муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 40 г. Пензы

XXVI научно-практической конференции школьников г. Пензы
«Я исследую мир»

Секция «Математика»

# «Война и мир» с ОДЗ

Выполнил: Стенькин Александр,
обучающейся 11класса МБОУ СОШ № 40
Руководитель: Лузан Елена Владиславовна
учитель математики МБОУ СОШ № 40

Пенза, 2021

**Содержание**

## Введение

Математика - это одна из важнейших наук в мире. Она все больше приобретает особое значение для человека. Часто в жизни людям приходится выполнять сложные или несложные расчеты, пользоваться вычислительной техникой, находить и применять нужные формулы, владеть приемами геометрических измерений, при этом учитывать все условия, влияющие на результат. Так и в самой математике иногда приходится учитывать определенные условия для получения правильного результата. Именно благодаря этому и появляется условие ОДЗ.

Тема ОДЗ меня заинтересовала, тем, что я в 8-9 классе не до конца понял значение и важность нахождения этой области, поэтому я не уделял должного внимания важности ОДЗ в некоторых заданиях. Это первая причина моей «войны» с ОДЗ.

По математической сути нахождение ОДЗ не является обязательным, часто не нужным, а иногда невозможным — и всё это без какого бы то ни было ущерба для решения. Это вторая причина «войны» с ОДЗ.

Однако в 9-11 классах при решении некоторых типов уравнений и неравенств, я столкнулся с тем, что на них обязательно накладываются определённые условия и в дальнейшем я понял, что действительно существует определённая область, в которой ограничиваются допустимые значения, удовлетворяющие условию задач и уравнений некоторых типов. Во многих случаях ОДЗ оказывает существенное влияние на конечный ответ, а это, я думаю, вы со мной согласитесь, весомая причина «мира» с ОДЗ.

Проблема: уравнения и неравенства, в которых нужно находить ОДЗ, четко не нашли места в курсе алгебры систематического изложения, возможно поэтому я и мои сверстники часто делаем ошибки при решении таких примеров, уделив много времени их решению, но забыв при этом об ОДЗ. В тоже время уравнения и неравенства, на решение которых влияет ОДЗ, все чаще встречаются во второй части ОГЭ и ЕГЭ. Например, если раньше в ЕГЭ профиль было просто тригонометрическое уравнение, то теперь все чаще в открытом банке данных это логарифмически-тригонометрическое или иррационально-тригонометрические уравнение. В этом заключается и актуальность моей работы.

**Цель работы:** показать важность нахождения ОДЗ при решении уравнений и неравенств разного типа

**Задачи:**

1. Изучить теоретический материал.
2. Объяснить свойства и значение ОДЗ.
3. Доказать важность ОДЗ
4. Рассмотреть примеры необязательного нахождения ОДЗ.

**Методы исследования:**

1. теоретическое исследование (анализ литературы, поиск источников);
2. анализ основных задач и понятий ОДЗ;
3. мониторинг

**Гипотеза:** при решении уравнений и неравенств правильный ответ напрямую зависит от ОДЗ .

**Предмет исследования:** уравнения и неравенства

**Объект исследования:** ОДЗ уравнений и неравенств

## Основная часть

### 2.1 Историческая справка.

Любое понятие в науке проходит долгий путь развития. Понятия «функция», «уравнения», «область допустимых значений» и «область определения» в этом плане не исключение.

В работе П. Ферма «Введение и изучение плоских и телесных мест» (1636, опубл. 1679) говорится: «Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины, налицо имеется место». По существу здесь уже идёт речь о функциональной зависимости и её графическом изображении («место» у Ферма означает линию). Изучение линий по их уравнениям в «Геометрии» Р. Декарта (1637) также указывает на ясное представление о взаимной зависимости двух переменных величин. Однако термин «функция» впервые появляется лишь в 1692 у Г. Лейбница и притом не совсем в современном его понимании. Г. Лейбниц называет функцией различные отрезки, связанные с какой-либо кривой (например, абсциссы её точек). Первое определение функции в смысле, близком к современному, встречается у И. Бернулли (1718): «Функция — это величина, составленная из переменной и постоянной». В основе этого не вполне отчётливого определения лежит идея задания функции аналитической формулой. Та же идея выступает и в определении Л. Эйлера, данном им во «Введении в анализ бесконечных» (1748): «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств». Впрочем, уже Л. Эйлеру не чуждо и современное понимание функции, которое не связывает понятие функции с каким-либо аналитическим её выражением. В его «Дифференциальном исчислении» (1755) говорится: «Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называют функциями вторых». Близко к современному и определение Н. И. Лобачевского: «…Общее понятие функции требует, чтобы функцией от $x$ называть число, которое даётся для каждого $x$ и вместе с $x$ постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подаёт средство испытывать все числа и выбирать одно из них, или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной».

