Муниципальное общеобразовательное учреждение

средняя общеобразовательная школа №9 г. Сердобска

Практическая жизнь
НОК И НОД

исследовательская работа по математике

Выполнила: Гадальцева Екатерина,

ученица 6 класса МОУ СОШ №9

Руководитель: Александрова С.В.,

учитель математики

Сердобск

2021

Содержание

Введение

Ежедневно каждый человек решает множество различных задач. Для успешного решения часто приходиться пользоваться определёнными математическими правилами. Мы не задумываемся о ценности применения различных методов и определённых знаниях.

Данная работа расширяет знания о вычислениях НОД и НОК. Знакомство с ними не только дополняет и углубляет математические знания, но и развивает интерес к предмету, любознательность и логическое мышление.Данная работа рассчитана на учеников, желающих повысить уровень математической подготовки, увидеть красоту математических преобразований и красоту алгоритма Евклида.

Актуальность темы исследования: изучение темы НОК и НОД многие учащиеся считают ненужным, и познакомившись с правилами в дальнейшем забывают, что не позволяет решить задания, опирающиеся на знание этого учебного материала.

Цельисследования: выяснить, существуют ли другие способы нахождения НОД и НОК чисел, и рассмотреть различные типы задач на применение правил нахождения НОД и НОК.

Объект исследования:умения и навыки вычисления НОД и НОК

Предмет исследования:алгоритмы вычисления НОД и НОК

Задачи исследования:

- Систематизировать ранее полученные знания о НОД и НОК.
- Расширить спектр задач по теме.
- Исследовать практическое применение НОД и НОК.

Гипотеза исследования: данная работа поможет найти много интересного и полезного мне и моим одноклассникам в дальнейшем изучении математики.

Методы исследования:

- Изучение специальной литературы по данномувопросу: энциклопедии, справочники и учебные пособия.
- Сравнение и анализ.
- Обработка и систематизация полученных данных.

Научная новизна исследования: если рассмотреть различные способы нахождения НОК и НОД, то можно задачи по данной теме решать с большим удовольствием. Выполнение такого вида работы расширяет наш кругозор.

Практическая значимость данной работы заключается в подборе и разборе серии заданий, позволяющих повысить уровень математической подготовки при решении заданий на применение НОД и НОК.

Представленные материалы могут быть использованы учащимися к подготовке к ОГЭ и ЕГЭ по математике.

Глава 1 Методы вычисления НОД и НОК

НОК (Наименьшее Общее Кратное) чисел a и b – самое маленькое число, которое делится на числа a и b без остатка.

НОД (Наибольший Общий Делитель) a и b– самое большое число, на которое числа a и b делятся без остатка.

Перечислим наиболее важные свойства**НОД***и***НОК**, позволяющие лучше изучить природу этих понятий.

Свойства НОД и НОК

Для любых натуральных***a,b, c,d***справедливы следующие свойства.[1]

1. Переместительное свойство:

$$НОД(a,b) = НОД(b,a),\ НОК(a,b) = НОК(b,a).$$

2. $НОД(a,b)\cdot НОК(a,b) = ab$. в частности, если $НОД(a,b) = 1$, то $НОК(a,b) = ab$ (свойство верно только для двух чисел**a**,**b**).

3.Если $НОД(a,b) = n$,то найдутся такие натуральные числа**c**,**d**,что $a = cn$, $b = dn$,причём $НОД(c,d) = 1$.

4.Если $НОД(a,b) = 1$, то $\forall n,k \in N\ \ НОД(a^n, b^k) = 1$.

5.Если $a \vdots b$,то $НОД(a,b) = b$, $НОК(a,b) = a$.

6.Общий множитель**c**можно выносить из-под знаков**НОД**и**НОК**:

$$НОД(ac,bc) = c\cdot НОД(a,b),\ НОК(ac,bc) = c\cdot НОК(a,b).$$

7.Два (три) последовательных натуральных числа взаимно просты: $НОД(a,a+1) = 1$, $НОД(a,a+1,a+2) = 1$.

8.Пошаговое (последовательное) вычисление**НОД**и**НОК:**

[1]Пичурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры- Москва: Просвещение, 1990г.

$$НОД(a,b,c) = НОД(НОД(a,b),c),$$
$$НОК(a,b,c) = НОК(НОК(a,b),c).$$

9.Если**b > a**,то**НОД(a,Ь)= НОД(a,b- a)**.

10.Если при делении числа**a**на число**b**получается ненулевой остаток**q** (т.е. $a = pb + q$, $0 < q < b$), то $НОД(a,b) = НОД(q,b)$.

Знание указанных свойств позволяет на практике упрощать решение многих задач, в которых используются понятияНОДиНОК.

Как уже отмечалось, отысканиеНОДдвух натуральных чисел**a**и**b**требует предварительного разложения этих чисел на простые множители. Это несложно сделать, если числа невелики, но разложить на множители многозначные числа бывает трудно.

Существует способ отыскания**НОД**, требующий лишь умения делить с остатком. Этот способ предложил в свое времяЕвклид,поэтому он называетсяалгоритмом Евклидаи основан на **следующих утверждениях**.

1. Если $a \vdots b$, то $НОД(a,b) = b$.

2. Если при делении**a**на**b**получается ненулевой остаток**q,** т.е. $a = b \cdot p + q$, то $НОД(a,b) = НОД(a,q)$ и задача сводится к более простой задаче отыскания **НОД(a,q)**.

