Управление образования города Пензы
МКУ «Центр комплексного обслуживания и методологического обеспечения учреждений образования» г. Пензы
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа №28 города Пензы
имени Василия Осиповича Ключевского

XXVI научно-практическая конференция школьников г. Пензы
«Я исследую мир»

Диофантовы уравнения

Выполнил:
Стюхин Артём Алексеевич
МБОУ СОШ N28 г. Пензы
им. В.О.Ключевского, 7 класс

Руководитель:
Бутусова Татьяна Валерьевна
учитель математики
МБОУ СОШ N28 г. Пензы
им. В.О.Ключевского

Пенза 2021

Содержание

Введение

У осьминогов – по 8 ног, у морских звёзд – по 5.
Сколько в аквариуме морских животных, если всего конечностей – 39?

Впервые о Диофанте и его уравнениях я узнал в 6 классе, когда решал олимпиадные задачи по математике. Заинтересовавшись столь трудным и таким непонятным на тот момент объектом математики, я изучил информационные источники, достаточные для понимания и решения неопределенных уравнений Диофанта. Я с уверенностью могу сказать, что изучение новых методов решения не только интересно, но и необходимо.

Проблема - диофантовы уравнения не изучаются в школьной программе, но умение решать данные уравнения необходимо для решения олимпиадных и экзаменационных задач.

Актуальность исследования заключается в том, что подход Диофанта к решению данных уравнений особенно интересен. Способы решения его уравнений довольно просты, несмотря на то, что уравнения могут состоять из двух, трёх и более переменных.

Диофантовы уравнения присутствуют во многих олимпиадных заданиях. Помимо этого они применяются в молекулярной физике и органической химии, системах цифровой подписи и шифрования, в экономике и теории вероятностей.

Цель моего исследовательского проекта - узнать о диофантовых уравнениях, изучить способы решения данных уравнений, сферы их применения.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить ряд **задач:**

- изучить материалы о творчестве Диофанта;
- ознакомиться с «диофантовым анализом»;
- исследовать способы решения неопределенных уравнений первой степени;
- подвести итог важности вклада Диофанта в мир алгебры и арифметики.

В нашей работе мы выдвинули следующую **гипотезу: у**мение решать диофантовы уравнения поможет выполнить олимпиадные задания, а также в дальнейшем подготовиться к решению задач № 18 ЕГЭ.

Объект исследования - математика, теория чисел.

Предмет исследования – диофантовы уравнения.

В работе использовались следующие **методы исследования**:

- изучение, обработка и анализ документов;
- поисковый метод - использование научной и учебной литературы, а также поиск необходимой информации в сети Интернет;
- исторический метод, который позволил более детально изучить историю диофантовых уравнений;
- практический метод решения задач;
- анализ полученных в ходе исследования данных.

Практическая значимость данной работы состоит в том, что созданная нами брошюра с зашифрованными знаменательными датами нашей школы может быть использована в школьной практике: на уроках математики, занятиях кружка. Публикация статьи по теме данного исследования в школьной газете «Из первых уст» может привлечь большее количество учащихся к решению и составлению диофантовых уравнений.

Глава 1.
Диофант и его труды.

Одним из самых своеобразных древнегреческих математиков был Диофант Александрийский[1], труды которого имели большое значение для алгебры и теории чисел. До сих пор не выяснены ни год рождения, ни дата смерти Диофанта; полагают, что он жил в III в. н.э. В одном из древних рукописных сборников задач в стихах жизнь Диофанта описывается в виде следующей алгебраической загадки, представляющей надгробную надпись на его могиле:

Прах Диофанта гробница покоит; дивись ей – и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребёнком.
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругою он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец;
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил.
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,
Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Самый распространенный способ решения данной задачи – составление уравнения. Примем за x – возраст Диофанта, тогда можем составить уравнение:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x;$$

$$\frac{14x}{84} + \frac{7x}{84} + \frac{12x}{84} + \frac{42x}{84} - \frac{84x}{84} = -9;$$

$$-\frac{9x}{84} = -9;$$

$$x = 84.$$

Наиболее интересным способом решения задачи мне показался следующий:

обратим внимание на то, что возраст Диофанта должен делиться на 6, 12, и 7. Наименьшее общее кратное этих чисел равно 84. Это и есть возраст, в котором умер Диофант. Если он предполагал за этой задачей данное решение, то оспорить его ум невозможно.

Наиболее загадочным представляется творчество Диофанта.

Из работ Диофанта самой важной является «Арифметика», из 13 книг которой только 6 сохранились до наших дней. Эти книги были открыты в Венеции в 1463 г. Региомонтаном, который в связи с этим писал, что в произведении Диофанта сосредоточен «весь цвет арифметики, искусство неизвестной». В его книге «Арифметика» впервые встречаются уравнения, решения которых нужно найти на множестве целых чисел. Такие уравнения впоследствии получили название «диофантовых уравнений»[2].

---

[1] https://ru.wikipedia.org/wiki/Диофант_Александрийский

[2] Жмурова, И. Ю. Диофантовы уравнения: от древности до наших дней / И. Ю. Жмурова, А. В. Ленивова // Молодой ученый. – 2014. – №9. –С. 1–5.

