РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОГО ФЕСТИВАЛЯ ТВОРЧЕСКИХ ОТКРЫТИЙ И ИНИЦИАТИВ «ЛЕОНАРДО»

Секция: Математика

# Признаки делимости (первая сотня и 101, 125)


Автор работы:
ученик 6 класса
МБОУ СОШ № 18 г. Пензы
Кузнецов Артем Дмитриевич

Место выполнения работы:
МБОУ СОШ № 18 г. Пензы

Научный руководитель:
Жистина Л.Ф.


г. Пенза, 2020

**Оглавление**

**Введение**

Признаки делимости на 2, 3 и 5 были известны с давних времен. Так, например, признак делимости на 2 знали древние египтяне за две тысячи до нашей эры, а признак делимости на 9 был известен грекам в третьем столетии до нашей эры. Впервые признаки делимости на 2, 3 и 5 были обстоятельно изложены итальянским математиком Леонардо Фибоначчи (ок. 1179 – после 1228). Выдающийся французский математик и физик Блез Паскаль (1623 – 1662) еще в раннем возрасте вывел общий признак делимости чисел, из которого следуют все частные признаки. Признак Паскаля состоит в следующем: натуральное число разделится на другое натуральное число b только в том случае, если сумма произведений цифр числа a на соответствующие остатки, получаемые при делении разрядных единиц на число b, делится на это число.

На уроках математики при изучении темы «Признаки делимости», где мы познакомились с признаками делимости на 2; 5; 3; 9; 10, меня заинтересовало, а есть ли признаки делимости на другие числа, и существует ли универсальный метод делимости на любое натуральное число. Поэтому я занялся исследовательской работой на данную тему.

**Цель исследования:** изучение признаков делимости натуральных чисел до 100, дополнение уже известных признаков делимости натуральных чисел нацело, изучаемых в школе.

Для достижения цели были поставлены **задачи:**

1. Собрать, изучить и систематизировать материал о признаках делимости натуральных чисел, воспользовавшись различными источниками информации.
2. Найти универсальный признак делимости на любое натуральное число.
3. Научиться пользоваться признаком делимости Паскаля для определения делимости чисел, а также попытаться сформулировать признаки делимости на любое натуральное число.

**Объект исследования:** делимость натуральных чисел.

**Предмет исследования:** признаки делимости натуральных чисел.

**Методы исследования:** сбор информации; работа с печатными материалами; анализ; синтез; аналогия; опрос; анкетирование; систематизация и обобщение материала.

**Гипотеза исследования:** Если можно определить делимость натуральных чисел на 2, 3, 5, 9, 10, то должны быть признаки, по которым можно определить делимость натуральных чисел на другие числа.

**Новизна** проведённой исследовательской работы заключается в том, что данная работа систематизирует знания о признаках делимости и универсальном методе делимости натуральных чисел.

**Практическая значимость**: материал данной исследовательской работы можно использовать в 6 - 8 классах на факультативных занятиях при изучении темы «Делимость чисел».

## Глава I. Определение и свойства делимости чисел

### 1.1.Определения понятий делимости и признаков делимости, свойства делимости.

Теория чисел - раздел математики, в котором изучаются свойства чисел. Основной объект теории чисел - натуральные числа. Главное их свойство, которое рассматривает теория чисел, это делимость.

**Определение:** Целое число a делится на целое число b, не равное нулю, если существует такое целое число k, что a = bk (например, 56 делится на 8, т.к. 56 = 8x7).

**Признак делимости** — правило, позволяющее установить, делится ли данное натуральное число на некоторые другие числа нацело, т.е. без остатка.

**Свойства делимости:**

1. Всякое число a, отличное от нуля, делится само на себя.
2. Нуль делится на любое b, не равное нулю.
3. Если a делится на b (b Ф 0) и b делится на c (c Ф 0), то a делится на c.
4. Если a делится на b (b Ф 0) и b делится на a (a Ф 0), то числа a и b либо равны,
либо являются противоположными числами.

### 1.2. Свойства делимости суммы и произведения:

1) Если в сумме целых чисел каждое слагаемое делится на некоторое число, то сумма делится на это число.

2) Если в разности целых чисел уменьшаемое и вычитаемое делится на некоторое число, то и разность делится на некоторое число.

3) Если в сумме целых чисел все слагаемые, кроме одного делятся, на некоторое число, то сумма не делится на это число.

4) Если в произведении целых чисел один из множителей делится на некоторое
число, то и произведение делится на это число.

5) Если в произведении целых чисел один из множителей делится на m, а другой на n, то произведение делится на mn.

Кроме этого, изучая признаки делимости чисел, я познакомился с понятием **«цифровой корень числа»**. Возьмём натуральное число. Найдём сумму его цифр. У результата также найдём сумму цифр, и так до тех пор, пока не получится однозначное число. Полученный результат называется цифровым корнем числа. К примеру, цифровой корень числа 654321 равен 3: 6+5+4+3+2+1=21,2+1=3. А теперь можно задуматься над вопросом: «А какие существуют признаки делимости и есть ли универсальный признак делимости одного числа на другое?»

