Некоммерческая организация «Благотворительный фонд наследия
Д.И. Менделеева»
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 56 г. Пензы
имени Героя России А.М. Самокутяева
Управление образования города Пензы
ГАОУ ДПО «Институт регионального развития Пензенской области»
МКУ «Центр комплексного обслуживания и методологического обеспечения учреждений образования г. Пензы»
Портал поддержки Дистанционных Мультимедийных Интернет-проектов «ДМИП.рф»
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 66 г. Пензы
имени Виктора Александровича Стукалова

I региональный этап Всероссийского фестиваля творческих открытий и инициатив «Леонардо»

Равновеликие и равносоставленные многоугольники

Автор работы: Серова Елена Александровна, 7а2 класс МБОУ СОШ № 66 г. Пензы имени Виктора Александровича Стукалова

Руководитель работы: Ширикова Татьяна Владимировна, учитель математики МБОУ СОШ № 66 г. Пензы имени Виктора Александровича Стукалова

,

Пенза 2021г.

Введение

«Семь раз отмерь, один раз отрежь!» Эта поговорка очень подходит для решения задач на разрезание и перекраивание плоских фигур. Считается, что такие задачи относятся к числу развлекательных. Однако, они не очень далеки от серьезных математических, которыми увлекались многие учёные с древнейших времён, и в которых имеется ряд вопросов, не решенных до сих пор.

Рис.1

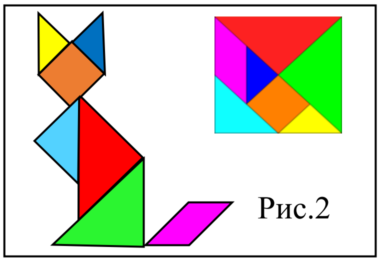
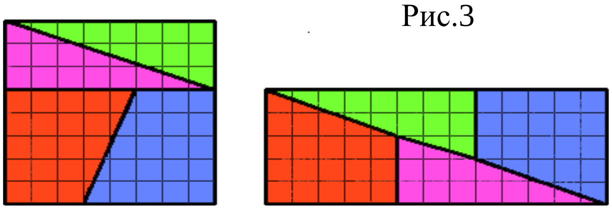


Рис.2

Посмотрите на эти две фигуры на рисунке1. Кажется, что они совершенно разные. Но, если одну фигуру разрезать на более мелкие части, как показано на рисунке 2, то из этих частей можно сложить вторую фигуру [7]. Такие фигуры называются ***равносоставленными***, т.е. они состоят из одинаковых частей. Равны ли площади этих фигур? В геометрии фигуры, имеющие равные площади называются ***равновеликими.***

Для ответа на этот вопрос рассмотрим фигуры, площади которых мы умеем вычислять.

Рис.3



Например, на рисунке 3 квадрат, разрезали на части из которых составили прямоугольник.

Мы видим, что площадь квадрата равна 64, а площадь прямоугольника 65. Так что же мы получили: фигуры составлены из одинаковых частей, а их площади не равны. Может ли такое быть?

Ответ на этот и ряд других вопросов я хочу предложить в своей работе.

Актуальность работы состоит в том, что она расширяет знания по геометрии, знакомит с задачами на разрезание, которые способствуют развитию логического мышления, интуиции и смекалки. В работе выявляются свойства многоугольников, которые имеют практические приложения для упрощения хода доказательств. Результаты работы могут быть применены в бытовых и производственных условиях для раскройки материала и составления головоломок.

Целью моей работы было изучение теории по данной теме для доказательства или опровержения следующей **гипотезы:** все равносоставленные фигуры равновеликие, а равновеликие - равносоставленные.

Исходя из цели, я поставила перед собой следующие **задачи:**

1. Проанализировать литературу и обобщить информацию по данной теме.
2. Доказать, что любые два равносоставленные многоугольники равновеликие.
3. Выяснить, всякие ли два равновеликих многоугольника равносоставленные.
4. Выяснить, как разрезать один многоугольник, чтобы составить другой.
5. Применить теорию равновеликости и равносоставленности для нахождения площадей фигур и решения задач.

Объект исследования: многоугольники.

Предмет исследования: равновеликость равносоставленных и равносоставленность равновеликих многоугольников.

Метод разложения и метод дополнения

Две равносоставленные фигуры равновелики, т.е. имеют одинаковую площадь. Подтверждение этого факта я нашла в учебнике геометрии. Он основан на свойстве площадей: если фигура разбита на части, то площадь всей фигуры равна сумме площадей ее частей [1].

На этом свойстве равносоставленности основан способ вычисления площадей фигур, называемый способом ***разложения.*** Этот способ был известен еще Евклиду 2000 лет назад. Для нахождения площади фигуры ее разбивают на конечное число частей так, чтобы из них составить более простую фигуру, площадь которой уже известна или легко находится. Применяя этот метод, легко найти площади таких фигур, как параллелограмм, треугольник и трапеция.