3. Если $b \vdots q$, то $НОД(b,q) = q$, и тогда $НОД(a,b) = q$.

4. Если при делении**b**на**q**получается ненулевой остаток q_1, т.е. $b = q \cdot p_1 + q_1$, то $НОД(q,q_1) = НОД(b,q) = НОД(a,b)$.

5. Продолжая описанный процесс, получаем все меньшие и меньшие остатки. В конце концов, дойдём до остатка, на который будет делиться предыдущий остаток. Этот наименьший отличный от нуля остаток и будет наибольшим общим делителем чисел**a**и**b**.

Основные результаты исследования

Мною были рассмотрены и другие алгоритмы нахождения НОД и НОК, вот они:

- Алгоритм простого перебора
- Нахождение НОД с помощью разложения чисел на простые множители
- Алгоритм Евклида
- Бинарный алгоритм Евклида
- Нахождения НОД для трёх и более чисел
- Нахождение НОД отрицательных чисел
- Алгоритм нахождения НОК путём перебора делителей
- Нахождение НОК с помощью разложения чисел на простые множители
- Нахождение НОК через НОД
- Алгоритм нахождения НОК с помощью умножения

1.1 Алгоритм нахождения НОД методом перебора делителей

Чтобы найти наибольший общий делитель двух данных натуральных чисел можно действовать по определению: выписать все делители этих чисел, выделить среди них общие и выбрать среди всех общих делителей наибольший. ***Пример.*** Найдем все делители чисел *24* и *56.*

24 делится на 1; 2; 3;4; 6; 8; 12; 24.

56 делится на 1; 2; 4; 7; 8; 14; 28;56.

Общими делителями являются числа: 1, 2, 4, 8.

Значит НОД(24; 56)=8

1.2 Алгоритм нахождения НОД с помощью разложения чисел на простые множители

Рассмотрим способ нахождения НОД по разложению чисел на простые множители.Что значит разложение на множители? Это представление числа в виде произведения нескольких множителей. Этот способ встречается очень часто в любых заданиях элементарной математики. Подобные превращения на математическом языке называются тождественными преобразованиями выражений. Смысл любого тождественного преобразования - это запись выражения в другом виде с сохранением его сути.

Способ разложения на множители прост и понятен:

$18=1\cdot18=2\cdot9=3\cdot6=0.5\cdot36=3\cdot3\cdot2=\ldots$

Вариантов разложения - бесконечное количество.

Правило: НОД двух целых положительных чисел a и b равен произведению всех общих простых множителей, находящихся в разложениях чисел a и b на простые множители.

Пример. Даны разложения чисел 240 и 360.

260=2·2·2·2·3·5 340=2·2·2·3·3·5

Следовательно, НОД(240, 360)=2·2·2·3·5=120.

Таким образом, если разложить числа a и b на простые множители и найти произведение всех их общих множителей, то будет найден наибольший общий делитель чисел a и b.

В заключение заметим, что из приведенного правила нахождения НОД и из свойства наибольшего общего делителя, следует формула:

НОД(m·a, m·b)=m·НОД(a, b), где m – любое целое положительное число.

В заключение заметим, что из приведенное правило нахождения
НОД из свойства наибольшего общего делителя,

1.3Алгоритм нахождения НОД методом Евклида с помощью вычитания

Одним из простейших алгоритмов нахождения наибольшего общего делителя является Алгоритм Евклида.Алгоритм Евклида — эффективный алгоритм для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел. Алгоритм назван в честь греческого математика Евклида, который впервые описал его в VII и X книгах «Начал». Алгоритм Евклида известен издавна. Ему уже более 2 тыс. лет.[2]

Чтобы найти наибольший общий делитель двух целых положительных чисел, нужно сначала большее число разделить на меньшее, затем второе число разделить на остаток от первого деления, потом первый остаток - на второй и т.д. Последний ненулевой положительный остаток в этом процессе и будет наибольшим общим делителем данных чисел.

Обозначив исходные числа через aиb, положительные остатки, получающиеся в результате делений, черезr_1, r_2, …, r_n, а неполные частные черезq_1, q_2, ..., q_{n+1}, можно записать алгоритм Евклида в виде цепочки равенств:

$a = bq_1+r_1,$

$b = r_1q_2+r_2,$

. . . . . .

$r_{n-2} = r_{n-1}q_n+r_n,$

[2]Щетников А. И. Алгоритм Евклида и непрерывные дроби. Новосибирск: АНТ, 2003 г.

$r_{n-1} = r_n q_{n+1}$.

Пример.

1)Пусть a = 777, b = 629. Тогда 777 = 629*1 + 148, 629 = 148*4 + 37, 148 = 37*4. Последний ненулевой остаток 37 и есть наибольший общий делитель чисел 777 и 629.

2)По алгоритму Евклида найти НОД чисел 471 и 389.

Пусть a = 471, b = 389. Тогда 471 = 389$\cdot$1 + 82, 389 = 82$\cdot$4 + 61, 82 = 61$\cdot$1+21, 61=21$\cdot$2+19, 21=19.1+2,19=9.2+1.. Последний ненулевой остаток 1 и есть наибольший общий делитель чисел 471 и 389.

Алгоритм Евклида имеет много применений:

- позволяет находить решения *диофантовых уравнений* 1-й степени с двумя неизвестными (диофантовыми уравнениями называют алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, для которых надо найти целые или рациональные решения). Решение уравнений в целых числах очень увлекательная задача.