Развитие понятие «функции» привело к определению ОДЗ для функции. Областью определения (допустимых значений) функции Y называется совокупность значений независимой переменной X, при которых эта функция определена, т. е. область изменения независимой переменной (аргумента).

ОДЗ или область определения – это лишь следствие возникновения и развития различных условий в функциях, задачах, неравенствах и уравнениях.

### 2.2. Два синонима -«ОДЗ» и «область определения функции»

Дадим четкое определение двух синонимов в математике:

Для выражения или уравнения ОДЗ -это все значения переменной, при которых не нарушаются правила математики, т.е. выражение определено (имеет смысл).

Для функции область определения -множество значений независимой переменное х, при которых эта функция определена, т.е. имеет смысл.

Можно сравнить ОДЗ и оболочку теннисного мячика: представьте себе, оболочка мячика и внешнее его строение – это наше ОДЗ, а то, как мячик отскакивает от пола – это функция, которой данные условия соответствуют. Тогда можно сказать, что если мы нарушим оболочку этого мячика (или, проще говоря, порвём его), то мячик перестанет так же хорошо отскакивать, как раньше, то есть если мы нарушаем ОДЗ, то решения не будет.

Можно привести множество практических примеров, где мы, не задумываясь над понятием «области допустимых значений», принимаем решения, на которое это понятие влияет. Например, человек может прыгать (с дивана, со стола, т.е. с небольшой высоты), но нельзя прыгать с 9 этажа, т. е. высота прыжка, ограниченна-это ее область допустимых значений; можно прикасаться к току, но если выше 0,1 Ампер - это смертельно-опять ОДЗ. Из уроков биологии и физики мы знаем, что человек слышит звук, частота которого находится в интервале от 16 до 20000Герц-это наша область допустимых значений (с возрастом этот интервал уменьшается), а у некоторых животных ОДЗ звуковых восприятий больше (биологи доказали, что слоны, бегемоты, киты и многие другие животные способны издавать инфразвук (частота меньше 16 Гц), а дельфины, крокодилы, летучие мыши для своих «переговоров» используют ультразвук (выше 20000Гц)). Да и просто в жизни, когда мы идем в магазин, область наших допустимых значений-это деньги, которыми мы располагаем для покупки, и превышать этот лимит, т.е. область, мы не можем. Так и для каждой функции есть свои ограничения, которые надо просто ЗНАТЬ!

### 2.3. Мониторинг

Самое главное для меня хорошо сдать ЕГЭ (т.е. не потерять баллы на «глупых» ошибках) по математике, а для этого, в том числе, надо знать: когда, зачем и как находить ОДЗ.

Мы с учителем математики составили тест, состоящий из 10 уравнений и неравенств и попросили решить его учеников 10-11 класса.

Количество учащихся - 26.

Справились - 42 %,

Ошиблись-58% (ошибки: забыли об ОДЗ-15%, неверно составили ОДЗ-9%, записали ОДЗ, но забыли проверить корни на принадлежность ему-76%.)

Учли опасность ОДЗ (учли) - 68 %,

Необязательность ОДЗ (учли) - 36 %.

Вывод по результатам мониторинга: более половины класса неверно решили задание, т. к забыли учесть ОДЗ. Значит, на ЕГЭ недополучат как минимум 4 первичных балла (задание 12, 14).

### 2.4. «Мир» с ОДЗ или «место» ОДЗ при решении уравнений и неравенств.

Важно! Для нахождения ОДЗ мы не решаем пример! Мы решаем кусочки примера для нахождения запретных мест.

А как искать это самое ОДЗ? Внимательно осматриваем пример и ищем опасные места. Места, в которых возможны запретные действия. Таких запретных действий в математике очень мало.