## Глава II. Признаки делимости натуральных чисел.

### 2.1. Признаки делимости на 2,3,5,9,10.

Среди признаков делимости самые удобные и известные из школьного курса математики 6 класса:

- ***Делимость на 2.*** Если запись натурального числа оканчивается чётной цифрой или нулём, то число делится на 2.Число 52738 делится на 2, так как последняя цифра 8- четная.
- ***Делимость на 3***. Если сумма цифр числа делится на 3, то и число делится на 3 (число 567 делится на 3, т.к. 5+6+7 = 18, а 18 делится на 3.)
- ***Делимость на 5.*** Если запись натурального числа оканчивается цифрой 5 или нулём, то число делится на 5 (число 130 и 275 делятся на 5, т.к. последними цифрами чисел являются 0 и 5, но число 302 не делится на 5, т.к. последней цифрой числа не являются 0 и 5).
- ***Делимость на 9.*** Если сумма цифр делится на 9, то и число делится на 9 (676332 делится на 9 т.к. 6+7+6+3+3+2=27, а 27 делится на 9).
- ***Делимость на 10***. Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0, то это число делится на 10 (230 делится на 10, т.к. последняя цифра числа 0).

### 2.2. Признаки делимости на 4,6,8,11,12,13 и т.д.

Поработав с различными источниками, я узнал другие признаки делимости. Опишу некоторые из них.

**Деление на 6**. Нужно проверить делимость интересующего нас числа на 2 и на 3.

***Признак 1***: число делится на 6 в том и только в том случае, если оно чётное, а его цифровой корень делится на 3.

Например,678 делится на 6, так как оно четное и 6+7+8=21, 2+1=3).

***Признак 2***: число делится на 6 тогда и только тогда, когда учетверённое число десятков, сложенное с числом единиц делится на 6. (73,7*4+3=31,31 не делится на 6, значит и 7 не делится на 6).

**Деление на 8.**

***Признак 1***: число делится на 8 в том и только в том случае, если его последние три цифры образуют число, делящееся на 8. (12 224 делится на 8 т.к. 224:8=28).

***Признак 2***: трёхзначное число делится на 8 тогда и только тогда, когда число единиц, сложенное с удвоенным числом десятков и учетверённым числом сотен, делится на 8. Например, 952 делится на 8 так как на 8 делится 9*4 + 5 *2 + 2 = 48.

**Деление на 4 и на 25**. Если две последние цифры нули или выражают число, делящееся на 4 или (и) на 25, то число делится на 4 или (и) на 25 (число 1500 делится на 4 и 25, т. к. оно оканчивается двумя нулями, число 348 делится на 4, поскольку 48 делится на 4, но это число не делится на 25, т.к. 48 не делится на 25, число 675 делится на 25, т.к. 75 делится на 25, но не делится на 4, т.к. 75 не делится на 4).

Зная основные признаки делимости на простые числа, можно вывести признаки делимости на составные числа:

**Признак делимости на 11.**

***Признак 1***: Если разность между суммой цифр, стоящих на чётных местах и суммой цифр, стоящих на нечётных местах делится на 11, то и число делится на 11 (число 593868 делится на 11, т.к. 9 + 8 + 8 = 25, а 5 + 3 + 6 = 14, их разность равна 11, а 11 делится на 11).

***Признак 2***: число делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится сумма чисел, образующих группы по две цифры (начиная с единиц). Число 279609 делится на 11, так как 27+96+109 = 132, 01 + 32 = 33 делится на 11.

**Признак делимости на 12:** число делится на 12 тогда и только тогда, когда две последние цифры делятся на 4 и сумма цифр делится на 3. т.к. 12= 4 • 3, т.е. число должно делиться на 4 и на 3. Или: число делится на 12, когда разность удвоенного числа десятков и числа единиц делится на 12. Число 504 делится на 12, так как 50*2 – 4 = 96.

**Признак делимости на 13.**

***Признак 1***: число делится на 13 тогда и только тогда, когда на 13 делится знакопеременная сумма чисел, образованных последовательными тройками цифр данного числа. Как узнать, например, что число 354862625 делится на 13? 625-862+354=117 делится на 13, 117:13=9, значит, и число 354862625 делится на 13.

***Признак 2***: число делится на 13 тогда: когда сумма числа десятков с учетверенным числом единиц делится на 13. Пример: число 338 делится на 13, так как 33 + 8*4 = 33 + 32 = 65 делится на 13.

***Признак 3***: число делится на 13 тогда: когда разность числа десятков с девятикратным числом единиц делится на 13. Пример: число 4576 делится на 13, так как 457 – 9*6 = 467 – 54 = 403, 40 – 3*9= 40 – 27 = 13 делится на 13.

