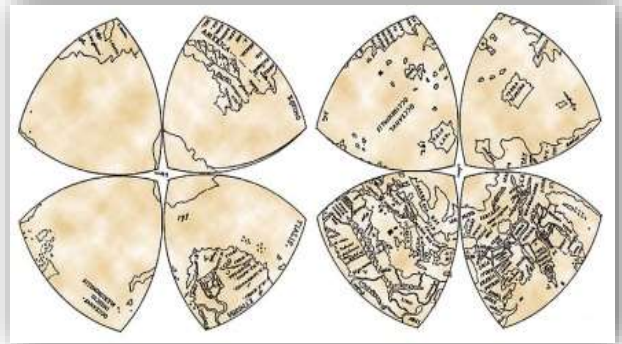
Если к треугольнику Рело провести пару параллельных опорных прямых, то независимо от выбранного направления расстояние между ними будет постоянным. Это расстояние называется шириной. Поскольку одна из прямых всегда проходит через вершину треугольника, а другая касается противоположной дуги, то ширина треугольника равна радиусу образующих его кругов.

Название фигуры происходит от фамилии немецкого механика Франца Рело. Он первым продемонстрировал постоянство ширины этого треугольника, а также использовал его в своих механизмах.

Среди прочих фигур постоянной ширины треугольник Рело выделяется рядом экстремальных свойств — наименьшей площадью, наименьшим возможным углом при вершине, наименьшей симметричностью относительно центра. Треугольник получил распространение в технике — на его основе были созданы кулачковые и грейферные механизмы, роторный двигатель Ванкеля и даже дрели, позволяющие сверлить квадратные отверстия.



Историческая справка



Рело не является первооткрывателем этой фигуры, хотя он и подробно исследовал её. В частности, он рассматривал вопрос о том, сколько контактов (в кинематических парах) необходимо, чтобы предотвратить движение плоской фигуры, и на примере искривлённого треугольника, вписанного в квадрат, показал, что даже трёх контактов может быть недостаточно для того, чтобы фигура не вращалась.

Некоторые математики считают, что первым продемонстрировал идею треугольника из равных дуг окружности Леонард Эйлер в XVIII веке. Тем не менее, подобная фигура встречается и раньше, в XV веке: её использовал в своих рукописях Леонардо да Винчи. Треугольник Рело есть в его манускриптах А и В, хранящихся в Институте Франции, а также в Мадридском кодексе.

Примерно в 1514 году Леонардо да Винчи создал одну из первых в своём роде карт мира. Поверхность земного шара на ней была разделена экватором и двумя меридианами на восемь сферических треугольников, которые были показаны на плоскости карты треугольниками Рело, собранными по четыре вокруг полюсов.

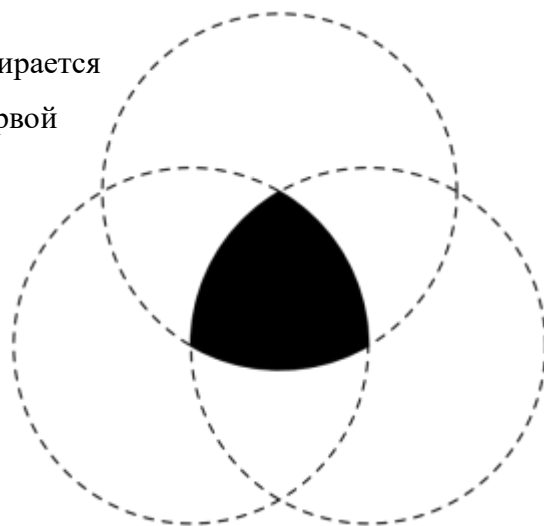
Свойства треугольника Рело

1) Симметрия

Треугольник Рело обладает осевой симметрией. Он имеет три оси симметрии второго порядка, каждая из которых проходит через вершину треугольника и середину противоположной дуги, а также одну ось симметрии третьего порядка, перпендикулярную плоскости треугольника и проходящую через его центр. Таким образом, группа симметрий треугольника Рело состоит из шести отображений (включая тождественное) и совпадает с группой D_3 симметрий правильного треугольника.

2) Построение циркулем

Треугольник Рело можно построить с помощью одного только циркуля, не прибегая к линейке. Это построение сводится к последовательному проведению трёх равных окружностей. Центр первой выбирается произвольно, центром второй может быть любая точка первой окружности, а центром третьей — любая из двух точек пересечения первых двух окружностей.