Диофантовые уравнения имеют, как правило, много решений, поэтому их называют неопределенными уравнениями.

Это, например, уравнения:

3x + 5y = 7;

x2 + y2 = z2;

3x3 + 4y3 = 5z3.

Названы они по имени греческого математика Диофанта, жившего в III в. Его книга «Арифметика» содержала большое количество интересных задач, ее изучали математики всех поколений. [3]

- так же алгоритм Евклида является средством для представления рационального числа в виде цепной дроби, что хорошо представлено в *системах календаря*.

Год - это время, за которое Земля совершает по своей орбите полный оборот вокруг Солнца. Астрономы подсчитали, что год составляет 365 сут. 5 ч 48 мин 46 с или 365,242199 сут. Но пользоваться таким сложным числом очень неудобно. Хотелось бы, чтобы в году было целое число суток.

Впервые порядок в счете времени навел в I в. до н.э. римский император Юлий Цезарь. Он постановил считать одни годы: по 365 суток, а другие по 366, чередуя их по

[3]Л.Ф Пичурин, За страницами учебника алгебры.- М., Просвещение, 1990г.

виду: три года подряд коротких, четвертый - длинный. Гораздо позже, с введением христианского летосчисления, високосным стали считать каждый год, порядковый номер которого делится на 4. Этот календарь в честь Юлия Цезаря называется юлианским. По нему средняя продолжительность года составляет 365 сут. 6 ч. больше истинной лишь на 11 мин 14 с. Однако и это решение оказалось неудовлетворительным. К XVI в. ошибка, накапливаясь, ставила уже около 10 сут.

Следующую реформу календаря Григорий XIII-папа римский. Он создал специальную комиссию для разработки по которой весеннее равноденствие выпадало бы на 21 марта и впредь больше не отставало от этой даты. Решение папы Григория было вызвано трудностями использования юлианского календаря при расчетах дат церковных праздников. Решение комиссии, утвержденное Григорием XIII в 1582 г., было достаточно простым: сдвинуть числа на 10 оставить чередование простых и високосных лет, при этом решили, что если порядковый номер года оканчивается двумя нулями, но число сотен не делится на 4, то этот год простой. Например, по этому правилу 1900 простой, а 2000 - високосный. В наше время расхождение между юлианским и новым, григорианским календарями составляет 13 дней, поскольку с тех пор накопилось еще три дня (в 1700, 1800 и 1900 гг.).

Из 400 лет по юлианскому календарь 100 високосных, а по григорианскому - 97, поэтому продолжительность григорианского года составляет365 , или 365,2425 сут.,т.е. 365 сут. 5 ч 49 мин 12 с, т.е. она больше истинной лишь на 26 с. Долгое время алгоритм Евклида был самым эффективным способом отыскания наибольшего общего делителя, однако с появлением электронно-вычислительных машин ситуация изменилась [4].

Алгоритм Евклида может быть использован, как при помощи **вычитания, так и деления**. Рассмотрим каждый из этих двух способов.

Описание алгоритма нахождения НОД вычитанием:

Из большего числа вычитаем меньшее. Если получается 0, то значит, что числа равны друг другу и являются НОД. Если результат вычитания не равен 0, то большее число заменяем на результат вычитания.

Пример: Найти НОД (40; 24).

40 - 24 = 16 , 24 - 16 = 8 , 16 - 8 = 8, 8 – 8 =0

НОД – это уменьшаемое или вычитаемое. НОД (40, 24) = 8

1.4 Алгоритм нахождения НОД методом Евклида с помощью деления

[4]Википедия (свободная энциклопедия), http://ru.wikipedia.org

Описание алгоритма нахождения НОД делением:

Большее число делим на меньшее. Если делится без остатка, то меньшее число и есть НОД (следует выйти из цикла). Если есть остаток, то большее число заменяем на остаток от деления. Переходим к пункту 1.

Пример: Найти НОД(40;24). Разделим одно число на другое и определим остаток.

40 / 24 = 1 (остаток 16), 24 / 16 = 1 (остаток 8), 16 / 8 = 2 (остаток 0) НОД – это делитель 8. НОД (40; 24) = 8

Получилось правило:

В заключение этого пункта заметим, что

НОД(m·a, m·b)=m·НОД(a, b), где m – любое целое положительное число.

1.5. Бинарный алгоритм нахождения НОД методом Евклида

Бинарный алгоритм вычисления наибольшего общего делителянаходит наибольший общий делитель двух целых чисел. В сравнении с алгоритмом Евклида, этот на практике работает быстрее, но в тоже время немного уступает первому в простоте реализации. Алгоритм был известен еще в Китае 1-го века, но опубликован был лишь в 1967 году, израильским физиком и программистом Джозефом Стайном. Он основан на использовании **следующих свойств НОД**:

1. **НОД(2n, 2m) = 2 НОД(n, m)** (например НОД(8, 18)=2НОД(4,9)= 2*1=2)
2. **НОД(2n, 2m+1) = НОД(n, 2m+1)** (например, НОД(6,15)=НОД(3,15)=3)
3. **НОД(-n, m) = НОД(n, m)** (например НОД(-6; 21)=НОД(6,21)=3)

1.6. Алгоритм нахождения НОД чисел, количество которых больше двух

Нахождение наибольшего общего делителя трех и большего количества чисел может быть сведено к последовательному нахождению НОД двух чисел. ***Теорема:*** наибольший общий делитель нескольких чисел a1, a2, …, ak равен числу dk, которое находится при последовательном вычислении НОД(a1, a2)=d2, НОД(d2, a3)=d3, НОД(d3, a4)=d4, …, НОД(dk-1, ak)=dk.