Все мы знаем, что ***площадь прямоугольника равна произведению длины на ширину***.

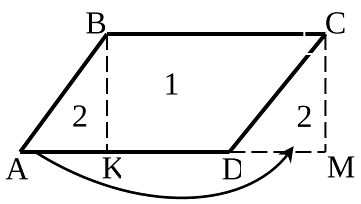


Рис.4

Для вычисления площади параллелограмма ABCD можно построить равносоставленный ему прямоугольник KBCM. ΔABK = ΔDCM. Для этого только надо опустить перпендикуляр из вершины B на сторону AD и отрезать прямоугольный ΔABK. Затем переложить его к стороне DC. ΔABK = ΔDCM. Параллелограмм ABCD и прямоугольник KBCM равновелики, т.е. их площади равны. ***Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, опущенную на это основание***

Из курса математики шестого класса нам известно, что ***площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту, опущенную на это основание.***

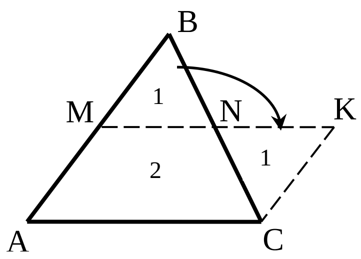


Рис.5

Докажем это с помощью метода разложения. Чтобы найти площадь треугольника, надо разрезать его по средней линии и из полученных частей сложить параллелограмм.

Как показано на рисунке.

M, N – середины сторон треугольника, CK||AB.

ΔMBN = ΔKCN. Треугольник ABC равносоставленный с параллелограммом AMKC, а значит и равновелик.

Площадь трапеции равна половине произведения суммы его оснований на высоту.

Отрезок DN равен отрезку BC. ΔMBC= ΔMND.

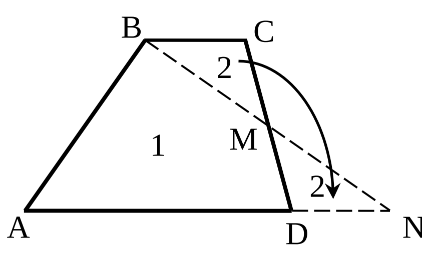


Рис.6

Трапеция ABCD равносоставленная с треугольником ABN.

Их площади равны.

Метод разложения часто заменяют ***методом дополнения***. Вместо того чтобы разрезать фигуры на части, их дополняют равными частями так, чтобы получившиеся фигуры стали равны.

Методы разбиения и дополнения удобно использовать при доказательстве многих теорем планиметрии. Например, для доказательства того, что параллелограмм и прямоугольник, имеющие одинаковые основания и высоты, равновелики.

На рисунке 7 видно, что эти две фигуры дополнили до равных трапеции с помощью равных треугольников [2].

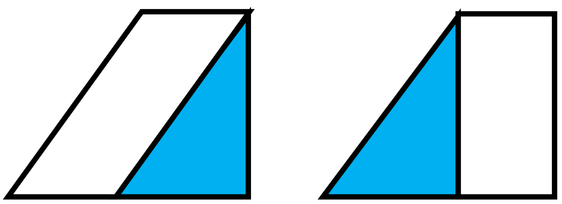


Рис.7

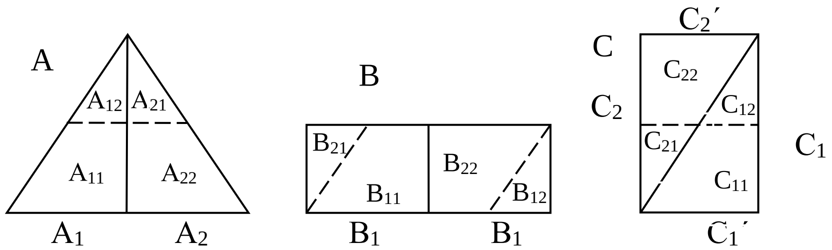
Итак, применяя свойство площади, что всякие равносоставленные многоугольники равновелики, мы получили наглядное доказательство теорем о площадях фигур. Теперь попробуем ответить на вопрос: а являются ли две равновеликие фигуры равносоставленными? (Т.е. можно ли две фигуры одинаковой площади составить из одинаковых частей?)

Ответом на этот вопрос занимались почти одновременно сразу несколько математиков, не зная о работе друг друга. В 1790 г. впервые эту проблему сформулировал венгерский ученый Фаркаш Бойяи, а в 1807 г. ее решил Вильям Валлас, шотландский математик, в 1833 году немецкий офицер, любитель математики Пауль Гервин, а в 1835 году, наконец, Бойяи, не зная о существовании этих решений, дал свое. Потому до наших дней эта теорема дошла под именем Бойяи-Гервина..

Теорема Бойяи – Гервина

Она распадается на ряд лемм.