3) Наименьшая площадь

Среди всех фигур постоянной ширины a у треугольника Рело наименьшая площадь. Это утверждение носит название теоремы Бляшке — Лебега (по фамилиям немецкого геометра Вильгельма Бляшке, опубликовавшего теорему в 1915 году, и французского математика Анри Лебега, который сформулировал её в 1914 году). В разное время варианты её доказательства предлагали Мацусабуро Фудзивара (1927 и 1931 год), Антон Майер (1935 год), Гарольд Эгглстон (1952 год), Абрам Безикович (1963 год), Дональд Чакериан (1966 год), Эванс Харрелл (2002 год) и другие математики.

4) Наименьший угол

Через каждую вершину треугольника Рело, в отличие от остальных его граничных точек, проходит не одна опорная прямая, а бесконечное множество опорных прямых. Пересекаясь в вершине, они образуют «пучок». Угол между крайними прямыми этого «пучка» называется углом при вершине. Для фигур постоянной ширины угол при

вершинах не может быть меньше 120° . Единственная фигура постоянной ширины, имеющая углы, равные в точности 120° — это треугольник Рело.

5) Наименьшая центральная симметрия

Из всех фигур постоянной ширины треугольник Рело обладает центральной симметрией в наименьшей степени.

6) Качение по квадрату

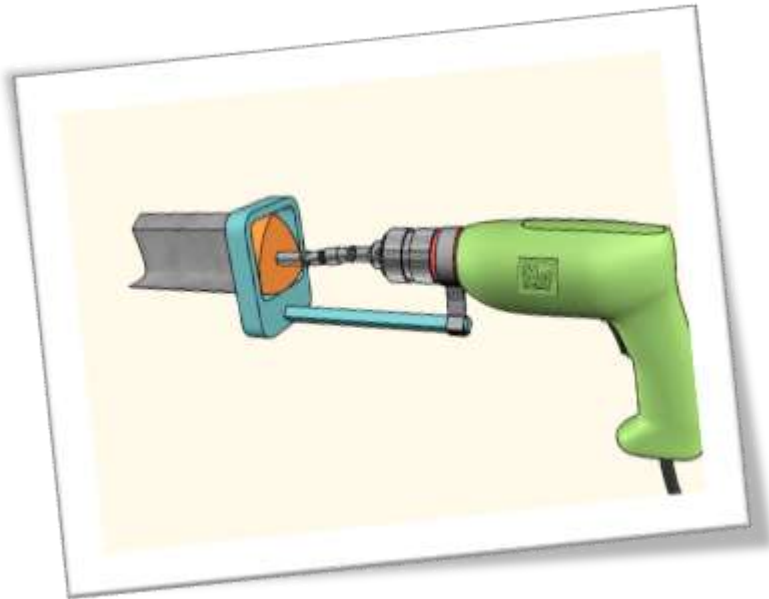
Любая фигура постоянной ширины вписана в квадрат со стороной, равной ширине фигуры, причём направление сторон квадрата может быть выбрано произвольно. Треугольник Рело — не исключение, он вписан в квадрат и может вращаться в нём, постоянно касаясь всех четырёх сторон.

Каждая вершина треугольника при его вращении «проходит» почти весь периметр квадрата, отклоняясь от этой траектории лишь в углах — там вершина описывает дугу эллипса.

Применение треугольника Рело

1) Сверление квадратных отверстий

Сверло с сечением в виде треугольника Рело и режущими кромками, совпадающими с его вершинами, позволяет получать почти квадратные отверстия. Отличие таких отверстий от квадрата состоит лишь в немного скруглённых углах. Другая особенность подобного сверла заключается в том, что его центр при вращении не остаётся на месте, как это происходит в случае традиционных спиральных свёрл, а описывает кривую, состоящую из четырёх дуг эллипсов. Поэтому патрон, в котором зажато сверло, не должен препятствовать этому движению.