«Арифметика» Диофанта представлена как ряд задач. В предисловии Диофант сообщает, что написал её в качестве задачника для своих учеников. Он использовал специальный символ для неизвестного, а также отдельные символы для его квадрата и куба. В основном «Арифметика» посвящена решению уравнений.

В сохранившихся книгах Диофанта содержится 189 задач с решениями. В первой из сохранившихся книг изложены задачи, приводящиеся к определённым уравнениям первой и второй степени. В остальных пяти рассматриваются в основном неопределённые уравнения. В этих книгах нет ещё систематической теории неопределённых уравнений, методы решения меняются от случая к случаю. Диофант довольствуется каким-нибудь одним решением, целым или дробным, лишь бы оно было положительным.

Диофант утверждает, что «невозможно решение абсурдного уравнения 4 = 4x + 20». Сейчас данное утверждение вызывает улыбку, ведь в 21 веке каждый человек знает, что это явно неабсурдное уравнение и решить его возможно. Уравнение приводит к отрицательному значению: x = - 4. Но без понятия нуля, которого Диофант не знал, понятие отрицательного числа логически невозможно. Замечательные новшества Диофанта, кажется, были проигнорированы последующими поколениями.

Прошло полторы тысячи лет, пока его работы были замечены и должным образом оценены: его трактат сыграл центральную роль в расцвете алгебры в XVII веке. Всем известные сегодня линейные алгебраические уравнения вида $ax + by = c$ носят его имя.

Глава 2. Линейные диофантовы уравнения.

2.1. Что такое диофантовы уравнения?

Отвечая на этот вопрос, мы думаем рациональнее начать с определения.

Диофантовы уравнения – алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, для которых надо найти целые или рациональные решения. При этом число неизвестных в уравнениях больше числа уравнений[3].

Задачи Диофантовой «Арифметики» сводятся к уравнениям или к системам уравнений с целыми коэффициентами. Эти системы неопределенные, т.е. число уравнений в них меньше числа неизвестных переменных. Кроме того, решения требуется найти только целые, часто натуральные.

Теория решения подобных уравнений является классическим разделом элементарной математики. В ней не приходится писать сложные и громоздкие формулы, необходимо проводить лишь аккуратные рассуждения с использованием определенных понятий теории чисел и связанные в стройную логическую конструкцию.

2.2. Решение диофантовых уравнений первой степени.

Методы решения неопределенных уравнений составляют основной вклад Диофанта в математику. Уравнения, решаемые в целых числах, всегда притягивали интерес математиков и по праву считаются самым красивым разделом математики.

Долгое время ученые пытались найти общий способ решения диофантовых уравнений, но все тщетно. Известная «Десятая проблема Гильберта» — одна из 23 задач, которые Давид

---

[3] Башмакова И. Диофант и Диофантовы уравнения/ И. Башмакова. – Москва: ЛКИ, 2007

Гильберт предложил 8 августа 1900 года на II Международном конгрессе математиков. Она состоит в нахождении универсального метода целочисленного решения произвольного алгебраического диофантова уравнения. Доказательство алгоритмической неразрешимости этой задачи заняло около двадцати лет и в 1970 г. ленинградский математик Матиясевич[4] доказал, что такого общего способа быть не может.

В настоящее время известны следующие способы и методы решения линейных диофантовых уравнений, а именно:

- способ перебора вариантов;
- метод рассеивания;
- алгоритм Евклида;
- использование цепных дробей;
- метод бесконечного спуска[5].

В своей работе мы представляем несколько способов решения уравнений, показавшихся нам наиболее интересными.

2.2.1.Способ перебора вариантов.

Способ *перебора вариантов* – применяется для решения простейших задач.

Задача 1.

В парке прогуливаются люди с собаками. Вместе у них 20 ног и лап. Сколько людей и сколько собак в парке?

Решение.

Составляется уравнение с двумя неизвестными переменными, в котором x – число собак, y – число людей:

$4x + 2y = 20$ *или* $2x + y = 10.$

Выразим y через x: $y = 10 – 2x$.

Далее воспользуемся методом перебора:

x	1	2	3	4
y	8	6	4	2

Значит, задача имеет четыре решения.

Ответ: *(1; 8), (2; 6), (3; 4), (4; 2).*

2.2.2. Метод рассеивания.

В Индии, где неопределенные уравнения решались в связи с астрономическими запросами и календарными расчетами, ставился вопрос о нахождении именно целочисленных решений неопределенных уравнений. Намеки на общее решение диофантовых уравнений первой степени, т.е. вида

$$ax + by = c,$$

встречаются впервые в трудах индийского астронома Ариабхаты[6]. Общий метод для решения в целых числах неопределенных (диофантовых) уравнений первой степени с целыми

[4] https://ru.wikipedia.org/wiki/Матиясевич,_Юрий_Владимирович

[5] Башмакова И. Диофант и Диофантовы уравнения/ И. Башмакова. – Москва: ЛКИ, 2007

[6] Юшкевич А.П. История математики в средние века. М., 1961.

коэффициентами был назван в Индии методом рассеивания (размельчения). Метод заключается в сведении данного уравнения к последовательности других уравнений с убывающими по абсолютной величине коэффициентами перед неизвестными[7].