**Признак делимости на 14:** число делится на 14 тогда и только тогда, когда оно заканчивается на чётную цифру и когда результат вычитания удвоенной последней цифры из этого числа без последней цифры делится на 7.

14= 2 • 7, т.е. число должно делиться на 2 и на 7.

**Признак делимости на 15:** число делится на 15 тогда и только тогда, когда оно заканчивается на 5 и на 0 и сумма цифр делится на 3. т.к. 15= 3 • 5, т.е. число должно делиться на 3 и на 5.

**Признак делимости на 17.**

***Признак 1***: число делится на 17 тогда: когда модуль разности числа десятков и пятикратного числа единиц делится на 17. Пример: число 646 делится на 17, так как |64 – 5*6| = |64 – 30| = 34 делится на 17.

***Признак 2:*** число делится на 17 тогда: когда модуль суммы числа десятков и числа двенадцать умноженной на кол-во единиц делится на 17. Пример: число 918 делится на 17, так как |91 + 12*8| = |91 + 96| = 187, |18 + 12*7| =|18 + 84| = 102, |10 + 12*2| = 34 делится на 17.

**Признак делимости на 18:** число делится на 18, если оно одновременно делится на 2 и на 9. Пример: число 414 делится на 18,так как последняя цифра 4 четная и сумма цифр 4 + 1 + 4 = 9 делится на 9.

**Признак делимости на 19:** число делится на 19 тогда и только тогда, когда число десятков, сложенное с удвоенным числом единиц, делится на 19. Пример: число 4864 делится на 19, так как 486 + 2*4= 486 + 8 =494, 49 + 4*2 =49 + 8 = 57 делится на 19.

**Признак делимости на 20:** число делится на 20 тогда и только тогда, когда число заканчивается на 0 и предпоследняя цифра четная.

**Признак делимости на 23.**

***Признак 1:*** число делится на 23 тогда и только тогда, когда число сотен, сложенное с утроенным числом, образованным двумя последними цифрами, делится на 23. Пример: число 5819 делится на 23, так как 58 + 19*3 = 58 + 57 = 115, 1 + 15*3 = 1 + 45 = 46 делится на 23.

***Признак 2:*** число делится на 23 тогда и только тогда, когда число десятков, сложенное с семикратным числом единиц, делится на 23. Пример: число 17043 делится на 23, так как 1704 + 7*3 = 1725, 172 + 5*7 = 172 + 35 = 207, 20 + 7*7 = 20 + 49 = 69 делится на 23.

***Признак 3:*** число делится на 23 тогда и только тогда, когда число сотен, сложенное с семикратным числом десятков и утроенным числом единиц, делится на 23.

Пример: число 5313 делится на 23, так как 53 + 7*1 + 3*3 =53 + 7 + 9 = 69 - делится на 23.

**Признак делимости на 25:** число, содержащее не менее трех цифр, делится на 25 тогда и только тогда, когда делится на 25 число, образованное двумя последними цифрами.

**Признак делимости на 27:** число делится на 27 тогда и только тогда, когда на 27 делится сумма чисел, образующих группы по три цифры (начиная с единиц).

**Признак делимости на 29:** число делится на 29 тогда и только тогда, когда число десятков, сложенное с утроенным числом единиц, делится на 29

Пример: число 9483 делится на 29, так как 948 + 3*3 = 948 + 9 = 957,  95 + 7*3 = 116, 11 + 3*6 =  11 + 18 = 29.

**Признак делимости на 30***:* число делится на 30 тогда и только тогда, когда оно заканчивается на 0, и сумма всех цифр делится на 3.

**Признак делимости на 37.**

***Признак 1:*** число делится на 37 тогда и только тогда, когда при разбивании числа на группы по три цифры (начиная с единиц) сумма этих групп кратна 37.

***Признак 2:*** число делится на 37 тогда и только тогда, когда на 37 делится модуль утроенного числа сотен, сложенного с учетверённым числом десятков, за вычетом числа единиц, умноженного на семь. Пример:число 851 делится на 37, так как делится |3*8 + 4*5 – 1*7| = |24 + 20 – 7| = |44 – 7| = 37  делится на 37.

***Признак 3:***  число делится на 37 тогда и только тогда, когда на 37 делится модуль суммы числа сотен с числом единиц, умноженного на десять, за вычетом числа десятков, умноженного на 11. Пример: число 592 делится на 37, так как  |5 – 11*9 + 10*2| = |5 – 99 + 20| = |- 74| = 74 делится на 37.

**Признак делимости на 41.**

***Признак 1:*** число делится на 41 тогда и только тогда, когда модуль разности числа десятков и четырёхкратного числа единиц делится на 41.

Пример: число 533 делится на 41, так как |53 – 4*3| = |53 – 12| = 41.