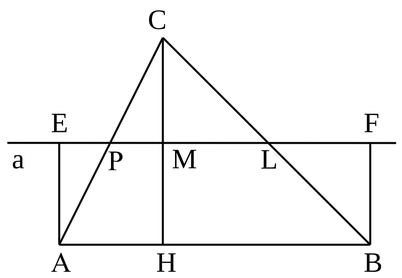
Лемма 1. *Две фигуры A и B, равносоставленные с третьей фигурой C, равносоставлены.*



Доказательство.

Так как A и C равносоставлены, то найдутся такие разбиения фигур A и C на фигуры $A_1, A_2, \ldots, A_k$ и $C_1, C_2, \ldots, C_k$, что $A_1 = C_1$, $A_2 = C_2, \ldots, A_k = C_k$. Аналогично так как B и C равносоставлены, то найдутся такие разбиения фигур B и C на фигуры $B_1, B_2, \ldots, B_k$ и $C_1', C_2', \ldots, C_k'$, что $B_1 = C_1'$, $B_2 = C_2', \ldots, B_k = C_k'$. Каждое разбиение осуществляется некоторой сетью отрезков. На фигуре C две сети: от разбиения $C_1, C_2, \ldots, C_k$ и от разбиения $C_1', C_2', \ldots, C_k'$. Объединение этих двух сетей даст нам новую сеть из отрезков, которая разобьет фигуру C на более мелкие фигуры (они получаются при пересечении C_i фигуры с фигурой C_i'). Так как $A_1 = C_1$, то фигуру A_1 можно разбить также, как и C_1: $A_1 = A_{11} + \ldots + A_{1n}$, $A_2 = A_{21} + \ldots + A_{2n}, \ldots$, $A_k = A_{k1} + \ldots + A_{kn}$. $A_{ij} = C_{ij}$.Аналогично $B_1 = B_{11} + \ldots + B_{1n}$, …, $B_k = B_{k1} + \ldots + B_{kn}$. $B_{ij} = C_{ij}$. Следовательно $A_{ij} = B_{ij}$, т.е. A и B равносоставлены.

Лемма 2. *Любой треугольник ABC равносоставлен с некоторым прямоугольником.*

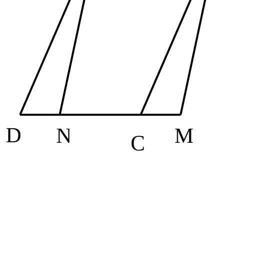


Доказательство. Пусть *AB* - большая сторона треугольника *ABC*. Проведем высоту *CH*. Тогда точка *H* принадлежит отрезку *AB*. Через точку *M* - середину высоты *CH* - проведем прямую *a*, параллельную *AB*. Обозначим через *P* и *L* точки пересечения прямой *a* со сторонами *AC* и *BC*, опустим на эту прямую перпендикуляры *A E* и *B F*.

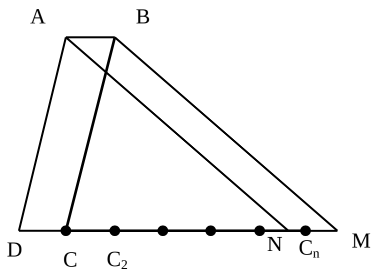
Теперь равносоставленность ΔABC и прямоугольника *AEFB* следует из условий: $\Delta AEP = \Delta CMP$, $\Delta BFL = \Delta CML$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Равновеликие параллелограммы, имеющие равные стороны равносоставлены.*

Доказательство. *Рассмотрим параллелограммы ABCD и KLMN.* Будем считать, что отрезки *AB* и *KL* совпадают, и точки *M* и *N* лежат на прямой *CD*. Рассмотрим отдельно два случая взаимного расположения отрезков *CD* и *MN*.



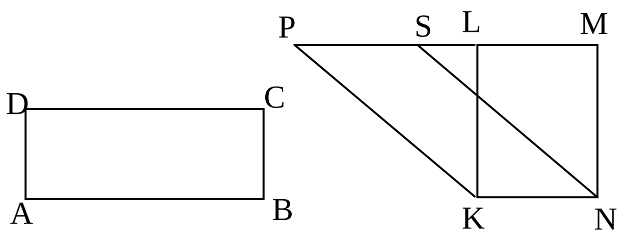
Первый случай. Пусть отрезки *CD* и *MN* пересекаются. Точка *C* лежит на отрезке *MN*. Тогда равносоставленность *ABCD* и *ABMN* следует из условия $\Delta DAN = \Delta CBM$.



Второй случай. Если отрезки CD и MN не пересекаются, то отложим последовательно точки $C_1 = C,...,C_n$ так, что $C_iC_{i+1} = CD$ и отрезок $C_{n-1}C_n$ пересекает MN.

Теперь к цепочке параллелограммов $ABCD$, ABC_1C_2,..., $ABC_{n-1}C_n$, $ABMN$ достаточно применить первый случай и лемму 1. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если прямоугольники ABCD и KLMN имеют одинаковую площадь, то они равносоставлены.*



Доказательство. Будем считать, что отрезок AB - наибольшая из сторон данных прямоугольников. Тогда на луче ML найдутся такие точки P и S, что S □ PM, $PS= KN$]и $SN=AB$.