Пример. Найдите наибольший общий делитель четырех чисел 78, 294, 570 и 36.

Решение. В этом примере a1=78, a2=294, a3=570, a4=36.

Сначала по алгоритму Евклида определим наибольший общий делитель d2 двух первых чисел 78 и 294. При делении получаем равенства 294=78·3+60; 78=60·1+18; 60=18·3+6 и 18=6·3. Таким образом, d2=НОД(78, 294)=6. Затем вычислим d3=НОД(d2, a3)=НОД(6, 570). Опять применим алгоритм Евклида: 570=6·95, следовательно, d3=НОД(6, 570)=6.
Таким образом, наибольший общий делитель четырех данных чисел равен d4=6,
то есть, НОД(78, 294, 570, 36)=6.   Ответ: НОД(78, 294, 570, 36)=6.

Разложение чисел на простые множители также позволяет вычислять НОД трех и большего количества чисел. В этом случае наибольший общий делитель находится как произведение всех общих простых множителей данных чисел.

Пример. Вычислите НОД чисел из предыдущего примера, используя ихразложения на простые множители.
Решение.
Разложим числа 78, 294, 570 и 36 на простые множители, получаем 78=2·3·13, 294=2·3·7·7, 570=2·3·5·19, 36=2·2·3·3. Общими простыми множителями всех данных четырех чисел являются числа 2 и 3. Следовательно, НОД(78, 294, 570, 36)=2·3=6.

Ответ: НОД(78, 294, 570, 36)=6.

Вывод. Вычисление НОД трех и больше числе лучше выполнять при помощи разложения на простые множители

1.7. Алгоритм нахождения НОК методом перебора делителей

Кратное число – это число, которое нацело делится на данное.
Например, кратные числа 6 – это 6, 12, 18, 24 и т.д., поскольку каждое из перечисленных чисел делится нацело на 6. У каждого натурального числа бесконечное множество кратных.

Общее кратное двух чисел – это число, которое делится нацело и на одно, и на другое число.

Пример, пусть даны числа 4 и 6. У них есть общие кратные: 12, 24,36, 48 и т.д. Все эти числа делятся как на 4, так и на 6 (одновременно). Хотя у чисел 4 и 6 бесконечное множество общих кратных, но наименьшее из них одно – это число 12. У двух или нескольких натуральных чисел обязательно есть наименьшее общее кратное.
Иногда НОК можно найти устно. Например, НОК (2, 3) = 6, НОК (3, 4) = 12.

1.8. Алгоритм нахождения НОК с помощью разложения чисел на простые множители

Вычислить НОК(25;60)

Разложить числа на простые множители

25	5	60	2
5	5	30	2
1		15	3
		5	5
		1	

Выписать множители, входящие в разложение одного из чисел:

25=5·5, 60=2·2·3·5.

Добавить к ним недостающие множители из разложения другого числа;

НОК(25;60)=2·2·3·5·5 = 60·5

Найти произведение получившихся множителей.   НОК(25;60)=300

Если в разложении чисел нет одинаковых множителей, то их НОК будет равен их произведению(вычеркивать на шаге №2 будет нечего). Если числа равны, то их НОК будет равен им самим.

1.9. Алгоритм нахождения НОК с помощью умножения

Найти НОК можно, по очереди, для каждого из заданных чисел, выписывая в порядке возрастания все числа, которые получаются путем их умножения на 1, 2, 3, 4 и так далее.

Пример:Найдем НОК (6; 9)

Умножаем число 6, последовательно, на 1, 2, 3, 4, 5.

Получаем: 6, 12, 18, 24, 30

Умножаем число 9, последовательно, на 1, 2, 3, 4, 5.

Получаем: 9, 18, 27, 36, 45

Общее кратное у них =18 ,следовательно НОК(6;9)=18

1.10. Алгоритм нахождения НОК через НОД

Один из способов нахождения наименьшего общего кратного основан на связимежду НОК и НОД. Существующая связь между НОК и НОД позволяет вычислять наименьшее общее кратное двух целых положительных чисел через известный наибольший общий делитель. Соответствующая формула имеет вид:

НОК (a; b) = a*b:НОД (a, b)

Пример: Найти НОК(126;70)

Сначала нам предстоит найти наибольший общий делитель, после чего мы должны вычислить НОК.

Найдем НОД(126;70), используя алгоритм Евклида:

126=70*1+56;   70=56*1+14;   56=14*4, следовательно, НОД(126;70) =14

Теперь находим требуемое наименьшее общее кратное:

НОК(126;70) =126*70: 14=630

Способов нахождения НОК не много, мы рассмотрели самые известные.

Глава 2 Практическое применение НОД и НОК

2.1. Сравнение вычисления НОД разными способами

Рассмотрим вычисление НОД (260, 430)

1)Перебор:

Делители числа 260: 2,2,5,13 (4 шага)

Делители числа 430: 2,5,43 (3 шага)

Сравнивая делители выбираем общие: 2,5.