***Признак 2:*** чтобы проверить, делится ли число на 41, его следует справа налево разбить на грани по 5 цифр в каждой. Затем в каждой грани первую справа цифру умножить на 1, вторую цифру умножить на 10, третью — на 18, четвёртую — на 16, пятую — на 37 и все полученные произведения сложить. Если результат будет делиться на 41, тогда и только тогда само число будет делиться на 41.

**Признак делимости на 59:** число делится на 59 тогда и только тогда, когда число десятков, сложенное с числом единиц, умноженное на 6, делится на 59.

Например, 767 делится на 59, так как на 59 делятся 76 + 6*7 = 118 и 11 + 6*8 = 59.

**Признак делимости на 79:** число делится на 79 тогда и только тогда, когда число
десятков, сложенное с числом единиц, умноженное на 8, делится на 79. Например, 711 делится на 79, так как на 79 делятся 71 + 8*1 = 79.

**Признак делимости на 99:** число делится на 99 тогда и только тогда, когда на 99 делится сумма чисел, образующих группы по две цифры (начиная с единиц). Например, 12573 делится на 99, так как на 99 делится 1 + 25 + 73 = 99.

**Признак делимости на 100:** на 100 делятся только те числа, у которых две последние цифры нули.

**Признак делимости на 101:** число делится на 101 тогда и только тогда, когда модуль алгебраической суммы чисел, образующих нечётные группы по две цифры (начиная с единиц), взятых со знаком «+», и чётных со знаком «-» делится на 101. Пример: число 494092делится на 101, так как |49 – 40 + 92| = 101. Число 29694 делится на 101, так как |2 – 96 + 94| = 0.

**Признак делимости на 125:** число, содержащее не менее четырех цифр, делится
на 125 тогда и только тогда, когда делится на 125 число, образованное тремя последними цифрами.

Все выше перечисленные признаки обобщены в виде таблицы. (Приложение 1)

**2.3 Признаки делимости на 7.**

1) Возьмем для испытания число 5236. Запишем это число следующим образом: $5236=5*1000+2*100+3*10+6=10^3*5+10^2*2+10*3+6$ («систематическая» форма записи числа), и всюду основание 10 заменим основанием 3); $3^3*5+3^2*2+3*3+6=168$.Если получившееся число делится (не делится) на 7, то и данное число делится (не делится) на 7. Так как 168 делится на 7, то и 5236 делится на 7. 68:7=24, 5236:7=748.

2) В этом признаке надо действовать точно так же, как и в предыдущем, с той лишь разницей, что умножение следует начинать с крайней правой и умножать не на 3, а на 5. (5236 делится на 7, так как $6*5^3+3*5^2+2*5+5=840$, 840:7=120)

3) Этот признак менее легок для осуществления в уме, но тоже очень интересен. Удвойте последнюю цифру и вычтите вторую справа, удвойте результат и прибавьте третью справа и т. д., чередуя вычитание и сложение и уменьшая каждый результат, где возможно, на 7 или на число, кратное семи. Если окончательный результат делится (не делится) на 7, то и испытуемое число делится (не делится) на 7.

((6*2-3) *2+2) *2-5=35, 35:7=5.

4) Число делится на 7 тогда и только тогда, когда на 7 делится знакопеременная сумма чисел, образованных последовательными тройками цифр данного числа. Как узнать, например, что число 363862625 делится на 7? 625-862+363=126 делится на 7,126:7=18, значит, и число 363862625 делится на 7, 363862625:7=51980375.

5) Один из самых старых признаков делимости на 7 состоит в следующем. Цифры числа нужно брать в обратном порядке, справа налево, умножая первую цифру на 1, вторую на 3, третью на 2, четвёртую на -1, пятую на -3, шестую на -2 и т.д. (если число знаков больше 6, последовательность множителей 1, 3, 2, -1,-3,-2 следует повторять столько раз, сколько нужно). Полученные произведения нужно сложить. Исходное число делится на 7, если вычисленная сумма делится на 7. Вот, например, что дает этот признак для числа 5236. 1*6+3*3+2*2+5*(-1) =14. 14: 7=2, значит и число 5236 делится на 7.

5) Число делится на 7 тогда и только тогда, когда утроенное число десятков, сложенное с числом единиц, делится на 7. Например, 154 делится на 7, так как на 7 число 49, которое получаем по этому признаку: 15* 3 + 4 = 49.