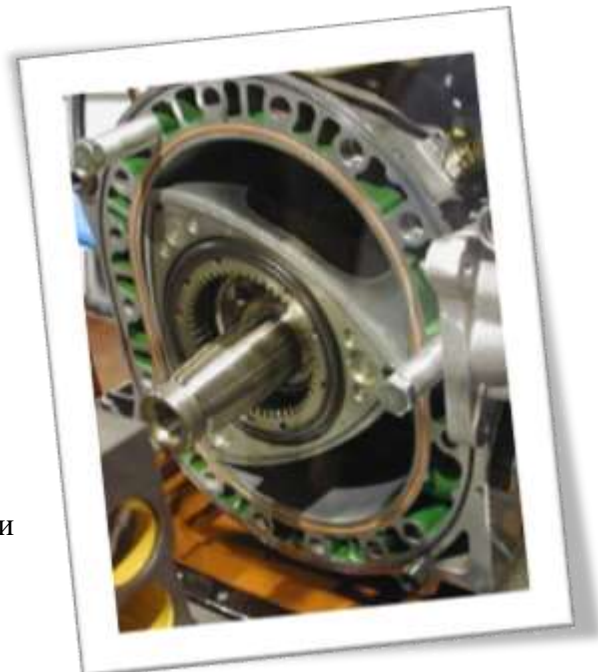


состоящую из четырёх дуг эллипсов.

Впервые сделать подобную конструкцию удалось Гарри Уаттсу, английскому инженеру, работавшему в США. Для сверления он использовал направляющий шаблон с квадратной прорезью, в котором двигалось сверло, вставленное в «плавающий патрон». Патенты на патрон и сверло были получены Уаттсом в 1917 году. Продажу новых дрелей осуществляла фирма Watts Brothers Tool Works. Ещё один патент США на похожее изобретение был выдан в 1978 году.

2) Двигатель Ванкеля

Другой пример использования можно найти в двигателе Ванкеля: ротор этого двигателя выполнен в виде треугольника Рело. Он вращается внутри камеры, поверхность которой выполнена по эпитрохоиде. Вал ротора жёстко соединён с зубчатым колесом, которое сцеплено с неподвижной шестернёй. Такой трёхгранный ротор обкатывается вокруг шестерни, всё время касаясь вершинами внутренних стенок двигателя и образуя три области переменного объёма, каждая из которых по



очереди является камерой сгорания. Благодаря этому двигатель выполняет три полных рабочих цикла за один оборот.

Двигатель Ванкеля позволяет осуществить любой четырёхтактный термодинамический цикл без применения механизма газораспределения. Смесеобразование, зажигание, смазка, охлаждение и пуск в нём принципиально такие же, как у обычных поршневых двигателей внутреннего сгорания.



Впервые на серийных автомобилях этот двигатель стала устанавливать компания Mazda. Он установлен на моделях Mazda RX-7 и Mazda RX-8.

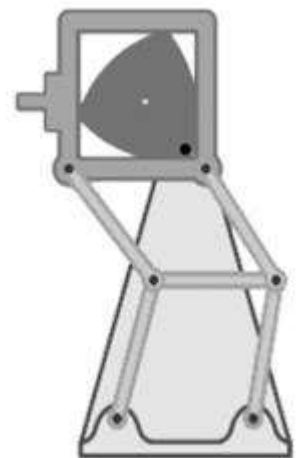
3)Грейферный механизм

Ещё одно применение треугольника Рело в механике — это грейферный механизм, осуществляющий покадровое перемещение плёнки в кинопроекторах. Грейфер проектора «Луч-2», например, основан на треугольнике Рело, который вписан в рамку-квадрат и закреплён на двойном параллелограмме. Вращаясь вокруг вала-привода, треугольник двигает рамку с расположенным на ней зубом. Зуб входит в перфорацию киноплёнки, протаскивает её на один кадр вниз и выходит обратно, поднимаясь затем к началу цикла. Его траектория тем ближе к квадрату, чем ближе к вершине треугольника закреплён вал.

Существует и другая конструкция грейфера, также основанная на треугольнике Рело. Как и в первом случае, рамка этого грейфера совершает возвратно-поступательное движение, однако её двигает не один, а два кулачка, работа которых синхронизирована с помощью зубчатой передачи.