Таким образом НОД(260, 430)=10.

Для вычисления понадобиться по крайне мере может быть много шагов.

Вывод: достаточно громоздкий способ вычисления.

2) Разложение на простые множители:

260	2		430	2
130	2		215	5
65	5		43	43
13	13		1	
1				

Вывод. Данный способ трудно применить, если в разложение входят простые числа.

Например: НОД(1558, 1394) = 41, 1558=2·19·41, 1394=2·17·41

3)Алгоритм Евклида для нахождения НОД

<u>а) Вычитанием.</u>

430-260=170, 260-170=90, 170-90=80, 90-80=10, 80-10=70, 70-10=60, 60-10=50, 50-10=40, 40-10=30, 30-10=20, 20-10=10, 10-10=0,

НОД(260; 430)=10

Вывод:легок в применении, но может быть достаточно длинным.

<u>б) Делением.</u>

Начальные данные: 260 и 430

430=260·1+170, 260=170·1+90, 170=90·1+80, 90=80·1+10, 80=10·8+0,

Следовательно НОД(260; 430)= 10

Вывод. Легок в применении.

4) Бинарный алгоритм Евклида

НОД(260; 430)= 2НОД(130, 215) = 2·НОД(65, 215)= 2·5=10, т.к. НОД(65, 215) = 5 (5=5·13; 215=5·43)

Вывод. Для применения необходимо знание специальных формул.

Вывод. *Сравним способы вычисления НОД.*

Метод перебора: достаточно громоздкий способ вычисления.

Разложение на множители: Трудно применять, если в разложении есть простые числа.

Алгоритм Евклида с помощью вычитания: лёгок в применении, но может быть очень длинным.

Алгоритм Евклида с помощью деления: лёгок в применении.

Бинарный алгоритм Евклида: необходимо знание формул.

2.2. Задачи на применение НОД и НОК (см. приложение 1)

- Сокращение дробей.
- Нахождение наименьшего общего знаменателя
- Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями
- Решение текстовых задач
- Решение уравнений
- Решение задач из ОГЭ и ЕГЭ

2.3. Решение нестандартных задач (см. приложение 2)

Заключение

Работая над данной темой, я подтвердила свою гипотезу: действительно я нашла много интересного и полезного, есть алгоритмы нахождения НОД и НОК, которые являются удобными и не требующими громоздкого способа вычисления. В своей работе я попыталась показать эффективность использования различных алгоритмов вычисления НОД и НОК чисел, из которых каждый ученик может выбрать те, которые показались ему целесообразными, и применять их на практике.

С помощью различных ресурсов я нашла интересные задачи, для решения которых требуются навыки нахождения НОК и НОД. В этих задачах - ситуации из жизни, с которыми может встретиться каждый. Решить ниже представленные задачи пробовали взрослые и дети-ученики начальной школы, у них это вызвало затруднения.

Надеюсь, что она поможет не только мне, но и другим обучающимся нашего класса. Мир полон тайн и загадок. Но разгадать их могут только пытливые.Собранный мной материал можно использовать на факультативных занятиях, на занятиях математического кружка. Учителя математики могут использовать его при изучении данной темы. Также рекомендуем ознакомиться с моей работой тем сверстникам, которые хотят знать о математике больше, чем рядовой школьник.

Этот материал можно использовать

- учителям на уроках математики и во внеклассной работе;
- учащимся, кто увлекается математикой для расширения своего кругозора;
- а также при подготовке выпускников к ЕГЭ.

Список использованных источников и литературы

1. Виленкин Н.Я. и др. Математика, 6 класс: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2013.- 288с.
2. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Алгебра: Дополнительные главы к школьному учебнику 8 кл.: учебное пособие для школ и классов с углубленным изучением математики.- М.:Просвещение,1996.- 207 с.
3. Пичурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры- Москва: Просвещение, 1990г.
4. Щетников А. И. Алгоритм Евклида и непрерывные дроби. - Новосибирск: АНТ, 2003 г.
5. Ванцян А.Г. Математика: Учеб. для 5 кл. – Самара: Корпорация «Федоров», 2000. - 216 с.
6. Единый государственный экзамен 2018. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ - М.: Интеллект-Центр, 2018. - 96 с.
7. Математика: Школьная энциклопедия / гл. ред. Никольский С.М. - М.: Научное изд. «Большая Российская энциклопедия», 1996
8. Савин А.П. Энциклопедический словарь юного математика. - М.: Педагогика, 1985. – 352 с.

Список используемых источников информации:

1. Википедия (свободная энциклопедия), http://ru.wikipedia.org
2. Сайт "Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов".
3. http://www.rusnauka.com
4. http://www.rusnauka.com