**2.4.Признак Паскаля.**

Большой вклад в изучение признаков делимости чисел внес Б. Паскаль (1623-1662), французский математик и физик. Он нашел алгоритм для нахождения признаков делимости любого целого числа на любое другое целое число, который опубликовал в трактате "О характере делимости чисел". Практически все известные ныне признаки делимости являются частным случаем признака Паскаля: **«Если сумма остатков при делении числа** *а* **по разрядам на число** *в* **делится на** в**, то и число** *а* **делится на** *в»*. Знать его полезно даже в наши дни. Как же доказать сформулированные выше признаки делимости (например, знакомый нам признак проводить над этими буквами черту. Таким образом, abcdef будет обозначать число, имеющее f единиц, e десятков, d сотен и т.д.: делимости на 7)? Постараюсь ответить на этот вопрос. Но прежде условимся о способе записи чисел. Чтобы записать число, цифры которого обозначены буквами, условимся abcdef = $a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f$

Теперь докажу сформулированный выше признак делимости на 7. Мы имеем:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^9$ | $10^8$ | $10^7$ | $10^6$ | $10^5$ | $10^4$ | $10^3$ | $10^2$ | 10 | 1 |
| -1 | 2 | 3 | 1 | -2 | -3 | -1 | 2 | 3 | 1 |

(остатки от деления на 7)

В результате, мы получаем сформулированное выше 5-е правило: ***чтобы узнать***

***остаток от деления натурального числа на 7, нужно справа налево подписать под цифрами этого числа коэффициенты (остатки от деления): затем нужно умножить каждую цифру на стоящий под ней коэффициент и полученные произведения сложить; найденная сумма будет иметь тот же остаток от деления на 7, что и взятое число.***

Возьмем для примера числа 4591 и 4907 и, действуя, как указано в правиле, найдем результат:

а) 4 5 9 1

-1 2 3 1

-4+10+27+1 = 38 - 4 = 34: 7 = 4 (остаток 6) (не делится нацело на 7)

б) 4 9 0 7

-1 2 3 1

-4+18+0+7 = 25 - 4 = 21: 7 = 3 (делится нацело на 7)

Этим способом можно найти признак делимости на любое число *m.* Надо только найти, какие коэффициенты (остатки от деления) следует подписывать под цифрами взятого числа А. Для этого нужно каждую степень десяти 10 заменить по возможности имеющим тот же остаток при делении на *m,* что и число 10. При $m = 3$ или $m = 9$ эти коэффициенты получились очень простые: все они равны 1. Поэтому и признак делимости на 3 или на 9 получился очень простой. При $m = 11$ коэффициенты тоже были не сложными: они попеременно равны 1 и - 1. А при $m = 7$ коэффициенты получились сложнее; поэтому и признак делимости на 7 получился более сложный. Рассмотрев признаки деления до 100, я убедился, что самые сложные коэффициенты у натуральных чисел 23 (с $10^{23}$ коэффициенты повторяются), 43 (с $10^{39}$ коэффициенты повторяются).

**Все перечисленные признаки делимости натуральных чисел можно разделить на 4 группы:**

1 группа - когда делимость чисел определяется по последней(им) цифрой (ми)- это признаки делимости на 2, на 5, на разрядную единицу, на 4, на 8, на 25, на 50.

2 группа - когда делимость чисел определяется по сумме цифр числа- это признаки делимости на 3, на 9, на7, на 37, на 11 (1 признак).

3 группа - когда делимость чисел определяется после выполнения каких-то действий над цифрами числа- это признаки делимости на 7, на 11(1 признак), на 13, на 19.

4 группа - когда для определения делимости числа используются другие признаки делимости- это признаки делимости на 6, на 15, на 12, на 14

## Глава 3. Экспериментальная часть

### 3.1. Опрос

Анкетирование проводилось среди обучающихся 6-х, 7-х классов. В опросе приняли участие 145 обучающихся МБОУ СОШ № 18 г. Пензы. Им было предложено ответить на следующие вопросы:

1. Как вы думаете, существуют ли другие признаки делимости отличные от тех, которые изучались на уроке?
2. Есть ли признаки делимости для других натуральных чисел?
3. Хотели бы вы узнать эти признаки делимости?
4. Известны ли вам какие-либо признаки делимости натуральных чисел?

Результаты проведенного опроса показали, что 77% опрошенных считают, что существуют и другие признаки делимости кроме тех, которые изучаются в школе; так не считают - 9%, затруднились ответить - 13% опрашиваемых. На второй вопрос «Хотели бы вы узнать признаки делимости для других натуральных чисел?» утвердительно ответили 33%, дали ответ «Нет» - 17% респондентов и затруднились ответить - 50%. На третий вопрос 100% опрашиваемых ответили утвердительно. На четвертый вопрос положительно ответили 89%, ответили «Нет» - 11% обучающихся, участвовавших в опросе в ходе проведения исследовательской работы.

| | Да | Нет | Не знаю |
|---|---|---|---|
| 1 вопрос | 113 | 12 | 20 |
| 2 вопрос | 48 | 25 | 72 |
| 3 вопрос | 137 | 0 | 8 |
| 4 вопрос | 145 | 0 | 0 |

## 3.2. Задачи

**Задача 1.**

Если из задуманного трехзначного числа вычесть 7, то полученная разность разделится на 7, если вычесть 8, то полученная разность разделится на 8; если вычесть 9, то полученная разность разделится на 9. Какое наименьшее из возможных чисел задумано?