Алгоритм нахождения ОДЗ:

1. Определите вид запрета.
2. Найти значения, при которых выражение не имеет смысла.
3. Исключить эти значения из множества действительных чисел R.

Область допустимых значений оберегает нас иногда от серьёзных ошибок.

Заметим, преобразования при решении уравнений или неравенств могут:

- не влиять на ОДЗ;

- приводить к расширенному ОДЗ;
- приводить к сужению ОДЗ.

Известно также, что в результате некоторых преобразований, изменяющих исходное ОДЗ, может привести к неверным результатам.

**2.4.1. Функции для которых важна ОДЗ:**

| Тип функции | ОДЗ |
|---|---|
| Обратная зависимость | $y = \frac{a}{x} : x \neq 0.$ |
| Корень | $\sqrt{x} = y : \begin{cases} x \geq 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$ |
| Показательная функция | $y^x = z : \begin{cases} y > 0; \\ z > 0. \end{cases}$ |
| Логарифмическая функция | $\log_x y = a : \begin{cases} x > 0; \\ x \neq 1; \\ y > 0. \end{cases}$ |
| Тригонометрические функции | $-1 \leq \sin x \leq 1; -1 \leq \cos x \leq 1;$ $y = \mathrm{tg} x : x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ $y = \mathrm{ctg} x : x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ |

таб.1 Функции

Отсюда будет ОДЗ для решения разных видов уравнений и неравенств.

**2.4.2. Дробно-рациональные уравнения и неравенств.**

При решении данного вида уравнений и неравенств необходимо учитывать, правило математики, с которым мы познакомились еще в начальной школе: «На ноль делить нельзя!». Отсюда следует, что знаменатель не должен быть равен нулю.

**2.4.3. Решение иррациональных уравнений и неравенств.**

Таб. 2 Иррациональные уравнения и неравенства. Схема решений.

| Уравнения | Неравенства |
|---|---|
| $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ | $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ |
| $\sqrt{f(x)} = g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x)^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ | $\sqrt{f(x)} > g(x) \leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x)^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{array} \right.$ $\sqrt{f(x)} < g(x) \leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) < g(x)^2 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ |

**2.4.4. Решение логарифмических уравнений и неравенств.**

Таб. 3. Логарифмические уравнения и неравенства. Схема решения.

| Уравнения | Неравенства |
| --- | --- |
| $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$<br>Проверить достаточно только одно условие либо для f(x) , либо для g(x) | При a>1<br>$\log_a f(x) < \log_a g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$<br>При 0<a<1<br>$\log_a f(x) < \log_a g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$ |
| $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$<br>$\leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ | $\log_{h(x)} f(x) \geq \log_{h(x)} g(x) \leftrightarrow$<br>$\begin{cases} h(x) > 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$<br>$\begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$ |

Примечания: при решении уравнений можно ОДЗ не решать, а проверить с помощью подстановки корни уравнения на принадлежность ОДЗ, но решая систему, ОДЗ тоже решается. Иногда можно решать неполное ОДЗ, если из одного условия вытекает другое.

### 2.4.5. Опасность ОДЗ или примеры уравнений, когда ОДЗ обязательно учитывать.

Известно, что в результате некоторых преобразований, изменяющих исходное ОДЗ, мы можем прийти к неверным решениям.

№1.

Помню, как на первом пробнике ОГЭ по математике в школе мне досталось во второй части задание номер 21:

Решите уравнение:

$x^2-3x+\sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 28.$

Я так обрадовался уравнению, что быстро его решил: все перенес в одну сторону, корни взаимно уничтожились и квадратное уравнение решилось довольно легко. Получил $x_1=7$, $x_2=-4$. Уравнение решено! Я был уверен в правильности ответа. И, получив проверенную работу, увидел за это уравнение 0 баллов! Я думаю, вы уже поняли почему? Да, я забыл об ОДЗ и не сделал проверку! После этого я запомнил, что в решении уравнений второй части может встретиться опасность или «подводный камень» в виде преобразования, которое расширяет область допустимых значений. В частности, в данном уравнении надо учитывать, что даже если при приведении подобных корни взаимно уничтожились, но т.к. они были в данном уравнении, следует учитывать их ОДЗ и начинать именно с него, а не с решения уравнения.

№2.