Многие старинные способы отгадывания чисел и дат рождения основываются на решении диофантовых уравнений. Кроме того, этому эффектному и несложному методу вычисления дат отдают предпочтение фокусники на протяжении нескольких сотен лет. Например, чтобы отгадать дату рождения или любую другую дату, загаданную собеседником, достаточно узнать у него сумму, получаемую при сложении двух произведений: числа даты (x) на 12 и номера месяца (y) на 31.

Задача 2.

Пусть сумма произведений, о которых идет речь, равна 397. Найти дату важного мероприятия.

Решение.

Задача сводится к решению в целых числах диофантова уравнения:

$$12x + 31y = 397 \quad (1),$$ где x- число даты, y- номер месяца.

Выражая x – неизвестное с наименьшим по абсолютной величине коэффициентом через y, получим:

$$x = \frac{397-31y}{12} \quad (2)$$

Нам нужно узнать, при каких целых значениях y соответствующие значения x являются тоже целыми числами. Преобразуем уравнение (2):

$$x = 33 - 2y + \frac{1-7y}{12} \quad (3)$$

Отсюда следует, что x при целом y принимает целое значение только в том случае, если выражение $\frac{1-7y}{12}$ является целым числом, например, y_1:

$$y_1 = \frac{1-7y}{12} \quad (4)$$

Вопрос сводится к решению в целых числах уравнения (4) с неизвестными у и y_1:

$$12y_1 + 7y = 1 \quad (5)$$

Это уравнение имеет по сравнению с первоначальным (1) то преимущество, что 7 – наименьшая из абсолютных величин коэффициентов при неизвестных – меньше, чем в (1), т.е. 12.

Продолжая тем же способом, мы получим из (5):

$$y = \frac{1-12y_1}{7} = -y_1 + \frac{1-5y_1}{7} \quad (6)$$

Итак, неизвестное y при целом y_1 только тогда принимает целые значения, когда $\frac{1-5y_1}{7}$ есть целое число, скажем y_2 :

$$y_2 = \frac{1-5y_1}{7} \quad (7)$$

или

$$7y_2 + 5y_1 = 1 \quad (8)$$

$$y_1 = \frac{1-7y_2}{5} = -y_2 + \frac{1-2y_2}{5} \quad (9)$$

[7] Глейзер Г.И. История математики в школе, Москва «Просвещение», 1982 г.

Полагая

$$y_3 = \frac{1-2y_2}{5} \quad (10)$$

получим уравнение

$$5y_3 + 2y_2 = 1 \quad (11)$$

Аналогично продолжая, получим

$$y_2 = \frac{1-5y_3}{2} = -2y_3 + \frac{1-y_3}{2} \quad (12)$$

Пусть

$$y_4 = \frac{1-y_3}{2} \quad (13)$$

тогда

$$y_3 + 2y_4 = 1 \ (14)$$

Это самое простое из всех рассмотренных неопределённых уравнений, т.к. один из коэффициентов равен 1. Из него получим:

$$y_3 = 1 - 2y_4 \ (15)$$

Отсюда видно, что y_3 принимает целые значения при любых целых значениях y_4. Из равенств (3), (6), (9), (12), (15) путем последовательных подстановок можно найти следующие выражения для x и y уравнения (1):

$$\begin{cases} x = 46 - 31y_4, \\ y = -5 + 12y_4; \end{cases}$$

Учитывая ограничения

$$0 < x \leq 31,$$
$$0 < y \leq 12$$

нетрудно констатировать, что единственным решением уравнения является

$$y_4 = 1, x = 15, y = 7.$$

Итак, дата мероприятия: 15-е число 7-ого месяца, т.е. 15 июля - это день моего рождения.

Данный метод почти полностью совпадает с методом индийцев и был назван ими методом рассеивания потому, что неопределенное уравнение сводится к цепи уравнений со всё уменьшающимися по величине коэффициентами.

2.2.3. Алгоритм Евклида.

Данный алгоритм состоит в следующем: можно найти наибольший общий делитель натуральных чисел a и b, не раскладывая эти числа на простые множители, а применяя процесс деления с остатком. Для этого надо разделить большее из этих чисел на меньшее. Потом меньшее из чисел на остаток при первом делении, затем остаток при первом делении на остаток при втором делении и вести этот процесс до тех пор, пока не произойдет деление без остатка (т.к. остатки убывают, то это на каком-то шаге случится). Последний отличный от нуля остаток и есть искомый НОД (a, b).

Решая диофантовы уравнения первой степени ax + by = c, можно применять следующие теоремы:

Теорема1. Если НОД (a, b) = 1, то уравнение ax + by = 1 имеет, по меньшей мере, одну пару (x, y) целого решения.

Теорема 2. Если НОД (a, b) = d > 1, и число c не делится на d, то уравнение ax + by = c не имеет целого решения.

Теорема 3. Если НОД (a, b) = 1,то все целые решения уравнения ax + by = c определяются формулой: $x = x_0 \cdot c + bt$; $y = y_0 \cdot c - at$.

Здесь (x_0, y_0) – целое решение уравнения ax + by = 1, а t – произвольное целое число.

Задача 3. Решить в целых числах уравнение $54x + 37y = 1$.