Приложение 1

Задачи на применение НОД

1. Какое наибольшее число наборов можно составить из 48 синих , 48 желтых, 48 зеленых , 72 красных карандашей и 120 картинок – раскрасок? Ответ.24
2. На кружке мягкой игрушки ребята делали народные обереги куклы – мотанки из квадратных лоскутков ткани. Сколько куколок можно смотать из отреза ткани размером 48 см на 40 см без отходов? Какой наибольший размер лоскута для одной куклы? Ответ. 30 кукол, сторона 8 см.
3. В зоошколе у панды Аси 12 одинаковых бамбуковых палочек, а у панды Юсси – 18 таких же. Сколько они могут составить многоугольников с наибольшим числом сторон так, чтобы были использованы все бамбуковые палочки? Ответ. 2 и 3 шестиугольника
4. На птицеферме вырастили птиц , занесенных в Красную Книгу Донбасса : 36 журавлей-красавок, 48 луговых тиркушек , 72 степных пустельг . Во сколько зоопарков можно отправить этих птиц так , чтобы в каждый попало одинаковое количество птиц каждого вида? Ответ. 12
5. Решить уравнение : НОД(а;8)=4. Ответ. 2к-1, к-натур.
6. Садовый участок размером 54 м на 48 м по периметру оградили забором. Для этого через равные промежутки установили столбы для крепления забора. Сколько столбов установили и на каком максимальном расстоянии друг от друга? Ответ.34 ст. , 6 м
7. На летний отдых в один туристический лагерь поехали 424 школьника , а в другой -477. Сколько автобусов с одинаковым числом мест в каждом было заказано? Причем все места были заняты , и никто не стоял. Сколько мест в каждом автобусе? Ответ. 17 авт. по 53 пас.
8. Стол размером 195см на 156 см решили декорировать разноцветными квадратными плитками. Каковы наибольшие размеры плитки? Сколько плиток надо? Ответ.20 пл. по39 на 39.
9. Решить уравнение : НОД(а;8)=а – 10. Ответ.11.
10. Выпускники школы в День знаний сделали подарки первоклассникам. Для этого приготовили 69 карандашей и 46 ластиков-смайликов и раздали малышам поровну каждому. Сколько учеников в первом классе? Ответ.23
11. Какое наибольшее число наборов можно составить из 48 синих , 48 желтых, 48 зеленых , 72 красных карандашей и 120 картинок – раскрасок? Ответ.24

Задачи на применение НОК

1. Из одного центра управления запущены три беспилотника для видеосъемки акватории Азовского моря. Время съемки первого -8 мин, второго – 12 мин, а третьего - 18 мин. Через какое время беспилотники одновременно вернуться в центр управления, если их запускают вновь после очередной перезарядки? Ответ.36 мин.

2. Периоды обращения вокруг Солнца планет Земной группы составляют : Меркурия – 88 суток, Венеры – 225 суток, Земли – 365 суток , Марса 687 суток . Через какой наименьший период времени состоится парад планет , при котором в своем движении по орбитам они оказываются на одной линии? Ответ. 704 года.

3. В аквапарке на трех горках подается различный объем воды под разным давлением. На одной спуск длится 15 сек, на другой – 20 сек, на третьей – 12 сек.Три брата одновременно спускались с этих горок. Через сколько спусков они нырнут в бассейн одновременно? Ответ.60 сек.

4. Один мобильный оператор предоставлял бонусы своим абонентам 1 раз в месяц, а другой – раз в полгода. Через какое наименьшее время абоненты обоих операторов получат бонусы одновременно? Ответ.2года.

5. На полках в музее выставлено 100 экспонатов. Сколько всего экспонатов, если они расставлены на полках по 3 , по 4 , по 5 и по 6 штук? Ответ. 60 экс

6. Военный биатлон открылся парадом военных пехотинцев. Сколько солдат на плацу, если они маршировали строем по 12 человек в шеренге и перестроились по 18 человек в шеренге? Ответ.36 человек.

7. Три друга встретились в компьютерном клубе. Через какое наименьшее время повторится их встреча , если один из них ходит туда 1 раз в 5 дней , второй – раз в 12 дней , третий – раз в 10 дней? Ответ.6о дней.

8. На математическом конкурсе ребята играли в увлекательную древнюю китайскую головоломку Танграм. В одном игровом комплекте было 12 остроугольных, а в другом -15 тупоугольных треугольников. Какое наименьшее число участников могут пользоваться комплектами из одинакового количества каждого вида треугольников? Ответ.60 чел.

9. Маша на день рождения Медведя надула шарики. Сколько было надувных шаров, если Маша , чтобы не скучать, поделила их количество на 2, на 3, на5, на 10, на 15 нацело ? Ответ.30 шаров.

10. На рекламной вывеске ночью вдоль его основания светились разноцветные лампочки через каждые 45 мм. Их решили заменить энергосберегающими и

расположить на расстоянии 60 мм друг от друга. Сколько лампочек было? Сколько энергосберегающих лампочек необходимо? Ответ. 4 и 3.

11. Студент на первом курсе скачивал из интернета в среднем 60 кбайт информации в день, а на втором курсе – 75 кбайт, оплачивая одну и ту же сумму денег за полученный интернетный трафик в неделю. Какой наименьший объем информации он скачивал за неделю? Ответ.300 кбайт.

12. Какое наименьшее число упаковок красок для рисования можно купить по 39 рублей без сдачи, если в наличии только 5рублевые монеты? Ответ. 5.

13. Верно ли, что НОД(36;24) *НОК(36;24)=36*24?

14. Решить уравнение : НОК(а;6)=18 . Ответ.18 или 9.

15. Ученик вычислил НОК(33;198)=99 . Без вычислений другой ученик определил, что допущена ошибка. В чем ошибка? Ответ. 99 не делится на 198 нацело.