$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ Перенесем $\frac{1}{x}$ из правой части в левую, приведем подобные члены уравнения и получим, что x=0. Однако 0 не входит в ОДЗ.

№3.

$\sqrt{x^2-1}=0$ Преобразуем левую часть, используя формулу разности квадратов, и придем к уравнению $\sqrt{x-1}\times\sqrt{x+1}=0$. Отсюда x = 1 или x = -1. При x = -1, $\sqrt{x-1}$ не существует. Однако ответ: x=1 неполный, а потому неверен.

№4.

$(x+1)\sqrt{x}=0$. Возведем обе части уравнения в квадрат - в данном случае вроде бы безобидное действие, основанное на очевидном соображении: число равно нулю тогда и только тогда, когда его квадрат равен нулю. Получим $(x+1)^2 \bullet x=0$. Однако полученное уравнение имеет корень -1, которого нет у исходного уравнения.

№5.

$\frac{x^2-1}{x-1}=2x$ Сократим дробь в левой части и получим $x+1=2x$. Отсюда x=1, что не выходит из ОДЗ.

Важно! Сначала выписать ОДЗ, а потом решать уравнение.

№6. Показательное уравнение.

Решить уравнение

$$x^{x^2-2x}=x^3$$

Ошибка: просто приравнять показатели и решить уравнение $x^2-2x=3$

Верное решение: Не пугайся, тут все просто:

ОДЗ: x>0

Теперь возможны два варианта: либо основание степени равно 1, либо показатели одинаковые: x=1, x=-1, x=3

Теперь вспомним ОДЗ: корень x=–1 – «сторонний».

Ответ: 1; 3.

№7 Логарифмическое уравнение.

Решите уравнение: $\log_x(x+2)=2$

ОДЗ:$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$x^2=x+2$, решая уравнение, получаем x=-1, x=2

С учетом ОДЗ нужно отбросить отрицательный корень: x=-1

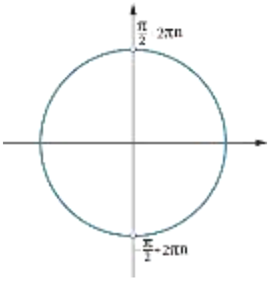
**Ответ:** 2.

№8. Тригонометрическое уравнение.

Решить уравнение: $\frac{sin^2x}{cosx}=tgx$

ОДЗ: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, n∈Z.

Для наглядности изображу область допустимых значений на единичной окружности в виде выколотых точек:



$$\frac{sin^2x}{cosx} = tgx$$

sinxcosx·sinx=tgx
tgx·sinx=tgx
tgx(sinx—1)=0

tgx=0 или sinx=1
x=πn,n∈Zx=$\frac{\pi}{2}$+2πk,k∈Z
Очевидно, что вторая группа корней не подходит по ОДЗ.
**Ответ:** x=πn, n∈Z.

### 2.4.6. ОДЗ-решение уравнения.

И наконец, в массе примеров нахождение ОДЗпозволяет получить ответ без громоздких выкладок, а то и вовсе устно.

1. ОДЗ представляет собой пустое множество, а значит, исходный пример не имеет решений.

1) $\sqrt{x-3} = \sqrt{2-x}$ 2) $\lg\frac{1}{x} = \lg(-x)$ 3) $\sqrt{\log_2 x} = \log_x(1-x)$

2. В ОДЗнаходится одно или несколько чисел, и несложная подстановка быстро определяет корни.

1) $\sqrt{x-3} = \sqrt{3-x}$ , *x=3*

2) $\sqrt{\log_2 x} - \sqrt{\log_{0,5} x} = 1$ Здесь в ДЗОнаходится только число 1, и после подстановки видно, что оно не является корнем.

3) $\sqrt{x^2-5x+6} \le \sqrt{3-x} + \sqrt{x-2}$ В ОДЗнаходятся два числа: 2 и 3, и оба подходят.

4) $\sqrt{1-\sqrt{1-x}} > \sqrt{x^2-x}$ В ОДЗнаходятся два числа 0 и 1, и подходит только 1.

Эффективно может использоваться ОДЗв сочетании с анализом самого выражения.

5) $\sqrt{x^2-2x} + \sqrt{4-x^2} < x$ ОДЗ: $\begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ x = 2 \end{cases}$ Но в правой части неравенства могут быть только положительные числа, поэтому оставляем x=2. Тогда в неравенство подставим 2.