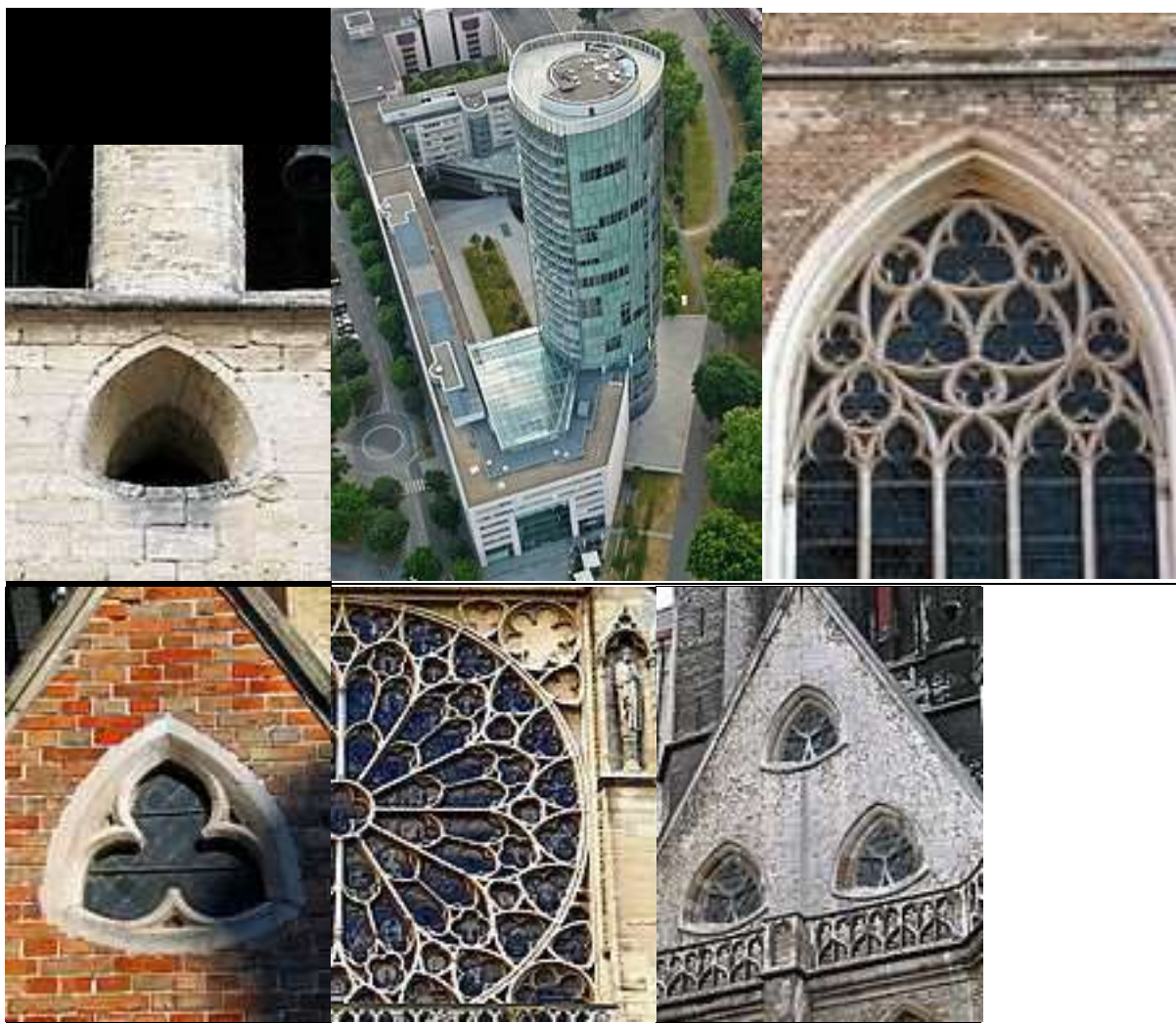
4)Применение треугольника Рело в архитектуре