Четырехугольники $ABCD$ и $KNSP$, а также $KNSP$ и $KLMN$ равносоставлены по предыдущей лемме. Тогда из леммы 1 следует, что $ABCD$ и $KLMN$ равносоставлены. Лемма доказана.

Лемма 5. *Любой многоугольник M равносоставлен с некоторым прямоугольником.*

Доказательство этой леммы следует из лемм 2 и 4.

Теорема Бойяи-Гервина. *Равновеликие многоугольники M и N равносоставлены.*

Доказательство. Пусть $S_M = S_N$. По лемме 5 для M и N найдутся такие прямоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, что M и $ABCD$, а также N и $A_1B_1C_1D_1$ равносоставлены. Из равенств $S_{ABCD} = S_M = S_N = S_{A1B1C1D1}$ и леммы 4 следует равносоставленность $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Теперь равносоставленность M и N следует из леммы 1. Теорема доказана [5]..

Из доказательства этой теоремы видно, что для вычисления площадей многоугольников достаточно разбить их на части, площади которых известны, например, на треугольники, т. е. площади всех многоугольников можно вычислить с помощью метода разложения.

Рассмотрим применение равносоставленности и равновеликости для доказательства некоторых теорем.

Доказательство теорем

Теорема 1. Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах. Это одна из самых известных геометрических теорем древности, называемая ***теоремой Пифагора***.

Доказательство1. Рассмотрим квадрат, построенный на гипотенузе данного прямоугольного треугольника. Он складывается из таких же фигур, что и квадраты, построенные на катетах. Длина сторон каждого квадрата равна a + b. Каждый из квадратов разбит на части, состоящие из квадратов и прямоугольных треугольников. (Рис. 8.)

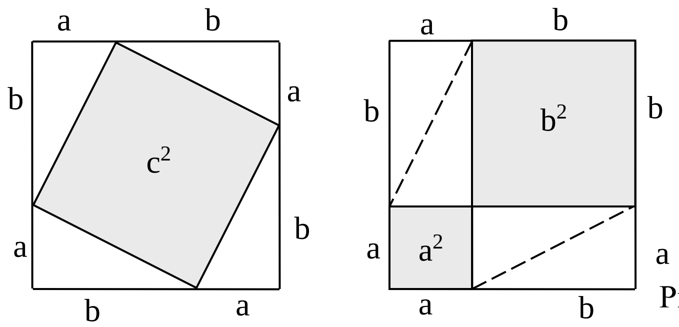


Рис.8

Ясно, что если от площади квадрата отнять учетверенную площадь прямоугольного треугольника с катетами a, b, то останутся равные площади, т. е. $c^2=a^2+b^2$ [2]. Впрочем, древние индусы, которым принадлежит это рассуждение, обычно не записывали его, а сопровождали чертеж лишь одним словом: «смотри!».

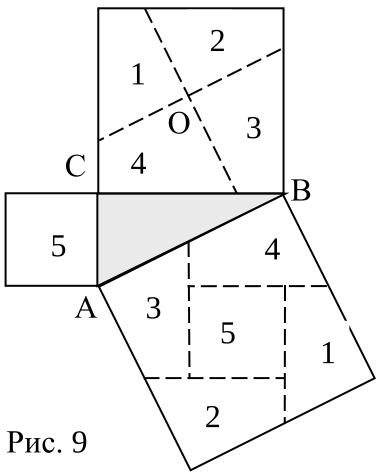
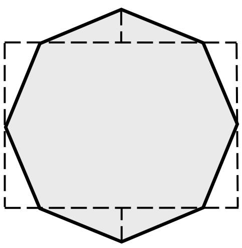


Рис. 9

Доказательство 2. Доказательство методом разложения квадратов на равные части, называется «колесом с лопастями». Здесь: ABC – прямоугольный треугольник с прямым углом C; O – центр квадрата, построенного на большом катете; пунктирные прямые, проходящие через точку O, перпендикулярны или параллельны гипотенузе. Это разложение квадратов интересно тем, что его попарно равные

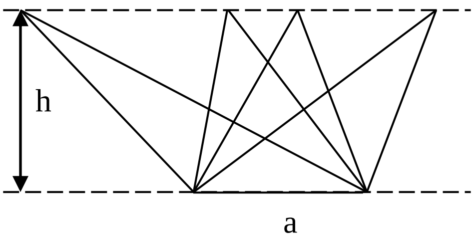
четырехугольники могут быть отображены друг на друга параллельным переносом (Рис. 9.) [6].

Теорема 3. Площадь правильного восьмиугольника равна произведению длин наибольшей и наименьшей его диагоналей.



Решение. Отрежем от правильного восьмиугольника треугольники и переставим их так, как показано на рисунке. В результате получим прямоугольник, стороны которого равны наибольшей и наименьшей диагоналям восьмиугольника.