6) $\sqrt{a-|x|} + \sqrt{x-a} = -a$ Из ОДЗ следует, что $a \ge |x|$, откуда имеем $a \ge 0$. Из рассмотрения правой части уравнения видим, что $a \le 0$. Поэтому необходимо равенство a=0, после чего решение ясно.

3. ОДЗ используется вместе с анализом функций, входящих в пример.

1) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+1}=1$ Из ОДЗ имеем: $2x+1\geq 0$. Но тогда $2x+3\geq 2$ и $2x+3\geq \sqrt{2}$. Так как $\sqrt{2}>1$, то решений нет.

2) $\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=x^2+3$

Из ОДЗ имеем: $x\geq 5$. Так как справа стоит положительное выражение, то $\sqrt{x-5}>\sqrt{2x-1}$, а значит, $x-5>2x-1$. Решая последнее неравенство, получим x<- 4, что не входит в ОДЗ. Поэтому решения нет.

3) $\sqrt{2-x}+x-3=\sqrt{x-1}.$ ОДЗ: $1\leq x\leq 2$ . Так как $x\geq 1$, то

$\sqrt{2-x}+x-3\leq \sqrt{2-1}+x-3=x-2\leq 0$

С другой стороны, $\sqrt{x-1}\geq 0$. Равенство возможно только тогда, когда каждая часть уравнения равна 0, т. е. при x=1. После подстановки этого значения $x$ убеждаемся, что решений нет.

4) $x^2+x+\sqrt{x+1}=2+\sqrt{2}$

ОДЗ: $x\geq -1$. Рассмотрим уравнение на промежутке [-1; 0).

На нем выполняются такие неравенства $x^2+x\leq 0$ и $\sqrt{x+1}\leq 1$, поэтому $x^2+x+\sqrt{x+1}\leq 1$ и решений нет. При $x\geq 0$ функции $x^2+x$ и $\sqrt{x+1}$ строго возрастающие, и потому каждое свое значение принимают только один раз. Значит, уравнение не может иметь больше одного корня. А один корень виден «невооруженным глазом» - это 1. Поэтому ответ: x=1.

5) $\lg_x(x^3+1)=\lg_{x+1}(x^2-2x)$. ОДЗ: x>2. При этом $\lg_x\left(x^3+1\right)>\lg_x x^3=3, \lg_{x+1}(x^2-2x)<\lg_{x+1}(x^2+2x+1)=2$. Значит, исходное равенство невозможно и решений нет.

А теперь я приведу пример, попавшийся нам на уроке алгебры, решить его было нам не под силу, но найдя ОДЗ всё стало ясно.

Найдите целочисленный корень уравнения $\dfrac{\log_2(7+6x-x^2)-\log_2(x-2)}{10x-24-x^2}=2$ Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases}7+6x-x^2>0\\ x-2>0\\ 10x-24-x^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-7)(x+1)<0\\ x>2\\ (6-x)(4-x)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-1;7)\\ x>2\\ x_{1,2}\neq 4;6\end{cases} \quad x\in(2;4)\cup(4;6)\cup(6;7);$$

Целочисленное решение возможно лишь при x=3 и x=5. Проверкой находим, что корень x=3 не подходит, а значит ответ: x=5.

### 2.5. «Война» с ОДЗ или необязательность ОДЗ.

Иногда дело нахождение ОДЗвовсе не является обязательным, часто не нужным, а может и невозможным - и все это без какого бы то ни было ущерба для решения примера. Часто нам помогает просто логика рассуждений прийти к выводу, что можно сэкономить время, особенно, когда в рамках ОГЭ или ЕГЭ оно ограниченно, и не находить ОДЗ вообще, либо найти его частично. Поэтому поиски ОДЗ являются часто просто лишней работой, без которой прекрасно можно обойтись, доказав тем самым понимание происходящего. Тут можно привести громадное число примеров, поэтому я выберу только наиболее типичные.

Главным приемом решения являются в этом случае равносильные преобразования при переходе от одного уравнения (неравенства, системы) к другому.

Таким образом «война» с полным ОДЗ и возникает. Важно заметить! Только если ты хорошо знаешь теорию, умеешь логически рассуждать, чувствуешь все «за» и «против», можешь не находить ОДЗ.