16. В теплице посадили в 2 ряда разные сорта орхидей .Цветы одного сорта разместили на расстоянии 15 см между растениями , а другого - на 18 см . Через какое расстояние орхидеи обоих сортов окажутся рядом? Ответ. 90 см

17. В Австралии живет животное, похожее на игрушечного плюшевого медведя. Его название можно прочитать, вычислив НОК(2450;3500) : 0-л , 2-к , 6-м , 4-о , 7-е , 5-а , 3-н , 1-н , 9-с , 0-а. Ответ. Коала

18. Один шаг утки 60 мм , а гуся – 75 мм. На каком наименьшем расстоянии они сделают по целому числу шагов? Ответ. 30 см

19. На соревнованиях спорткаров через каждые 300 м от старта стоит наблюдатель, а через каждые 800 м от старта можно проверить надежность колес. На каком минимальном расстоянии от старта можно проверить колеса рядом с наблюдателем? Ответ.2400м

20. *Из « Арифметики Магницкого , 1703 г. Один человек купил 3 курицы за 46 копеек.Первая курица несла по 3 яйца через 4 дня, вторая – по 2 через 3 дня , третья – по 1 через 2 дня .Продавал человек яйца по 5 штук в день по полкопейки. За какое время окупятся куры? Ответ.240 дней

Рассмотрим примеры:

1. Валя и Вера покупают одинаковые почтовые наборы.Каждый наборсостоит из открытки с конвертом. Валя уплатит за наборы 65 руб., а Вера-на 26 руб. больше. Сколько стоит один набор? Сколько наборов купила Валя? А Вера?

Решение:найдем сколько потратила Вера 65+26=91 (руб.)

Найдем сколько стоит один набор, для этого вычислим НОД (65, 91)

Начальные данные: 65 и 91 $91 = 65 \cdot 1 + 26$

65и26 65=26·2+13

13и26 26= 13·2+0

НОД (65, 91) =13, следовательно стоимость одного набора равна 13рублей и Валя смогла купить 5 наборов, а Вера – 7 наборов.

Ответ: 13 наборов, 5шт.,7шт..

2. Длина комнаты575см,а ширина375см.Пол в комнате нужновыложить декоративными плитками в форме квадрата. Каков наибольший возможный размер такого квадрата? Сколько плиток такого размера, понадобится?

Решение:найдем длину сторону плитки, для этого вычислим НОД (575, 375)

Начальные данные: 575 и 375 575= 375·1+200

200 и 375 375=200·1+175

200 и 175 200= 175·1+25

25 и 175 175 = 25·7+0

НОД(575, 375) = 25, следовательно сторона плитки равна 25 см. Найдем количество плиток: 575: 25= 23, 375: 25=15, 15·23=345(штук)

Ответ: 25 см, 345 штук.

3. Олины родители работают водителями трамваев:мама на2-м маршруте,папа на 5-м. Один рейс 2-го маршрута длится 48 мин, а 5-го 72 мин. У этих маршрутов есть общая конечная станция. Вскоре после началаработы папин и мамин вагоны подошли к ней одновременно. Через какое время они снова встретятся на этой станции?

Найдем через сколько минут вагоны окажутся на конечной станции, для этого вычислим НОК (48, 72)

48	2	72	2
24	2	36	2
12	2	18	2
6	2	9	3
3	3	3	3
1		1	

НОК (48,72) = 72·2=144, следовательно через 144 минуты, т.е. через 2 часа 24 минуты.Ответ: 2 часа 24 минуты.

Приложение 2

Задачи повышенной сложности (с решением)

1. Если натуральное число делится на a и на b, то оно делится и на произведение ab. Каким свойством должны обладать натуральные числа aи b, чтобы это утверждение было верным?

Решение: Возьмём число 20. Пусть число a будет равняться 5, а число b 10 (ведь число 20 делится и на 5, и на 10)

Произведение чисел a и b = 50 (10×5).

Выходит, что натуральное число 20 не делится на произведение ab.

Оставим это же число - 20.

Пусть b также будет равно 10, а число a = 2.

Теперь произведение ab = 20, и выходит что, *натуральное число 20 делится на произведение ab.*

Рассмотрим ещё один вариант:

Возьмём число 91, пусть a = 7, b = 13. И на 7, и на 13 число 91 делится.

Произведение ab = 91 (7×13)91 делится на 91.

Вывод: *в тех случаях, где натуральное число делится и на a, и на b, и на произведение ab, числа a и b являются взаимно простыми.*

2. Определите, может ли сумма двух взаимно простых чисел иметь с одним из этих чисел наибольший общий делитель, больший единицы.

Решение: Рассмотрим примеры, в которых складываются два взаимно простых числа 11+13=24 , 13+17=30, 17+19=36

Ни в одном из примеров сумма двух взаимно простых чисел не имеет с одним из этих чисел НОД, больше единицы.

Ответ: *не может.*

3. Определите, может ли число, составленное из одних восьмерок, делиться на число, составленное из одних троек? А наоборот?

РЕШЕНИЕ: Возьмём число - 888.888 и 33

888.888 : 33 = 26.963

Вывод:*число составленное из одних восьмёрок делится на число составленное из одних троек (плюс, стоит отметить тот факт что сумма цифр числа 888.888 делится на 3 - признаки делимости помогают в этом).*

Теперь рассмотрим может ли число составленное из одних троек делиться на число, составленное из одних восьмёрок.

Возьмём также 6-значное число - 333.333 и 2-значное число - 88

333.333 : 88 = 3.787,875, т.е число нацело не разделилось.