Решение.

По алгоритму Евклида a = 54, b = 37.

Подставляем данные под алгоритм и получаем: 54=37·1+17, остаток от деления 17 = 54 – 37 · 1.

Далее, следуя алгоритму, получаем:

37 = 17·2+3, 3 = 37-17·2

17 = 3·5+2 , 2 = 17- 3·5,

3 = 2·1 + 1 , 1 = 3 - 2·1

После нахождения единицы выражаем через неё значения a и b:

1 = 3 – (17 - 3·5); 1 = 17- 3·4; 1 = 17 - (37- 17·2) ·4;

1 = 17 – 37 · 4+17·8; 1 = 17·9 – 37·4; 1 = (54- 37·1) · 9 - 37·4;

1 = 54·9 - 37·9 - 37·4; 1 = 54·9 - 37·13; 1 = 54x + 37

Следовательно, $x_0 = 9$, $y_0 = -13$.

Значит, данное уравнение имеет следующее решение: $\begin{cases} x = 9 + 37t \\ y = -13 - 54t \end{cases}$, где t – любое целое число.

Задача 4. Требуется найти целое решение уравнений: а)$15x + 37y = 1$;

б) $16x + 34y = 7$;

в) $20x + 12y = 2021$.

Решение.

а) $15x + 37y = 1$

1-й метод. Воспользуемся разложением единицы: 1 = 15·5 + 37·(-2).

Ответ: $x = 5$, $y = -2$.

2-й метод. Применяя алгоритм Евклида, имеем: 37 = 15·2 + 7, 15 = 2·7 + 1.

Отсюда 1 = 15 – 2·7 = 15 – 2(37 – 15·2) = 15·5 + (-2) ·37. Тогда $x_o = 5$, $y_o = -2$.

Общее решение уравнения есть система: $\begin{cases} x = 5 + 37t \\ y = -2 - 15t \end{cases}$, где t – любое целое число.

б) В уравнении $16x + 34y = 7$ НОД (16, 34) = 2 и7 не делится на 2, значит, нет целых решений.

в) Так как в уравнении $20x + 12y = 2021$ при любых целых значениях x и y левая часть делится на два, а правая является нечётным числом, то уравнение не имеет решений в целых числах.

Глава 3. Диофантовы уравнения с тремя неизвестными.

В практике встречаются задачи на составление диофантовых уравнений с тремя неизвестными. Рассмотрим одну из таких задач.

Задача 5.

Школа получила 1 млн. руб. на приобретение 100 единиц учебного оборудования (на всю сумму без остатка). Администрации школы предложили оборудование стоимостью 3000, 8000 и 12000 руб. за единицу. Сколькими способами школа может закупить это оборудование? Укажите один из способов.

Решение.

Пусть приобретено x единиц оборудования по 12000 руб., y единиц оборудования по 8000 руб., z единиц оборудования по 3000 руб.

Всего приобретено 100 единиц оборудования, т.е. $x+ y + z = 100$, причем на приобретение 100 единиц оборудования затрачено 1 млн. руб., т.е.

$12000\,x + 8000\,y + 3000\,z = 1\,000\,000,$

$12x + 8y + 3z = 1000.$

Таким образом, получаем систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 12x + 8y - 3z = 1000; \end{cases} \quad (0)$$

Задача будет иметь решение при $x > 0, y > 0, z > 0$.

Во-первых, исключим z путем вычитания из второго уравнения первого, умноженного на 3. Следовательно, получаем диофантово уравнение 1-ой степени с двумя неизвестными

$9x + 5y = 700$ (1)

$y = \frac{700-9x}{5}$, (2)

$y = 140 - x - \frac{4x}{5}$. (3)

Отсюда следует, что y при целом x принимает целое значение только тогда, когда выражение $\frac{4x}{5}$ является целым числом, например, y_1:

$y_1 = \frac{4x}{5}$ (4)

Уравнение (4) можно записать так:

$5y_1 = 4x$ (5)

Продолжая тем же способом, мы получим из (5) :

$x = \frac{5y_1}{4} = y_1 + \frac{y1}{4} = y_1 + y_2$ (6)

$y_2 = \frac{y_1}{4}$, (7)

или

$y_1 = 4y_2$ (8)

Из равенств (3), (6) путем последовательных подстановок найдем следующие выражения для x и y уравнения (1):

$x = y_1 + y_2 = 4y_2 + y_2 = 5y_2;$

$y = 140 - 5y_2 - 4y_2 = 140 - 9y_2.$

Таким образом, $x = 5y_2$, $y = 140 - 9y_2$.

Из первого уравнения системы:

$z = 100 - x - y.$

Согласно условию $x > 0, y > 0, z > 0$, в таблице приведем примеры таких решений:

y_2	10	11	12	13	14	15
x	50	55	60	65	70	75
y	50	41	32	23	14	5
z	0	4	8	12	16	20

В результате решения получается, что приобрести оборудование библиотека может шестью способами. Укажем одно из частных решений задачи: $x = 65$, $y = 23$, $z = 12$, т.е. школа на 1 млн. руб. может приобрести 65 единиц оборудования по 12 тыс. руб., 23 единицы оборудования по 8 тыс. руб., 12 единиц оборудования по 3 тыс. руб.