№1. Решите уравнение:

$\sqrt{x+6}=9$

Если справа стоит положительное число, а под корнем линейная зависимость, то ОДЗ квадратного корня можно и не искать, а сразу смело обе части возвести в квадрат.

x+6=81

x=75

Ответ: 75

№2

Решите уравнение: $\sqrt{x^2+6x+9}=x^2+1$

Заметим, что под корнем- формула сокращенного умножения-квадрат суммы, а справа всегда положительное число.

$\sqrt{(x+3)^2}=x^2+1$

$|x+3|=x^2+1$

$x+3=x^2+1$ или $-x-3=x^2+1$

$x^2-x-2=0$ $x^2+x+4=0$

x=2;x=-1 нет решений

Ответ: 2; -1

№3

Решите уравнение $\frac{3}{4}=\frac{2x-1}{x+3}$

Это пропорция, решая такие уравнения в 6 классе об ОДЗ и речи не ведут, а просто используют основное свойство пропорции.

3(x+3)=4(2x-1)

3x+9=8x-4

x=2,6

Ответ: 2,6

№4 Решите уравнение:

$$\frac{1}{x}=x \Leftrightarrow x^2=1.$$

ОДЗ не нужна, ибо, найдя те значения x, при которых $x^2=1$, мы не можем получить x=0.

Ответ: ±1

№5 Решите уравнение:

$$\lg(x+3)=2 \Leftrightarrow x+3=100$$

x=97

Ответ: 97

№6 Решите уравнение:

$$\sqrt{6-4x-x^2}=x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} 6-4x-x^2=(x+4)^2 \\ x+4\geq 0 \end{cases}$$

ОДЗ не нужна, ибо подкоренное выражение равно квадрату некоторой функции, а потому не может быть отрицательным.

№7. Решите уравнение:

$\lg_3(3^x-8)=2-x \Leftrightarrow 3^x-8=3^{2-x}$. ОДЗ не нужна, так как выражение $3^{2-x}$ всегда положительно.

№8 Решите неравенство:

$(x^2+x+1)^x<1 \Leftrightarrow (x^2+x+1-1)x<0 \Leftrightarrow (x^2+x)x<0 \Leftrightarrow x^2(x+1)<0 \Leftrightarrow x<-1$

И здесь формально все верно. В общем случае при решении неравенства вида $f(x)^{g(x)}<1$ равносильность выглядит так:

$$f(x)^{g(x)}<1 \leftrightarrow \begin{cases} (f(x)-1)g(x)<0 \\ f(x)>0 \end{cases}$$

В данном примере условие f(x)>0 приводит к решению неравенства $x^2+x+1>0$, которое выполняется всегда. Поэтому, опустив это неравенство в своем решении мы ничего не нарушили.

В целом эффективность способа равносильных преобразований вроде бы ясна. С их помощью мы добираемся до ответа и без поисков ОДЗ. Значит ли это, что имеется некий универсальный способ и осталось только научиться им пользоваться? Но это не совсем так. Тому несколько причин. Теорем о равносильных преобразованиях довольно много, они непросты для запоминания, и уверенное владение ими – дело не простое. Часто, пользуясь равносильными преобразованиями, начинаешь ставить этот знак при любых переходах от одного уравнения к другому, как действительно равносильных, так и не являющихся таковыми. Теоремы же эти быстро забываются.

И наконец, возможно, самое существенное. Дело в том, что равносильность гарантирует правильность ответа, если совершаются какие-то преобразования самого уравнения, но не используется при преобразованиях только в одной из частей. Приведение подобных, сокращение, использование различных формул не попадают под действие теорем о равносильностях.

Можно привести примеры, где ситуация ясна и без нахождения ОДЗ.

№9 Решите уравнение:

$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}=3$

Равенство невозможно, ибо при вычитании из меньшего выражения большее должно получатся отрицательное число.

Ответ: решений нет.

№10 Решите уравнение:

$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=-1.$

Сумма двух неотрицательных функций не может быть отрицательной.