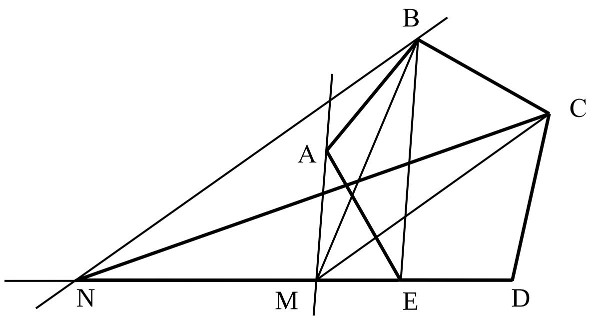
Теорема 4. Все треугольники, имеющие равные основания и равные высоты, опущенные на эти основания, равновелики.



Доказательство. Так как площадь треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}ah$, то мы имеем, что площади треугольников равны, а, значит, они равновелики [6].

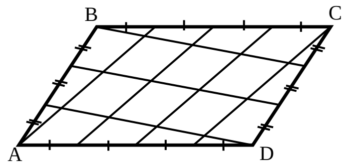
***Теорема 5*. *Для всякого многоугольника можно построить равновеликий ему треугольник*.**

Доказательство. Рассмотрим многоугольник ABCDE. Проведем диагональ BE и построим прямую AM||BE. Треугольник ABE заменим равновеликим треугольником MBE. Таким образом, мы заменили данный пятиугольник ABCDE равновеликим ему четырехугольником BCDM.



Проведем диагональ CM и построим прямую BN||MC. Треугольник MBC заменим равновеликим треугольником NCM. Таким образом, многоугольник ABCDE заменили равновеликим ему треугольником CDN [6].

Задачи на разрезание фигур и на доказательство их равновеликости



Задача 1. Стороны AB и CD параллелограмма ABCD площади 1 разбиты на n равных частей. Точки деления показаны на рисунке.

Чему равны площади образовавшихся при этом маленьких параллелограммов? [4]

Решение .Отрежем от параллелограмма две части как показано на рисунке 1 и переложим их так, как показано на рисунке 2. Получится фигура, состоящая из mn + 1 параллелограмма. Поэтому площадь маленького параллелограмма равна 1/(mn + 1).

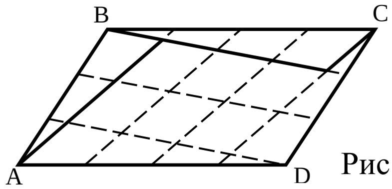


Рис. 10

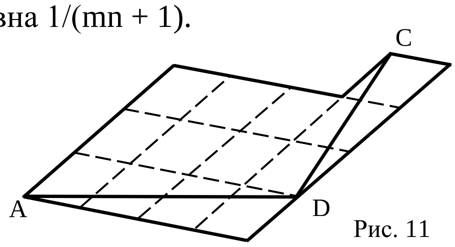
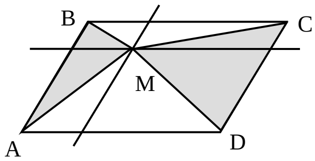


Рис. 11

Задача 2. Внутри параллелограмма ABCD взята произвольная точка M. Докажите, что сумма площадей треугольников ABM и CDM равна сумме площадей треугольников ADM и BCM

Решение. Через точку M достаточно провести прямые, параллельные сторонам параллелограмма, которые разобьют его на 4 параллелограмма, диагонали которых делят их на равновеликие части. [4]



Вернемся к рисунку 3. Как же получилось, что перекладывание частей квадрата привело к увеличению площади равносоставленной фигуры? Оказывается, вторая фигура не является прямоугольником, равносоставленным с квадратом. Ее части не прилегают друг к другу, а образуют щель в виде параллелограмма площадью 1. Действительно, для того, чтобы сторона красной фигуры была продолжением стороны сиреневой фигуры надо чтобы углы 1 и 2 в прямоугольных треугольниках были равны, т.е треугольники должны быть равны или подобны. Катеты этих треугольников должны быть равны или пропорциональны, т.е 3/2 = 8/5. Как мы видим, данное равенство не выполняется.

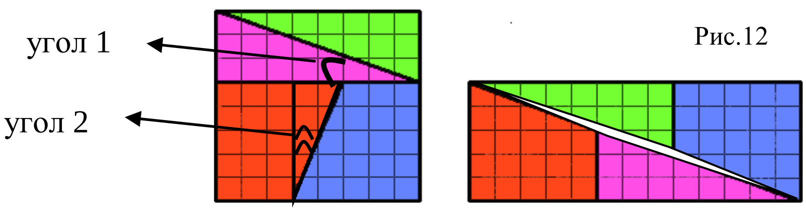


Рис.12

Работая над данной, темой у меня возник вопрос: «Как надо разрезать один многоугольник, чтобы из этих частей получить равновеликий ему другой многоугольник?». На этот вопрос в 1951 г. ответили швейцарские математики Г. Хардвигер (1908 г.) и Р. Глюр. Они доказали теорему, которая названа их именами.