Глава 4. Применение диофантовых уравнений.

4.1. Диофантовы уравнения в олимпиадных задачах.

Задача 6.

Некий чиновник купил лошадей и быков за 1770 талеров. За каждую лошадь он уплатил по 31 талеру, а за каждого быка по 21 талеру. Сколько лошадей и быков купил чиновник?

Решение.

Пусть x- количество лошадей, y- количество быков.

Составим диофантово уравнение: $31x+21y=1770$, где $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Т.к. НОД(31;21)=1, то все целые решения уравнения $31x + 21y = 1770$ определяются формулой:

$$x = x_0 \cdot 1770 + 21t; \quad y = y_0 \cdot 1770 - 31t.$$

Здесь (x_0, y_0) – целое решение уравнения $31x + 21y = 1$, где t – произвольное целое число.

Нетрудно догадаться, что пара чисел (-2;3) есть целое решение $31x + 21y = 1$.

Тогда все целые решения уравнения $31x + 21y = 1770$ определяются формулой:

$$x = -3540 + 21t; \quad y = 5310 - 31t.$$

Остаётся найти целое t, такое что $-3540+21t \geq 0$ и $5310 - 31t \geq 0$.

Получим $168\frac{12}{21} \leq t \leq 171\frac{9}{31}$, этому неравенству удовлетворяют три варианта целого значения t,

$$t = 169, 170, 171$$

Им соответствуют три разных решения исходного уравнения

при t=169, x=9, y=71;

при t=170, x=30, y=40;

при t=171, x=51, y=9

Ответ: 9 лошадей и 71 бык или 30лошадей и 40быков, или 51лошадь и 9быков.

4.2. Диофантовы уравнения в экономике.

Так как одной из наших целей было показать практическое применение неопределенных уравнений, то рассмотрим некоторые практические задачи.

Задача 7.

Маша в магазине хочет разменять 50 рублей. У кассира имеются лишь 17 двухрублевых и 9 пятирублевых монет. Сможет ли кассир разменять Маше деньги?

Решение.

Решим неопределенное уравнение:

$$2x + 5y = 50,$$

где x- количество двухрублевых монет($x \leq 17$), y- количество пятирублевых монет($y \leq 9$).

$$x = \frac{50-5y}{2} = 25 - 2y - \frac{y}{2} = 25 - 2y - y_1.$$

Далее, $y = 2y_1$.

Откуда $x = 25 - 5y_1$, $y = 2y_1$.

Ввиду того, что x и y должны быть положительными и учитывая условие задачи, легко установить, что

$$2 \leq y_1 \leq 4,$$

т.е. y_1 может принимать три значения: 2, 3, 4. Тогда

y_1	2	3	4
x	15	10	5
y	4	6	8

Тогда кассир может разменять 50 р. Маше тремя способами: 15 двухрублевых и 4 пятирублевых монет, 10 двухрублевых и 6 пятирублевых монет, 5 двухрублевых и 8 пятирублевых монет.

Задача 8.

Можно ли отвесить 32 г сахара, не имея чайной ложки, при помощи четырех гирь весом в 4 г и семи гирь весом в 5г?

Решение.

Составляем диофантово уравнение:

$$4x + 5y = 32,$$

где x- количество гирь весом 4 г, y- количество гирь весом 5 г($x \le 4$; $y \le 7$).

Имеем:

$$x = \frac{32-5y}{4} = 8 - y - \frac{y}{4} = 8 - y - y_1,$$

$$y_1 = \frac{y}{4}$$

Итак,

$$x = 8 - 5y_1,$$

$$y = 4y_1.$$

Из условия задачи вытекает, что y_1 нельзя давать отрицательные значения, т.к. это приводит к отрицательному y. Далее, $y_1 < 2$, чтобы x не был отрицательным. Значит,

$$0 \le y_1 \le 1.$$

Однако при $y_1 = 0$ $x = 8$, что противоречит условию задачи $x \le 4$. Таким образом, возможно только $y_1 = 1$. При этом $x = 3$, $y = 4$ – единственное решение задачи.

Значит, сахар можно отвесить одним способом при помощи трех гирь весом в 4 г и четырех гирь весом в 5 г.

Глава 5. Результаты опроса.

В ходе работы нами было проведено анкетирование среди обучающихся 7-8 классов для выявления их осведомленности о диофантовых уравнениях и их практическом применении. В опросе участвовало 48 обучающихся. Результат анкетирования представлен в таблице.

Таблица 1.

Вопрос	Количество обучающихся, ответивших «да»	%
Знакомо ли Вам понятие «Диофантово уравнение»?	2	4,2
Смогли бы Вы решить данную задачу: *Требуется разлить 20,5 литра сока в банки по 0,7л и 0,9 л, так, чтобы все банки оказались полными. Сколько каких банок надо заготовить? Какое наименьшее количество банок при этом может понадобиться?*	12	25
Хотели бы узнать различные способы решения данной задачи?	43	89,6
Как Вы думаете, надо ли знакомить учащихся с различными способами решения?	43	89,6

Многим обучающимся стало интересно узнать, что такое диофантовы уравнения.
На неделе точных наук мы провели информационный час «Диофант и его уравнения» для одноклассников. Ребята прослушали небольшую историческую справку о первооткрывателе данных уравнений, познакомились с интересными задачами и способами их решения.