Ответ: решений нет

### 2.6.Можно ли писать слово «ОДЗ» на экзамене?

Изучая и привыкнув на уроках алгебре к понятию ОДЗ, нам вдруг говорят, что на ЕГЭ, решая вторую часть лучше не использовать эти три буквы и мы стали уже бояться, а не снизят ли баллы, если написать «ОДЗ». Я нашел ответ на этот вопрос специалистов ФИПИ – Федерального института педагогических измерений: при выполнении заданий с развернутым ответом ЕГЭ по математике профильного уровня участник экзамена должен привести полное обоснованное решение задачи. При этом он может выбирать любой математически корректный способ решения, а также формы записи решения и ответа.Ни в одном документе ФГБНУ "ФИПИ" нет запрета на использование тех или иных понятий, фактов, способов записи.

В частности, полное, обоснованное решение, корректно использующее понятие "Область допустимых значений", а также запись ответа с использованием знака объединения при проверке работ, согласно критериям, оценивается максимальным баллом.

Вот и всё. Значит писать «ОДЗ» можно, только делать это надо правильно. Ведь, по определению, область допустимых значений уравнения или неравенства – это множество значений переменной, при которых обе части данного уравнения имеют смысл.

Например, ОДЗ неравенства

$$\frac{1-\sqrt{1-4\log_4{}^2 x}}{\log_4 x} \le 2$$

задается системой условий:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1-4\log_4{}^2 x \ge 0 \\ \log_4 x \ne 0 \end{cases}$$

Если написать просто «ОДЗ: x>0» - это ошибка. И не потому, что написаны буквы О, Д и З, а потому, что не полностью указана область допустимых значений.

**Заключение**

Причина учёта ОДЗ кажется очевидной, но люди всё равно будут противиться тому, тому, чтобы лишний раз записать ОДЗ.  И сколько бы ни было различных презентаций, пояснений в учебниках и объяснений со стороны учителей, «война», не смотря ни на что, ещё не завершилась и даже не собирается завершаться, что и подтверждает актуальность и важность данной темы.

Подводя итоги, можно сделать вывод, что наша гипотеза подтвердилась- нахождение ОДЗ важный этап решения уравнений и неравенств. Поэтому я бы хотел посоветовать всем: «Ребята, давайте с ОДЗ жить дружно!», т.е. лучше все же всегда учитывать ОДЗ, так как сразу сказать, что в какой-то определённой задаче нет подвоха, удаётся далеко не всегда.

В процессе работы над исследованием я понял, что универсального метода решения уравнения и неравенств нет. Каждый раз, если хочешь понять, что делаешь, а не действовать механически, возникает дилемма: а какой способ решения выбрать, в частности искать ОДЗ или не надо? Я думаю, что полученный мною опыт поможет мне решить эту дилемму. Я перестану делать ошибки, научившись правильно использовать ОДЗ. Получится ли у меня это, покажет время, точнее ЕГЭ.

Своей работой я хотел привлечь внимание к проблеме неверного решения уравнений и неравенств по причине забытого ОДЗ. Результаты моего исследования могут помочь ученикам не допустить ошибки при решении уравнений и неравенств, в которых от ОДЗ зависит конечный ответ.

**Литература.**


1. «Энциклопедия для детей «МАТЕМАТИКА»» том 11, М.: Аванта +; 2002.
2. Газета «Математика» №46,15. 1998.
3. Газета «Математика» №15. 2002.
4. Газета «Математика» №17. 2002.
5. Ф.П. Яремчук, П.А. Рудченко Справочник «Алгебра и элементарные функции» Киев: «Наукова думка»; 1976.
6. Л.Д. Лаппо, А.Н. Филонов ЕГЭ «Математика» типовые текстовые задания. М.: «Экзамен», 2004.
7. И.Г.Алексеев. «Математика, подготовка к ЕГЭ», Саратов: «Лицей», 2005,
8. ЕГЭ «Математика» контрольные измерительные материалы, М.: «Просвещение», 2006.
9. «Избранные вопросы школьного курса математики», выпуск 3, Самара: Самарский областной институт повышения квалификации и переподготовки работников образования, 2001.
10. В.И. Рыжик. «25000 уроков математики»., М.: «Просвещение», 1993.
11. А.Г. Мордкович. «Алгебра 8», «Алгебра 9», «Алгебра и начала анализа 10-11» задачник и учебник, М.: «Мнемозина», 2002.
12. Г.И. Глейзер. «История математики в школе VII-VIII классы». М.: «Просвещение», 1982.