Теорема Хардвигера – Глюра.

Будем говорить, что два многоугольника ***S-равносоставлены***, если их равносоставленность можно установить с помощью одних только параллельных переносов и центральных симметрий. Эта теорема тоже распадается на ряд лемм.

Лемма 1. Если А и С– два многоугольника, каждый из которых S-равносоставлен с многоугольником В, то А и С также S-равносоставлены.

Лемма 2. Всякий треугольник S-равносоставлен с некоторым прямоугольником.

Лемма 3. .Два равновеликих параллелограмма, основания которых равны и параллельны, S-равносоставлены. ?

Лемма 4. Два прямоугольника, имеющих равную площадь, S-равносоставлены.

Лемма 5. Всякий многоугольник S-равносоставлен с некоторым прямоугольником.

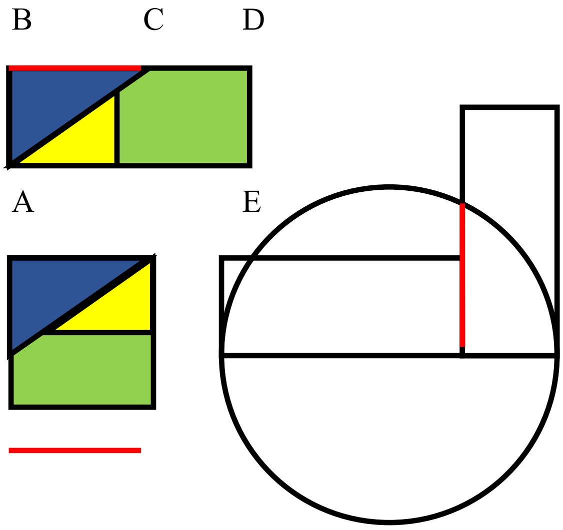
Теорема Хадвигера – Глюра. ***Два многоугольника, имеющих равные площади, S-равносоставлены.***

Доказательство теоремы Хадвигера –Глюра получаются дословным повторением доказательства теоремы Бояй – Гервина с той только разницей, что вместо «равносоставлены» следует говорить «S-равносоставлены» [5].

Таким образом, каждые два равновеликих многоугольника можно разбить на части так, что эти части получались бы одна из другой параллельным переносом или центральной симметрией, т.е. чтобы отвечающие друг другу части в разбиении обеих фигур были бы равны, и их соответствующие стороны были бы параллельны

Применение данной теоремы.

Задача 3. Разрежьте прямоугольник на такие части, чтобы из них можно было составить равновеликий ему квадрат.



Решение.

1. делаем разрез данной фигуры (АС), который удовлетворяет требованиям задачи (ВС = стороне квадрата, которую находим с помощью вычисления или построения);

2. осуществляем параллельный перенос отрезанной части вдоль линии разреза (АС) до совпадения вершины отрезанной части (С) с продолжением другой стороны исходной фигуры (прямой DE);

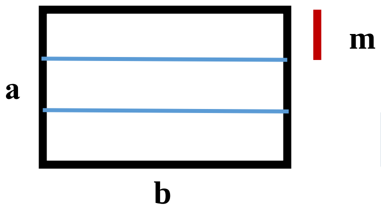
3. делаем второй разрез параллельный стороне (DE), получаем еще часть;

4. осуществляем параллельный перенос вновь отрезанной части вдоль линии первого разреза до совпадения вершин (вкладываем часть в выемку) [7].

А как надо разрезать на части прямоугольник, чтобы из этих частей составить равновеликий прямоугольник с заданной стороной? Предлагаю свои рассуждения по данному вопросу. Пусть дан прямоугольник со сторонами a и b. Надо построить прямоугольник со стороной m.

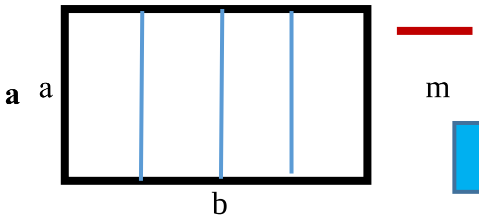
Рассмотрим несколько случаев.

1. ***a делится на m.***



На стороне a откладываем отрезки, равные m и делаем разрезы параллельно стороне b.

*2. **b делится на m.***

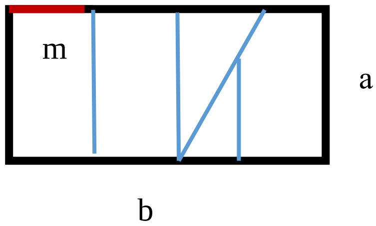


На стороне b откладываем отрезки, равные m и делаем разрезы параллельно стороне a.

3. ***Если стороны прямоугольника не делятся на m.***

А). ***m больше половины одной из сторон***, то на этой стороне откладываем отрезок, равный m и делаем два разреза, как в предыдущей задаче № 3.