Итогом нашей работы стал небольшой сборник «Знаменательные даты МБОУ СОШ №28 г. Пензы им. В.О. Ключевского в диофантовых уравнениях»[приложение1].

Заключение.

В разных учебниках встречаются многие старинные задачи, которые можно решить с помощью уравнений Диофанта, в т.ч. некоторые олимпиадные задания. Выполнив данную работу, нам удалось определить, что:

1. Диофантовы уравнения относятся к ряду задач, не требующих работы со сложными и громоздкими формулами. При их решении необходимо лишь проводить аккуратные рассуждения с использованием определенных понятий теории чисел и связанные в стройную логическую конструкцию.
2. Единственно верного способа решения диофантовых уравнений не существует.
3. Именно Диофант открыл нам мир арифметики и алгебры.
4. Знания о методах решения диофантовых уравнений помогают успешно справляться с олимпиадными заданиями, что подтверждает нашу гипотезу.

Простой разбор задач Диофанта показывает, что он не только поставил задачу решения неопределённых уравнений в рациональных числах, но и дал некоторые общие методы их решения. В дальнейшем хотелось бы рассмотреть решение диофантовых уравнений более высокого порядка.

Литература.

1. Акимова С. Занимательная математика. – Санкт-Петербург: Издательство «Тригон», 1997
2. Башмакова И. Диофант и Диофантовы уравнения/ И. Башмакова. – Москва: ЛКИ, 2007
3. Виленкин Н. Я. За страницами учебника математики 10 – 11 класс. – Москва: Издательство «Просвещение», 1996
4. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах/ А.О. Гельфонд. – Москва: Либроком, 2010
5. Глейзер Г.И. История математики в школе, Москва «Просвещение», 1982 г.
6. Жмурова, И. Ю. Диофантовы уравнения: от древности до наших дней / И. Ю. Жмурова, А. В. Ленивова // Молодой ученый. – 2014. – №9. –С. 1–5.
7. Колосов А.А. Книга для внеклассного чтения по математике в старших классах – Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, Москва 1963
8. Юшкевич А.П. История математики в средние века. М., 1961.

Электронные ресурсы:

1. Википедия – свободная энциклопедия - http://wikipedia.org
2. Математическая энциклопедия – dic.academic.ru
3. http://math4school.ru/uravnenija_v_celih_chislah.html

Приложение 1.

Знаменательные даты МБОУ СОШ №28 г. Пензы им. В.О. Ключевского в диофантовых уравнениях.

Задача 1. Пусть сумма произведений, о которых идет речь, равна 648. Найти дату важного мероприятия.

Решение.

Задача сводится к решению в целых числах диофантова уравнения:

$12x + 31y = 648$ *(1))*, где *x*- число даты, *y*- номер месяца.

Выражая *x* – неизвестное с наименьшим по абсолютной величине коэффициентом через *y*, получим: $x = \frac{648-31y}{12}$ (2)

Нам нужно узнать, при каких целых значениях *y* соответствующие значения *x* являются тоже целыми числами. Преобразуем уравнение (2): $x = 54 - 2y + \frac{7y}{12}$ (3)

Отсюда следует, что *x* при целом *y* принимает целое значение только в том случае, если выражение $\frac{7y}{12}$ является целым числом, например, y_1: $y_1 = \frac{7y}{12}$ (4)

Вопрос сводится к решению в целых числах уравнения (4) с неизвестными у и y_1:

$$12y_1 = 7y \quad (5)$$

Это уравнение имеет по сравнению с первоначальным (1) то преимущество, что 7 – наименьшая из абсолютных величин коэффициентов при неизвестных – меньше, чем в (1), т.е. 12.

Продолжая тем же способом, мы получим из (5): $y = \frac{12y_1}{7} = y_1 + \frac{5y_1}{7}$ (6)

Итак, неизвестное y при целом y_1 только тогда принимает целые значения, когда $\frac{5y_1}{7}$ есть целое число, скажем y_2 : $y_2 = \frac{5y_1}{7}$ (7)

Или $7y_2 = 5y_1$ (8)

$$y_1 = \frac{7y_2}{5} = y_2 + \frac{2y_2}{5} \quad (9)$$

Полагая $y_3 = \frac{2y_2}{5}$ (10)

получим уравнение $5y_3 = 2y_2$ (11)

Аналогично продолжая, получим: $y_2 = \frac{5y_3}{2} = 2y_3 + \frac{y_3}{2}$ (12)

Пусть $y_4 = \frac{y_3}{2}$ (13)

Тогда $y_3 = 2y_4$ (14)

Это самое простое из всех рассмотренных неопределённых уравнений, т.к. один из коэффициентов равен 1.

Отсюда видно, что y_3 принимает целые значения при любых целых значениях y_4. Из равенств (3), (6), (9), (12), (14) путем последовательных подстановок можно найти следующие выражения для *x* и *y* уравнения (1):

$$\begin{cases} x = 54 - 31y_4, \\ y = 12y_4; \end{cases}$$

Учитывая ограничения $0 < x \leq 31,\ 0 < y \leq 12$

нетрудно констатировать, что единственным решением уравнения является

$y_4 = 1$, x = 23, *y* = 12.