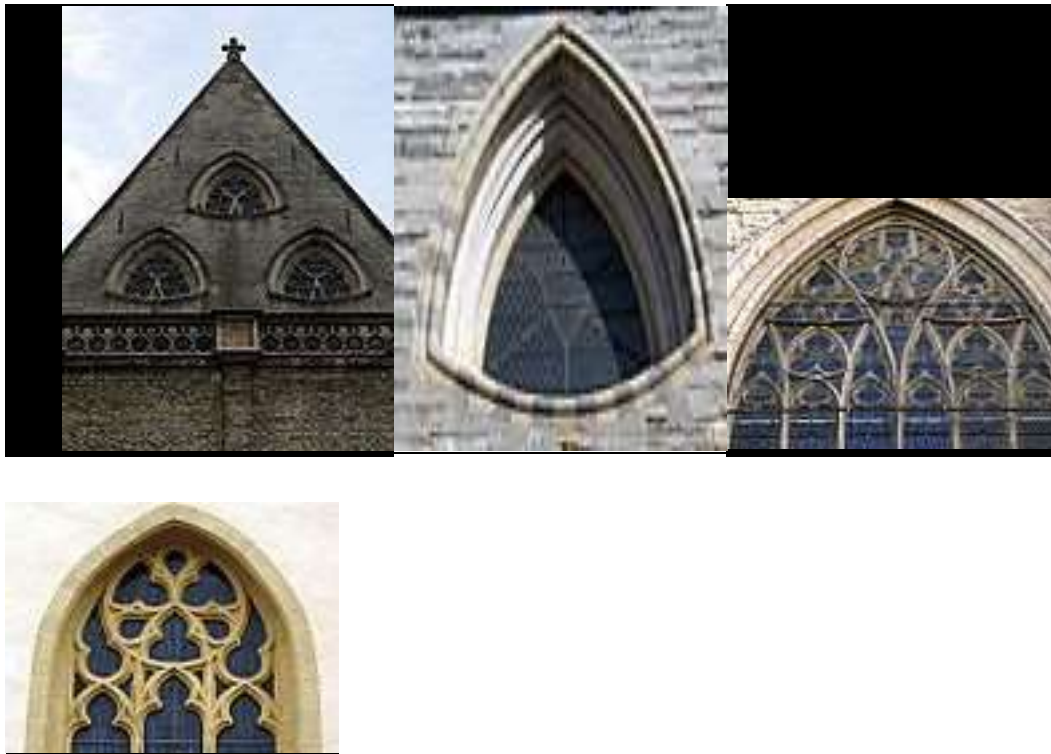
Форма треугольника Рело используется также и в архитектурных целях. Конструкция из двух его дуг образует характерную для готического стиля стрельчатую арку, однако целиком он встречается в готических постройках достаточно редко. Окна в



форме треугольника Рело можно видеть в церкви Богоматери в Брюгге ,а также в шотландской церкви в Аделаиде. Как элемент орнамента он встречается на оконных решетках цистерцианского аббатства в швейцарской коммуне Гаутериф (Фрибург).

Треугольник Рело используют и в архитектуре, которая не относится к готическому стилю. Например, построенная в 2006 году в Кельне 103-метровая башня под названием "Кельнский треугольник" (нем. *Kölner Triangle*) В сечении имеет именно форма этой фигуры.





5)Треугольник Рело в литературе.

В научно-фантастическом рассказе Пола Андерсона «Треугольное колесо» экипаж землян совершил аварийную посадку на планете, население которой не использовало колёса, так как всё круглое находилось под религиозным запретом. В сотнях километров от места посадки предыдущая земная экспедиция оставила склад с запасными частями, но перенести оттуда необходимый для корабля двухтонный атомный генератор без каких-либо механизмов было невозможно. В итоге землянам удалось соблюсти табу и перевезти генератор, используя катки с сечением в виде треугольника Рело.

6)Предметы быта, имеющие форму треугольника Рело

Несмотря на геометрическое совершенство фигуры, создание объектов на ее основе – процедура не простая и не дешевая. Окно подобной формы может быть выполнено только по индивидуальному заказу. Проектирование стены с необычным проемом – это тоже дорогостоящее мероприятие.

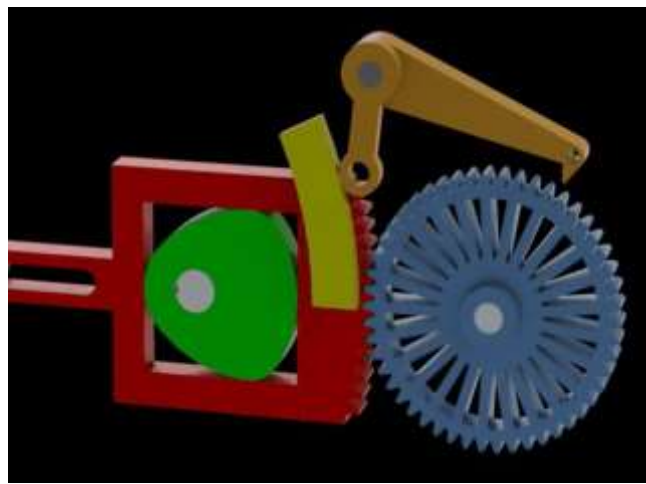
Намного проще дело обстоит с предметами внутреннего убранства, их можно изготовить самостоятельно или приобрести в мебельных, строительных магазинах и гипермаркетах. Чаще всего встречаются табуретки, столики и стулья.