Решение:

Задуманное число делится на 7, 8, 9. Наименьшим числом, делящимся на 7, 8 и 9, есть число 7*8*9 = 504.

Ответ: 504.

**Задача 2.**

В магазин привезли меньше 600, но больше 500 тарелок. Когда стали раскладывать их десятками, то не хватило трех тарелок до полного числа десятков, а когда стали раскладывать по 12 тарелок, то осталось 7 тарелок. Сколько было тарелок?

Решение:

Если не хватило трех тарелок до полного числа десятков, то это значит, что, как и при счете дюжинами, оставалось 7 тарелок. Значит, число тарелок без делится без остатка на 10 и на 12, то есть на 60. Среди чисел, меньших 600 и больших 500, только одно число 540 делится на 60. Значит, тарелок было 540 + 7 = 547.

Ответ: 547 тарелок.

**Задача 3.**

Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 72, в записи которого встречаются все цифры от 1 до 9.

Решение:

Искомое число должно делиться на 72, а значит, на 9 и на 8; 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45, которое делится на 9. Для того, чтобы число делилось на 8, оно должно оканчиваться такими тремя цифрами, которые образуют трехзначное число, делящееся на 8. Учитывая все это, цифры необходимо расставить так, чтобы наименьшие стояли левее. Таким число является 123457968.

Ответ: наименьшее число 123457968.

**Задача 4.**

Маугли попросил своих друзей – обезьян принести ему орехов. Обезьяны набрали поровну орехов и понесли Маугли. Но по дороге поссорились, и каждая обезьяна бросила в каждую по ореху. В результате Маугли достались лишь 35 орехов.

По сколько орехов обезьяны собрали, если известно, что каждая из них принесла больше одного ореха?

Решение:

Так как обезьяны собрали орехов поровну и поровну бросили, то и принесли они поровну. Число 35 делится на 5, поэтому имеем 5*7 = 35.

Возможны два варианта:

1) Обезьян было 5, принесли по 7 орехов, бросили по 4 ореха, значит, каждая собрала 5 + 4 = 11.

2) Обезьян было 7, принесли по 5 орехов, бросили по 6 орехов, значит, каждая собрала 5 + 4 = 11.

**Задача 5.**

Готовясь к занятию кружка, ребята нашли такие 2 натуральных последовательных числа, наименьшие из возможных, что сумма цифр каждого из них делится на 17. Какие числа нашли ребята?

Решение:

Наименьшее число, отличное от нуля, делящееся на 17, есть число 17, следующее за ним 34. Нас это не удовлетворят. Чтобы число было наименьшим, оно должно быть возможно меньшей значимости, а значит, цифры в его записи наибольшими из возможных. Рассмотрим число 8899. Сумма его цифр 8 + 8 + 9 + 9 =34 (делится на 17). Следующее за ним число 8900 имеет сумму цифр 8 + 9 = 17, тоже делится на 17, что удовлетворяет условию.

Ответ: 8899 и 8900.

**Задача 6.**

Сколько всего натуральных чисел, не превышающих 500 и не делящихся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Решение:

Посчитаем количество чисел, делящихся на 2 (500 : 2 = 250). На 3 делится 166 чисел (500 : 3 = 166 (ост. 2)). При этом дважды учтены числа, делящиеся на 2и на 3, то есть на 6. Таких чисел 83 ( 500 : 6 = 83 (ост. 2). Следовательно, чисел, делящихся на 2 и на 3, 250 + 166 – 83 = 333. На 5 делится 100 чисел (500 : 6 = 100). При этом учтены числа, делящиеся на 5 и на 2, то есть на 10. Таких чисел 50 (500 : 10 = 50). Так как они вошли в число чисел, делящихся на 2, то здесь их надо исключить: 100 – 50 = 50. Среди этих чисел учтены в числе тех, которые делятся на 3, здесь их нужно исключить: 50 – 33 = 17. Исключая числа, делящиеся на 2 и на 5, а также на 3 и на 5, дважды исключили числа, делящиеся на 2, на 3 и на 5, то есть на 30. Таких чисел 16. Следовательно, 333 +

17 + 16 = 366, а значит, чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3, ни на 5, будет 500 – 366 = 134.

Ответ: 134 числа.

Но признаки делимости можно применять не только при решении логических задач, но и для развлечений.

**1. Угадай задуманное число.**

Предложи задумать какое-либо трехзначное число и приписать к нему точно такое же число. Получившееся шестизначное число попроси умножить на 2, результат разделить сначала на 7, затем что получится на 11 и, наконец, на 13. После этого спроси, какой получился ответ, и ты немедленно назовешь задуманное число, разделив на 2.

***2.* Делимость на 11.**

Предложи написать любое многозначное число. К этому числу ты можешь быстро приписать справа или слева одну цифру так, что получившиеся число разделится на 11.