Итак, дата мероприятия: 23-е число 12-ого месяца, т.е. 23 декабря. 23 декабря 2016 г был подписан Закон Пензенской области «О присвоении муниципальному бюджетному общеобразовательному учреждению средней общеобразовательной школе №28 города Пензы имени Василия Осиповича Ключевского».

Задача 2.

Пусть сумма произведений, о которых идет речь, равна 367. Найти дату важного мероприятия.

Решение.

Задача сводится к решению в целых числах диофантова уравнения:

$12x + 31y = 367$ *(1))*, где *x*- число даты, *y*- номер месяца.

Выражая x – неизвестное с наименьшим по абсолютной величине коэффициентом через *y*, получим:

$$x = \frac{367-31y}{12} \quad (2)$$

Нам нужно узнать, при каких целых значениях y соответствующие значения x являются тоже целыми числами. Преобразуем уравнение (2):

$$x = 30 - 2y + \frac{7-7y}{12} \; (3)$$

Отсюда следует, что x при целом y принимает целое значение только в том случае, если выражение $\frac{7-7y}{12}$ является целым числом, например, y_1:

$$y_1 = \frac{7-7y}{12} \quad (4)$$

Вопрос сводится к решению в целых числах уравнения (4) с неизвестными у и y_1:

$$12y_1 = 7 - 7y \quad (5)$$

Это уравнение имеет по сравнению с первоначальным (1) то преимущество, что 7 – наименьшая из абсолютных величин коэффициентов при неизвестных – меньше, чем в (1), т.е. 12.

Продолжая тем же способом, мы получим из (5):

$$y = \frac{7-12y_1}{7} = 1 - y_1 - \frac{5y_1}{7} \quad (6)$$

Итак, неизвестное y при целом y_1 только тогда принимает целые значения, когда $\frac{5y_1}{7}$ есть целое число, скажем y_2 :

$$y_2 = \frac{5y_1}{7} \quad (7)$$

или

$$7y_2 = 5y_1 \quad (8)$$

$$y_1 = \frac{7y_2}{5} = y_2 + \frac{2y_2}{5} \quad (9)$$

Полагая

$$y_3 = \frac{2y_2}{5} \quad (10)$$

получим уравнение

$$5y_3 = 2y_2 \quad (11)$$

Аналогично продолжая, получим

$$y_2 = \frac{5y_3}{2} = 2y_3 + \frac{y_3}{2} \quad (12)$$

Пусть

$$y_4 = \frac{y_3}{2} \quad (13)$$

тогда

$$y_3 = 2y_4 \quad (14)$$

Это самое простое из всех рассмотренных неопределённых уравнений, т.к. один из коэффициентов равен 1.

Отсюда видно, что y_3 принимает целые значения при любых целых значениях y_4. Из равенств (3), (6), (9), (12), (14) путем последовательных подстановок можно найти следующие выражения для x и y уравнения (1):

$$\begin{cases} x = 28 + 31y_4, \\ y = 1 - 12y_4; \end{cases}$$

Учитывая ограничения

$$0 < x \leq 31,$$
$$0 < y \leq 12$$

нетрудно констатировать, что единственным решением уравнения является

$$y_4 = 0,\ x = 28,\ y = 1.$$

Итак, дата мероприятия: 28-е число 1-ого месяца, т.е. 28 января.

28 января 1841 г – день рождения русского историка, ординарного профессора Московского университета, заслуженного профессора Московского университета; ординарного академика Императорской Санкт-Петербургской академии наук (сверх штата[8]) по истории и древностям русским (1900), председателя Императорского Общества истории и древностей российских при Московском университете, тайного советника Василия Осиповича Ключевского. По традиции в этот день в нашей школе проводится открытая региональная олимпиада по обществознанию памяти В.О. Ключевского.

Задача 3.

Пусть сумма произведений, о которых идет речь, равна 199. Найти дату важного мероприятия.

Решение.

Задача сводится к решению в целых числах диофантова уравнения:

$12x + 31y = 199$ *(1))*, где x- число даты, y- номер месяца.

Выражая x – неизвестное с наименьшим по абсолютной величине коэффициентом через y, получим:

$$x = \frac{199-31y}{12} \quad (2)$$

Нам нужно узнать, при каких целых значениях y соответствующие значения x являются тоже целыми числами. Преобразуем уравнение (2):

$$x = 16 - 2y + \frac{7-7y}{12} \quad (3)$$

Отсюда следует, что x при целом y принимает целое значение только в том случае, если выражение $\frac{7-7y}{12}$ является целым числом, например, y_1:

$$y_1 = \frac{7-7y}{12} \quad (4)$$

Вопрос сводится к решению в целых числах уравнения (4) с неизвестными у и y_1:

$$12y_1 = 7 - 7y \quad (5)$$

Это уравнение имеет по сравнению с первоначальным (1) то преимущество, что 7 – наименьшая из абсолютных величин коэффициентов при неизвестных – меньше, чем в (1), т.е. 12.