В форме треугольника Рело можно изготавливать крышки для люков — благодаря постоянной ширине они не могут провалиться в люк. В Сан-Франциско подобные крышки используются для системы рекуперированной воды.

Можно встретить и другие предметы быта: украшения, игрушки, монеты некоторых стран, медиатор для струн, даже некоторые виды «Кубик Рубика» имеют форму данной на вид простой, но интересной фигуры(см фото).

В Пензенской области широко развита торговая сеть магазинов «Скидкино». Обращает на себя внимание эмблема этой фирмы- она имеет форму небезызвестной и изученной мной фигуры.

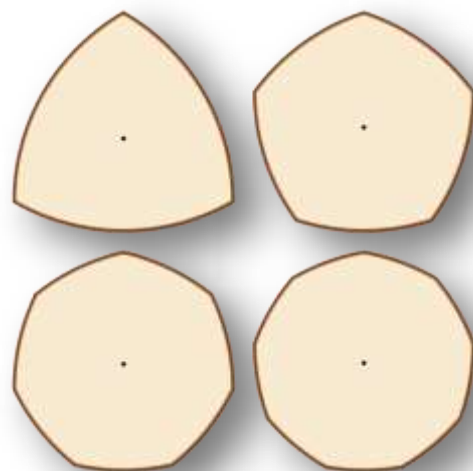




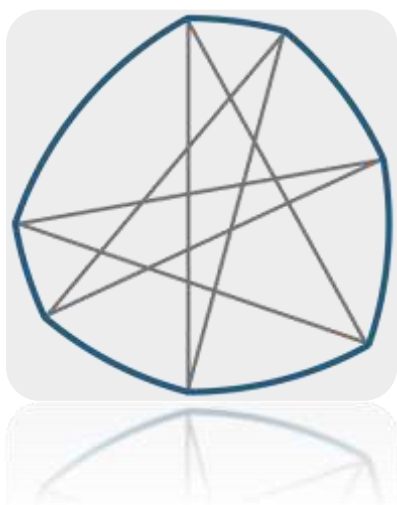


Обобщения и аналоги треугольника Рело

Лежащую в основе треугольника Рело идею построения можно обобщить, используя для создания кривой постоянной ширины не равносторонний треугольник, а звёздчатый многоугольник, образованный отрезками прямых равной длины. Если из каждой вершины звёздчатого многоугольника провести дугу окружности, которая соединит две смежные ей вершины, то полученная замкнутая кривая постоянной ширины будет состоять из конечного числа дуг одного и того же радиуса. Такие кривые (а также ограничиваемые ими фигуры) называются многоугольниками Рело.



Среди многоугольников Рело выделяют класс кривых, построенных на основе



правильных звёздчатых многоугольников. Этот класс носит название правильных многоугольников Рело. Все дуги, из которых составлен подобный многоугольник, имеют не только одинаковый радиус, но и одинаковую длину. Треугольник Рело, например, является правильным. Среди всех многоугольников Рело с фиксированным числом сторон и одинаковой шириной правильные многоугольники ограничивают наибольшую площадь.

Форма таких многоугольников используется в монетном деле: монеты ряда стран (в частности, 20 и 50 пенсов Великобритании) выполнены в виде правильного семиугольника Рело.

Существует изготовленный китайским офицером велосипед, колёса которого имеют форму правильных треугольника и пятиугольника Рело.



Мои исследования по данной теме

Изучив достаточно большой материал о «круглом треугольнике», я провел свои исследования и опыты.