***3.* Угадай задуманное число.**

Если кто задумает двузначное число, то ты скажи ему, чтобы он увеличил число десятков задуманного числа в 2 раза, к произведению прибавил бы 5 единиц, полученную сумму увеличил в 5 раз и к новому произведению прибавил сумму 10 единиц и числа задуманного, а результат произведенных сообщил бы тебе. Если ты из указанного тебе результата вычтешь 35, то получишь задуманное число. Математика Л. Магницкого.

**4. Старинный фокус.**

Возьми 24 спички и три различных предмета. Позови три участника. Первый зритель получает одну спичку, второй – две, третий – три. Ты поворачиваешься к ним спиной и просишь взять каждого по вещице из лежащих на столе. Предложи теперь зрителю, держащему предмет взять ровно столько спичек из числа оставшихся в кучке, сколько у него на руках. Зритель, взявший второй предмет, пусть возьмет дважды столько спичек, сколько у него на руках. Последнему зрителю, взявшему третий предмет, предложи взять четырежды столько спичек, сколько у него на руках. После этого пусть все три зрителя положат свои предметы в карманы.

Обернувшись к зрителям и взглянув на оставшиеся спички, сразу говоришь, какой предмет он взял.

**Заключение**

Зная методы исследований признаков делимости натуральных чисел можно сформулировать признаки делимости любых натуральных чисел.

Признаки делимости часто используются при решении олимпиадных задач, при нахождении общего знаменателя дробей, в алгебре – при решении уравнений в целых числах.

Признаки делимости применяются в различных числовых фокусах.

В ходе выполнения работы были решены поставленные задачи:

1) изучен теоретический материал по данному вопросу;

2) кроме известных мне признаков на 2, 3, 5, 9 и 10, я узнал, что существуют еще признаки делимости на 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 19 и т.д.;

3) изучен признак Паскаля - универсальный признак делимости на любое натуральное число;

Работая с разными источниками, анализируя найденный материал по исследуемой теме, я убедился в том, что существуют признаки делимости и на другие натуральные числа. Например, на 7, 11, 12, 13, 14, 19, 37, что и подтвердило правильность выдвинутой мной гипотезы о существовании других признаков делимости натуральных чисел. Также я выяснил, что существует универсальный признак делимости, алгоритм которого нашел французский математик паскаль Блез и опубликовал его в своем трактате «О характере делимости чисел». С помощью этого алгоритма, можно получить признак делимости на любое натуральное число.

**Результатом исследовательской работы** стал систематизированный материал в виде таблицы «Признаки делимости чисел», который можно использовать на уроках математики, во внеклассных занятиях с целью подготовки учащихся к решению олимпиадных задач, при подготовке обучающихся к экзаменам.

**Список использованных источников**

1. Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбурд С.И. Математика. 6 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений /— 25-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2009. — 288 с.

2. Воробьев В.Н. Признаки делимости.-М.:Наука,1988.-96с.

3. Гарднер М. Математические досуги. / Под. Ред. Я.А.Смородинского. - М.: Оникс, 1995. - 496 с.

4. Гельфман Э.Г., Бек Е.Ф. и др. Дело о делимости и другие рассказы: Учебное
пособие по математике для 6 класса. - Томск: Изд-во Том.ун-та, 1992. - 176с.

5. Депман И.Я., Виленкин Н.Я. За страницами учебника математики. М.: Просвещение, 1989. - 97с.

6. Энциклопедический словарь юного математика.

7. Россия. Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона. — Лениздат, 1991.2. Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С.

8. Математическая шкатулка: Пособие для учащихся 4—8 кл. сред. шк. — 5-е изд. — М.: Просвещение, 1988.

9. Перельман Я.И. Занимательная алгебра. М.: Триада-Литера,1994. -199с.

10. Тарасов Б.Н. Паскаль. -М.:Мол. Гвардия,1982.-334с.

11. http://dic.academic.ru/ (Википедии — свободной энциклопедии).

12. http://www.bymath.net (энциклопедия).