Продолжая тем же способом, мы получим из (5):

[8] По положению, штатный академик должен был проживать в Петербурге.

$$y = \frac{7-12y_1}{7} = 1 - y_1 - \frac{5y_1}{7} \quad (6)$$

Итак, неизвестное y при целом y_1 только тогда принимает целые значения, когда $\frac{5y_1}{7}$ есть целое число, скажем y_2 :

$$y_2 = \frac{5y_1}{7} \quad (7)$$

или

$$7y_2 = 5y_1 \quad (8)$$

$$y_1 = \frac{7y_2}{5} = y_2 + \frac{2y_2}{5} \quad (9)$$

Полагая

$$y_3 = \frac{2y_2}{5} \quad (10)$$

получим уравнение

$$5y_3 = 2y_2 \quad (11)$$

Аналогично продолжая, получим

$$y_2 = \frac{5y_3}{2} = 2y_3 + \frac{y_3}{2} \quad (12)$$

Пусть

$$y_4 = \frac{y_3}{2} \quad (13)$$

тогда

$$y_3 = 2y_4 \quad (14)$$

Это самое простое из всех рассмотренных неопределённых уравнений, т.к. один из коэффициентов равен 1.

Отсюда видно, что y_3 принимает целые значения при любых целых значениях y_4. Из равенств (3), (6), (9), (12), (14) путем последовательных подстановок можно найти следующие выражения для x и y уравнения (1):

$$\begin{cases} x = 14 + 31y_4, \\ y = 1 - 12y_4; \end{cases}$$

Учитывая ограничения

$$0 < x \leq 31,$$

$$0 < y \leq 12$$

нетрудно констатировать, что единственным решением уравнения является

$$y_4 = 0,\ x = 14,\ y = 1.$$

Итак, дата мероприятия: 14-е число 1-ого месяца, т.е. 14 января.

14 января 2022 г. будет проходить VIII открытая интегрированная олимпиада для школьников «Гуманитарий XXI века».

Задача 4.

Пусть сумма произведений, равна 418. Найти дату важного мероприятия.

Решение.

Задача сводится к решению в целых числах диофантова уравнения:

$12x + 31y = 418$ *(1))*, где x- число даты, y- номер месяца.

Выражая x – неизвестное с наименьшим по абсолютной величине коэффициентом через y, получим: $x = \frac{418-31y}{12}$ (2)

Нам нужно узнать, при каких целых значениях y соответствующие значения x являются тоже целыми числами. Преобразуем уравнение (2): $x = 34 - 2y + \frac{10-7y}{12}$ (3)

Отсюда следует, что x при целом y принимает целое значение только в том случае, если выражение $\frac{7y}{12}$ является целым числом, например, y_1: $y_1 = \frac{10-7y}{12}$ (4)

Вопрос сводится к решению в целых числах уравнения (4) с неизвестными у и y_1:

$$12y_1 + 7y = 10 \quad (5)$$

Это уравнение имеет по сравнению с первоначальным (1) то преимущество, что 7 – наименьшая из абсолютных величин коэффициентов при неизвестных – меньше, чем в (1), т.е. 12.

Продолжая тем же способом, мы получим из (5): $y = \frac{10-12y_1}{7} = 1 - y_1 + \frac{3-5y_1}{7}$ (6)

Итак, неизвестное y при целом y_1 только тогда принимает целые значения, когда $\frac{3-5y_1}{7}$ есть целое число, скажем y_2 : $y_2 = \frac{3-5y_1}{7}$ (7)

или

$$7y_2 + 5y_1 = 3 \quad (8)$$

$$y_1 = \frac{3-7y_2}{5} = -y_2 + \frac{3-2y_2}{5} \quad (9)$$

Полагая

$$y_3 = \frac{3-2y_2}{5} \quad (10)$$

получим уравнение

$$5y_3 + 2y_2 = 3 \quad (11)$$

Аналогично продолжая, получим: $y_2 = \frac{3-5y_3}{2} = 1 - 2y_3 + \frac{1-y_3}{2}$ (12)

Пусть

$$y_4 = \frac{1-y_3}{2} \quad (13)$$

тогда

$$y_3 + 2y_4 = 1 \quad (14)$$

Это самое простое из всех рассмотренных неопределённых уравнений, т.к. один из коэффициентов равен 1. Из него получим:

$$y_3 = 1 - 2y_4 \quad (15)$$

Это самое простое из всех рассмотренных неопределённых уравнений, т.к. один из коэффициентов равен 1.

Отсюда видно, что y_3 принимает целые значения при любых целых значениях y_4. Из равенств (3), (6), (9), (12), (15) путем последовательных подстановок можно найти следующие выражения для x и y уравнения (1):

$$\begin{cases} x = 40 - 31y_4, \\ y = -2 + 12y_4; \end{cases}$$

Учитывая ограничения

$$0 < x \leq 31,$$
$$0 < y \leq 12$$

нетрудно констатировать, что единственным решением уравнения является

$$y_4 = 1,\ x = 9,\ y = 10.$$

Итак, дата мероприятия: 9-е число 10-ого месяца, т.е. 9 октября.

9 октября 2019 года состоялось открытие Центра поддержки олимпиадного движения школьников г.Пензы «Аврора», занятия которого проходят на базе нашей школы.