Вывод:*число составленное из одних троек не может делиться на число составленное из одних восьмёрок (также, отметим, что нечётное число не может делиться на чётное).*

4. Найдите НОД и НОК чисел 70a и 55b, где аи b–простые числа, больше 10.

Решение: Найдём НОД (70a; 55b)

Разложим каждое число на простые множители:

70a 2 55b 5

35 5 11 11

7 7 1 1

1 1 b

a

Теперь найдём НОК (70a; 55b)

Также разложим числа на простые множители:

70a 2 55b 5

35 5 11 11

7 7 1 1

1 1 b

a

Для того чтобы найти НОК, перемножим число 11 и число b на 70a = 70a×11×b = 770ab

И выходит что НОК (70a; 55b) = 770ab

5. Цифры трехзначного числа записали в обратном порядке и из большего вычли меньшее. Докажите, что разность делится на 9 и на 11.

РЕШЕНИЕ: Возьмём число 367

В обратном порядке будет число равное 763

Вычтем из большего числа меньшее:

763-367=396

Теперь проверим, делится ли число 396 на число 9 и на число 11:

396:9=44 - **на 9 делится**

396:11=36 - **на 11 делится**

Ответ: разность трехзначного числа записанного в обратном порядке из которого из большего числа вычли меньшее, делится на разность чисел 9 и 11.

6. Может ли НОД двух чисел быть больше их разности?

Решение: Возьмём числа 112 и 154 и найдём их НОД:

112 2 154 2

56   2   77 7
28   2   11 11
14   2   1
7   7
1

НОД (112; 154) = 2×7=14

А разность чисел 112 и 154 = 42

И выходит НОД не больше разности.

Рассмотрим ещё один пример:

Возьмём числа 96 и 64 и найдём их НОД:

96 2   64 2
48 2   32 2
24 2   16 2
12 2   8 2
6   2   4 2
3   3   2 2
1   1

НОД (96, 64) = 2^5=32

НОД не больше разности, а равняется ей.

Ответ: НОД не может быть больше разности или равняется ей.

7. Докажите, что произведение НОД и НОК двух данных чисел равно произведению этих чисел.

РЕШЕНИЕ: Возьмём числа - 480 и 940, а следом найдём их НОД и НОК:

480 2   940 2
240 2   470 2
120 2   235 5
60   2   47 47
30   2   1
15   3
5   5
1

НОД (480; 940) = 2^2×5 = 20

НОК (480; 940) = 480 × 47 = 22.560

Теперь найдём произведение двух данных чисел (480; 940):

480 × 940 = **451.200**

Затем найдём произведение НОД и НОК этих двух чисел:

22.560 × 20 = **451.200**

Ответ: произведение НОДа и НОКа двух данных чисел равно произведению этих чисел.

8. НОК двух чисел 360, а частное от деления этих чисел на их НОД соответственно равны 3 и 5. Найдите эти числа.

Решение: НОК (… ; …) = 360

Найдём эти числа, разделив 360 на их частное, от деления (тех чисел, которые мы получим) на НОД.

360 : 3 = 120 - **первое число**

360 : 5 = 72 - **второе число**

Проверим, подходящие это всё-таки числа или нет:

Для начала найдём НОД чисел 120 и 72

120	2	72	2
60	2	36	2
30	2	18	2
15	3	9	3
5	5	3	3
1		1	

Выходит, НОД (120;72) = $2^3 \times 3 = 24$

Получили НОД равный 24, теперь разделим каждое число на их НОД:

120 : 24 = **5**

72 : 24 = **3**

Всё сходится, значит эти числа 120 и 72

Ответ: первое число = 120, второе число = 72.

9. Спортсменов построили в колонну по 6 человек, а затем перестроили, поставив по 4 человека. Сколько всего спортсменов, если их больше 90, но меньше 100?

Решение: Выпишем числа, которые делятся и на 6, и на 4. Начиная с числа 12 и записывая дальше путём прибавления к этому числу также 12, (т.е 12+12=24; 24+12=36 и тд) доходя до числа меньше 100, так как всего спортсменов больше 90, но меньше 100 ($90<x<100$).

Эти числа: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 86, 96.

Выходит, подходящее число - 96

Ответ: всего спортсменов 96 человек.

10. Наименьшее общее кратное двух чисел 720, их НОД в 12 раз меньше наименьшего общего кратного. Зная, что первое число равно 240, найдите второе число.

НОК (240; …) = 720

НОД В 12 раз <НОДа

Чему равно 2 число - ?

РЕШЕНИЕ: Разделим 720 на 12 и узнаем, чему равен НОД:

720 : 12 = 60

Выясним на какие числа больше 100, делится число 720.

Это числа: 120, 144, 180, 240, 360, 720.

Возьмём за второе число - 360

Разложим на простые множители и найдем НОД чисел 240 и 360

240 2 360 2

120 2 180 2

60 2 90 2

30 2 45 3

15 3 15 3

5 5 5 5

1 1

НОД (240; 360) = $2^{3\times}3\times5 = 120$

НОД этих двух чисел, оказался в 2 раза больше нужного, значит для того чтобы найти второе число нужно 360 разделить на 2:

360 : 2 = 180 - **второе число**

Проверим:

240 2 180 2

120 2 90 2

60 2 45 3

30 2 15 3

15 3 5 5

5 5 1

1

НОД (240; 180) = $2^2\times3\times5=$**60**

Выходит, что второе число, это есть 180.

Ответ: второе число = 180.