**Приложение 1. Таблица признаков делимости**

| | **Признак** | **Пример** |
|---|---|---|
| **на 2** | Число заканчивается на чётную цифру. | ……2(4,6,8,0) |
| **на 3** | Сумма цифр делится на 3. | 378015: 3+7+8+0+1+5 = 24. 24:3 |
| **на 4** | Число из двух последних его цифр нули или делится на 4. | ………12 |
| **на 5** | Число заканчивается на цифру 5 или 0. | ………0(5) |
| **на 6** | Число заканчивается на чётную цифру и сумма цифр делится на 3. | 375018: 8-четное число<br>3+7+5+0+1+8 = 24. 24:3 |
| **на 7** | Результат вычитания удвоенного последней цифры из этого числа без последней цифры делится на 7. | 364:<br>36 — (2 x 4) = 28, 28:7 |
| **на 8** | Три его последние цифры числа - нули или образуют число, которое делится на 8. | ......................064 |
| **на 9** | Сумма его цифр числа делится на 9. | 3780153: 3+7+8+0+1+5+3=27. 27:9 |
| **на 10** | Число оканчивается на ноль | ...........................0 |
| **на 11** | Сумма цифр числа с чередующимися знаками делится на 11. | 182 919:<br>1 - 8 + 2 - 9 + 1 — 9 = -22<br>-22:11 |
| **на 12** | Две последние цифры числа делятся на 4 и сумма цифр делится на 3. | 216:<br>2+1+6=9, 9:3 и 16:4 |
| **на 13** | Число десятков данного числа, сложенное с учетверённым числом единиц, кратно 13. | 845:<br>84 + (4 x 5) = 104,<br>104:13 |
| **на 14** | Число заканчивается на чётную цифру и когда результат вычитания удвоенной последней цифры из этого числа без последней цифры делится на 7. | 364: 4 - четное число<br>36 - (2 *4) = 28, 28:7 |
| **на 15** | Число 5 и на 0 и сумма цифр делится на 3. | 65480:<br>6+3+4+8+0=21, 21:3 |
| **на 16** | Четыре его последние цифры числа - нули или образуют число, которое | ................. 0032 |
| **на 17** | Число десятков данного числа, сложенное с увеличенным в 12 раз числом единиц, кратно 17. | 29053^2905+36=2941^294+12=<br>=306^30+72=102^10+24=34.<br>Поскольку 34 делится на 17, то и 29053 делится на 17 |
| **на 18** | Число заканчивается на чётную цифру и сумма его цифр делится на 9. | 2034: 4 - четное число<br>2+0+3+4=9, 9:9 |
| **на 19** | Число десятков данного числа, сложенное с удвоенным числом единиц, кратно 19 | 646:<br>64 + (6 x 2) = 76,<br>76:19 |
| **на 20** | Число заканчивается на 0 и предпоследняя цифра четная | ............................ 40 |

| | | |
|---|---|---|
| **на 23** | Число делится на 23 тогда и только тогда, когда число сотен, сложенное с утроенным числом, образованным двумя последними цифрами, делится на 23. | Например, число 5819 делится на 23, так как 58 + 19*3 = 58 + 57 = 115, 1 + 15*3 = 1 + 45 = 46 делится на 23. |
| **на 25** | Число, состоящее из двух последних цифр делится на 25 | .....................75 |
| **на 27** | Число делится на 27 тогда и только тогда, когда на 27 делится сумма чисел, образующих группы по три цифры (начиная с единиц). | Например, 27125334 делится на 27, так как 027+125+334= 486 делится на 27 |
| **на 29** | Число делится на 29 тогда и только тогда, когда число десятков, сложенное с утроенным числом единиц, делится на 29 | Например, число 9483 делится на 29, так как 948 + 3*3 = 948 + 9 =957, 95 + 7*3 = 116, 11 + 3*6 = 11 + 18 = 29. |
| **на 30** | Число делится на 30 тогда и только тогда, когда оно заканчивается на 0, и сумма всех цифр делится на 3. | ......................360 |
| **на 37** | Число делится на 37 тогда и только тогда, когда на 37 делится модуль утроенного числа сотен, сложенного с учетверённым числом десятков, за вычетом числа единиц, умноженного на семь. | Например, число 851 делится на 37, так как делится \|3*8 + 4*5 – 1*7\| = \|24 + 20 – 7\| = \|44 – 7\| = 37 делится на 37. |
| **на 41** | число делится на 41 тогда и только тогда, когда модуль разности числа десятков и четырёхкратного числа единиц делится на 41 | Пример: число 533 делится на 41, так как \|53 – 4*3\| = \|53 – 12\| = 41 |
| **на 59** | Число делится на 59 тогда и только тогда, когда число десятков, сложенное с числом единиц, умноженное на 6, делится на 59. | Например, 767 делится на 59, так как на 59 делятся 76 + 6*7 = 118 и 11 + 6*8 = 59. |
| **на 79** | Число делится на 79 тогда и только тогда, когда число десятков, сложенное с числом единиц, умноженное на 8, делится на 79.. | Например, 711 делится на 79, так как на 79 делятся 71 + 8*1 = 79 |
| **на 99** | Число делится на 99 тогда и только тогда, когда на 99 делится сумма чисел, образующих группы по две цифры (начиная с единиц). | Например, 12573 делится на 99, так как на 99 делится 1 + 25 + 73 = 99. |
| **на 100** | На 100 делятся только те числа, у которых две последние цифры нули. | ……………00 |
| **на 101** | число делится на 101 тогда и только тогда, когда модуль алгебраической суммы чисел, образующих нечётные группы по две цифры (начиная с единиц), взятых со знаком «+», и чётных со знаком «-» делится на 101 | Например, число 494092делится на 101, так как \|49 – 40 + 92\| = 101. Число 29694 делится на 101, так как \|2 – 96 + 94\| = 0 |
| **на 125** | Число, состоящее из трех последних цифр делится на 125 | ...................375 |