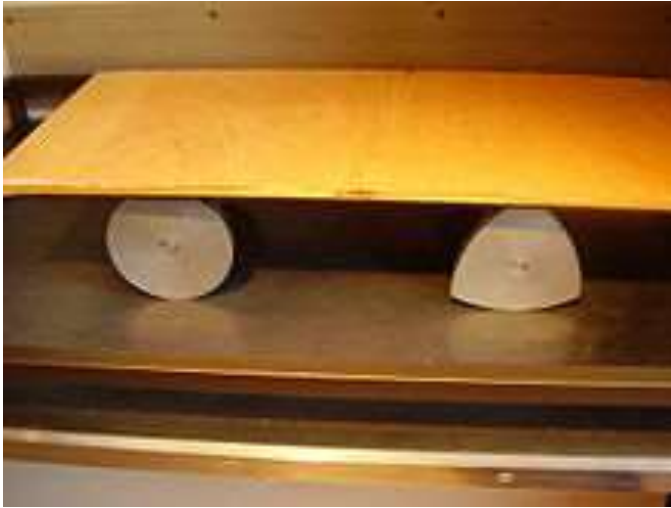
Во-первых, я научился строить и конструировать треугольник Рело с помощью циркуля и линейки.

Во-вторых, я убедился, что:

- 1) треугольник Рело можно вращать между двух параллельных прямых, расположенных на фиксированном расстоянии друг от друга, и он будет постоянно касаться их обеих;
- 2) если добавить ещё одну пару параллельных прямых, касающихся треугольника Рело и образующих с уже имеющимися прямой угол, то получится квадрат. Если вращать треугольник Рело специальным образом, то он будет постоянно находиться внутри квадрата и в любой момент касаться всех его сторон. Это свойство – качество по квадрату.
- 3) Треугольник Рело – также как и круг - кривая постоянной ширины. Данные утверждения проверены опытным путем, вращением трех геометрических фигур между двумя опорными прямыми.
- 4) Среди всех фигур постоянной ширины у треугольника Рело наименьшая площадь. Чтобы найти площадь треугольника Рело, можно сложить площадь внутреннего равностороннего треугольника и площадь трёх оставшихся одинаковых круговых сегментов, опирающихся на угол в 60° . Площадь может быть вычислена по формуле, которая выведена аналитическим методом и методом разрезания и сложения площадей $S = S_{\Delta} + 3 S_{\text{сегм}}$.
- 5) Периметр треугольника Рело совпадает с периметром круга. Это утверждение доказано опытным путем. в математике оно носит название теоремы Барбье.
- 6) Треугольник Рело обладает осевой и центральной симметриями.

В-третьих, я решил смастерить повозку с треугольными колёсами.

Угловатые колёса неизбежно должны создавать при качении тряску. Но оказалось, что у неё достаточно плавный ход. Чтобы убедиться, что тряски нет, я поставил, как учат автомобилистские традиции, на тележку стакан с водой. При движении тележки вода не расплескалась. Теория об отсутствии качки при движении повозки с треугольными колёсами подтвердилась. Такую повозку можно использовать для перемещения тяжелых предметов на небольшие расстояния.



(В-четвертых, изучив данную тему, я увидел перспективу в использовании треугольника Рело для изготовления ручки для мотоцикла, так как, на мой взгляд, такая форма улучшит хват руки.

Заключение

Таким образом, изобретенный в прошлом веке треугольник Рело широко используется сегодня. Однако его изучение не стоит на месте. Его свойства как характеристики фигуры постоянной ширины находятся в постоянном теоретическом и практическом изучении. И это правильно, ведь чем лучше будут изучены свойства треугольника Рело и остальных фигур постоянной ширины, тем больше возможностей будет открываться для их использования в нашей жизни.

Итак, в ходе выполнения этой работы я изучил свойства треугольника Рело, затронул историю открытия, рассмотрел области применения. Однако, данный проект является лишь каплей в море в изучении данной темы, ведь столько интересного осталось за его рамками.

Список использованной литературы

1. Интернет-ресурс <http://aurahome.ru>
2. Интернет-ресурс <http://funnymath.ru>
3. Бронштейн, И. Н., Семендяев, К. А., Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – М.: Просвещение, 1962
4. Дорофеев, Г. В., Шарыгин, И. Ф., Суворова, С. Б. Математика. – М.: Просвещение, 1987.
5. Кушнир. И. А., Треугольник в задачах. – Киев, Лебедь, 1994.
6. Г. Радемахер, О. Теплиц. Числа и фигуры. М.: Физматгиз, 1962.