Б). ***m меньше половины одной из сторон***, то на этой стороне откладываем несколько отрезков, равных m до тех пор, пока оставшийся отрезок не будет соответствовать условию: m больше его половины. Разрезаем прямоугольник, как показано на рисунке.

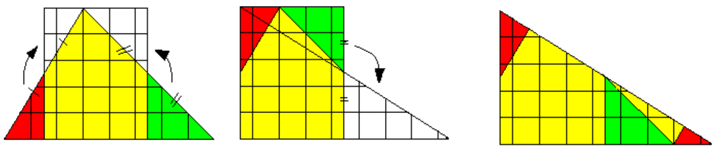


Если сторона m больше сторон данного прямоугольника, то вычисляем другую сторону и работаем уже с ней.

Задача 4. Преобразуйте произвольный треугольник в прямоугольный треугольник.

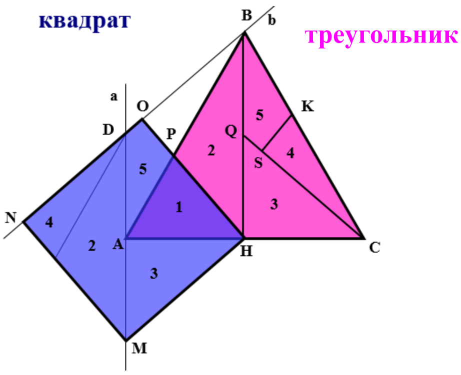
Решение: 1) сначала преобразуйте произвольный треугольник в прямоугольник с помощью центральной симметрии.

2) прямоугольник в прямоугольный треугольник.



Задача 5. Превратить равносторонний треугольник в квадрат [3].

Решение. В ΔABC:



1. Построим высоту BH. Проведем прямую $a \parallel BH$.
2. Построим Окр(H, a). Окр(H, a) пересекается с a в точке M.
3. Проведем прямую $b \parallel MH$. Построим $MN \perp b$ и $HO \perp b$.
4. Построим Окр(C, a). Окр(C, a) пересекается с BH в т.Q.
5. Отложим отрезок BK = AP. Построим $KS \perp CQ$.
6. ΔABC превращается в □MNOH.

Шарнирное разрезание

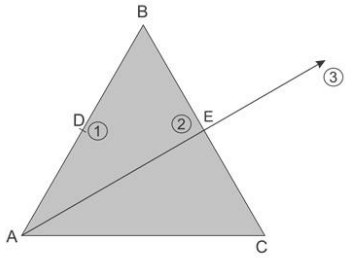
Но вот более сложный вопрос. А можно ли разрезать так, чтобы все части оставались соединенными в неразрывную цепочку?

Шарнирное разрезание или разрезания Дьюдени (по имени автора данной задачи – английского математика Генри Эрнеста Дьюдени (1857 - 1930 гг.). Он был известен как один из выдающихся создателей математических головоломок.

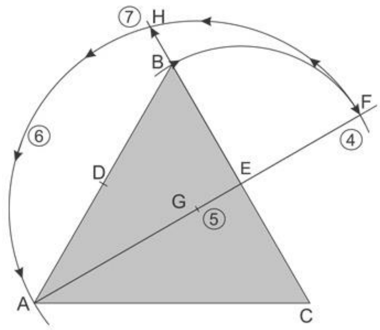
Изначально задача о разрезании треугольника была предложена Генри Дьюдени в виде головоломки и опубликована в газете «Дейли мейл» (выпуски от 1 и 8 февраля 1905 г.). Позже эта головоломка вошла в книгу «Кентерберийские головоломки» и по сей день входит в сотню лучших головоломок «всех времен».

На рисунках показано, каким образом равносторонний треугольник можно разрезать на 4 части, из которых затем удается сложить правильный квадрат [8].

1. Разделим AB пополам в точке D
2. BC разделим пополам в точке E.

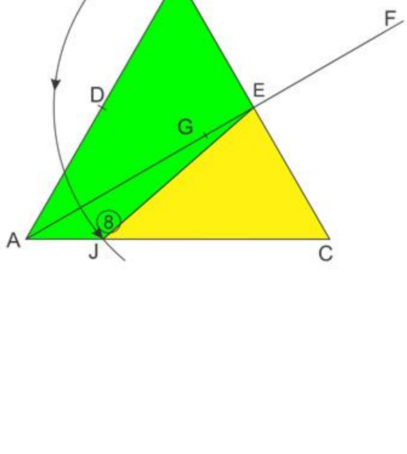


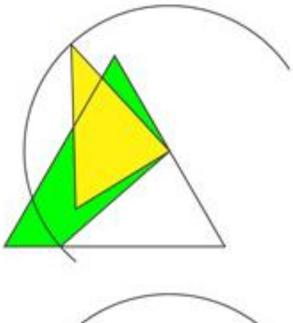
5. Строим дугу из точки E, радиусом EB. На пересечении с прямой AE получаем точку F.
6. Разделим пополам AF в точке G.
7. Проведем дугу AF с центром в точке G.
8. Продолжим EB до пересечения с дугой в точке.

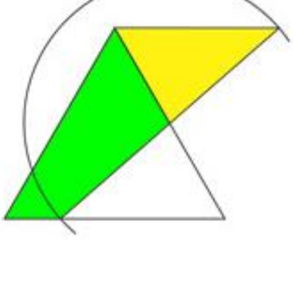


9. Из E как из центра радиусом EH опишем дугу HJ.

После этой операции нам удалось получить первый разрез треугольника - отрезок EJ.

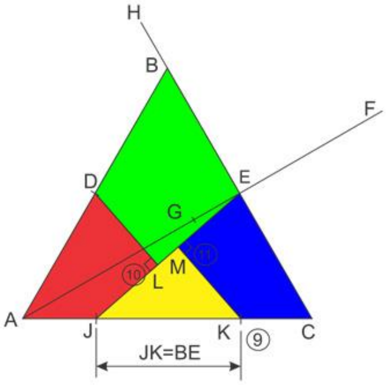


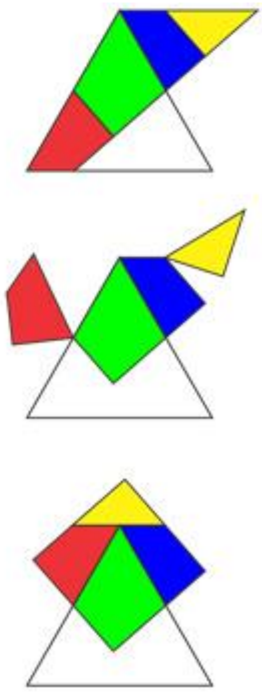


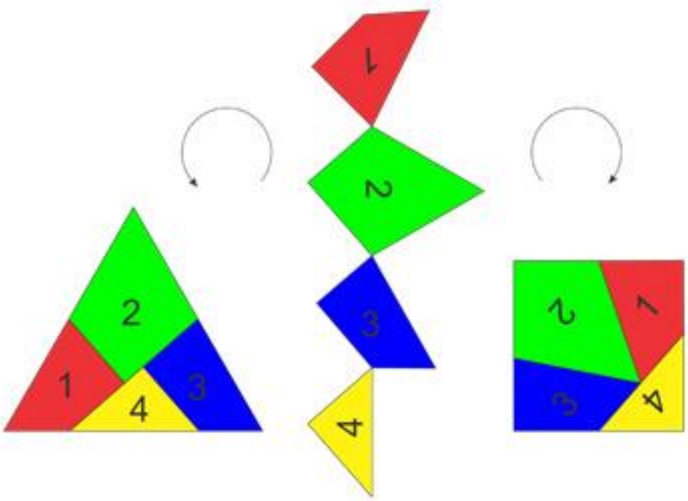


10. Отложим отрезок JK, равный BE.
11. Из точки D опустим перпендикуляр на EJ с основанием в точке L.
12. Из точки K опустим перпендикуляр на EJ с основанием в точке M.

Получаем отрезки, вдоль которых следует провести разрезы.







Выводы

1. В итоге моей научно-практической работы я пришла к выводам, что равносоставленность и равновеликость - интересный раздел геометрии, к которому подошли серьезно многие ученые.
2. Два равносоставленных многоугольника равновелики, а два равновеликих - равносоставлены.
3. Равносоставленность позволяет находить множество решений задач и доказательств теорем.
4. Благодаря свойствам равносоставленности стало возможным применение задач на разрезание, а они, в свою очередь, позволяют сократить и упростить ход решений и доказательств, особенно, если речь идет о площадях.
5. Результаты моей работы могут быть применены в бытовых и производственных условиях для раскройки материала и составления головоломок.

Список используемых источников

1. Геометрия. 7-9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов и др. М: Просвещение, 2017 – 383 с.
2. В.Г. Болтянский. Равносоставленность многоугольников и многогранников. Энциклопедия элементарной математики. Кн.5. М.: Наука, 1966. – 624 с.
3. С.А. Ануфриенко. Равносоставленность многоугольников и многогранников. МИФ №1 (2000 – 2001)
4. В.В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М.: Наука,. 1991 – 640с.
5. В.Г. Болтянский. Равновеликие и равносоставленные фигуры. М.: Гостехиздат, 1956. – 64 с.
6. В.А Далингер. Равновеликие и равносоставленные, плоские и пространственные фигуры. Омск: изд-во Омского педуниверситета, 1994 г. – 122 с.
7. Б.А. Кордемский, Н.В. Русалев. Удивительный квадрат. Гос. Изд. Технико – теоретической литературы. Москва – Ленинград, 1952 г. – 160 с.
8. https://mnogogranniki.ru/articles/182-razrezanie-dyudeni.html
9. https://oge.sdamgia.ru/test?theme=13

Содержание