Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

средняя общеобразовательная школа № 3 города Кузнецка

II региональный фестиваль
творческих открытий и инициатив « Леонардо»
Секция «Математическая»

Исследовательская работа:

«Использование метода масс для решения геометрических задач»

Автор: Ильин Антон Алексеевич,

обучающийся 9 «Б» класса г. Кузнецка

Руководитель: Сергеева Елена Владимировна,

учитель математики высшей категории

Пенза-2022

Содержание.

1. Введение

На одном из факультативных занятий при решении математических задач я познакомился с методом геометрии масс, который меня очень заинтересовал. Ведь на олимпиадах и экзаменах по математике и физике встречаются задачи, в которых дано довольно много величин и при этом не сразу удается установить связь между ними и искомой величиной, а также грамотно обосновать ход своих мыслей. Используя метод масс, можно существенно ускорить процесс решения таких задач. Несколько простых свойств центра масс позволяют решать различные задачи геометрии. В частности, таким путем удается ответить на вопросы о том, пересекаются ли несколько прямых в одной точке, принадлежат ли несколько точек одной прямой, а также находить, в каком отношении делятся отрезки.

Объект: метод геометрии масс.

Предмет: геометрические задачи, решаемые с помощью барицентрического метода.

Гипотеза: с помощью теорем геометрии масс можно избежать большого оформления и заполнения громоздких таблиц при решении задач по геометрии. Данный метод позволяет рационально решать задачи на отношения длин отрезков, которые сложно решать другими способами.

Цель работы: познакомиться с теорией способа решения задач методом геометрии масс, исследование эффективности применения барицентрического метода при решении геометрических задач.

В ходе выполнения работы мной были решены следующие **задачи:**

1. Ознакомиться с историей открытия барицентрического метода.
2. Рассмотреть основные формулировки, свойства, теоремы, связанные с данным методом.
3. Отобрать и систематизировать задачи, решаемые с помощью метода геометрии масс.
4. Научиться самостоятельно решать задачи данным методом.
5. Ознакомить одноклассников с данным методом при решении геометрических задач.

Мной использовались следующие **методы исследования**:

теоретические, поисковые, сравнение, анализ.

Моя работа весьма актуальна, так как метод геометрии масс позволяет более рационально решать задачи повышенного уровня сложности с применением нестандартных, не изучаемых в школьном курсе теорем, свойств и формул. Благодаря данному методу у учащихся формируется нестандартное мышление, способствующее пониманию природы происходящих событий.

2. Основная часть.

2.1 Теоретическая часть. Общая информация о методе масс.

2.1.1 История открытия метода.

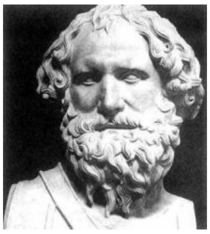
«…Я счел нужным написать тебе и… изложить особый метод, при помощи которого ты получишь возможность находить некоторые математические теоремы. Я уверен, что этот метод будет тебе ничуть не менее полезен и для доказательства самих теорем…»

Архимед. Послание к Эратосфену

«О механических теоремах»

Родоначальником метода масс был великий древнегреческий мыслитель Архимед. Еще в III в. до н. э. он открыл оригинальный способ доказательства геометрическихтеорем, основанный на рассмотрении центра масс системы материальных точек (метод «геометрии масс»). В частности, этим способом им была установлена теорема о том, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Метод Архимеда был развит выдающимися математиками, такими как Лагранж, Чева, Папп, Якоби, Мёбиус (например, в 1827 году немецкий математик Август Фердинанд Мёбиус ввёл понятие барицентрических координат, с помощью которых он сумел изложить проективную геометрию), и превратился в эффективное и строго обоснованное средство геометрического исследования. В последние десятилетия барицентрический метод стал использоваться и в вычислительной математике.



2.1.2. Определение центра масс.

- **<u>Наглядное определение:</u>**

Чтобы понять, что такое центр масс, рассмотрим детские качели: Очевидно, что более тяжелый ребенок перевешивает. Но стоит ему начать приближаться ближе к центру, как качели постепенно приходят в равновесие. Насколько ближе он должен подвинуться ответит метод масс.

Рассмотрим термин «центр масс», взяв за основу «золотое правило механики»:

Пусть качели – отрезок AB (рис.1), где m1, m2 – массы, расположенные на концах качелей (m1 >m2). Центром масс данной системы двух точек будет такая точка O данного отрезка AB, что AO × m1 = BO × m2.

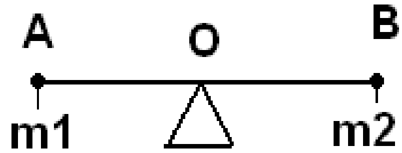


рис.1

Для применения этого понятия к решению геометрических задач используются следующие ясные и имеющие механический смысл **свойства центра масс:**

1. Всякая система, состоящая из конечного числа материальных точек, имеет центр масс и притом только единственный.
2. Центр масс двух материальных точек расположен на отрезке, соединяющем эти точки, его положение определяется архимедовым правилом рычага.
3. Если в системе, состоящей из конечного числа материальных точек, отметить несколько материальных точек и массы отмеченных точек перенести в их центр масс, то от этого положение цента масс системы не изменится.

Разумеется, сформулированные свойства должны быть математически обоснованы. Однако, несмотря на простоту этих фактов, они представляют собой мощное средство доказательства теорем и решения геометрических задач.

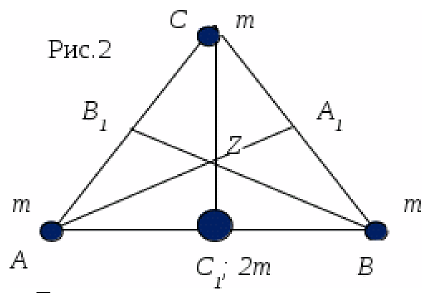
<u>Пример 1.</u> Докажите теорему Архимеда:

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, в которой делятся в отношении 2:1, считая от соответствующей вершины.

<u>Доказательство:</u>

1. Пусть ABC – данный треугольник. AA1, BB1, CC1 – его медианы (рис. 2).
2. Загрузим вершины треугольника ABC равными массами *m;* в результате получим систему A(m), B(m), C(m), которая имеет единственный барицентр в некоторой точке *Z* (свойство 1).
3. По свойству 3 положение центра масс не изменится, если массы материальных точек A и B мы перенесем в их центр масс, т.е., согласно свойству 2, точку C1(2m). Тогда Z окажется центром масс двух точек: C1(2m) и C(m). Значит, т. Z ∈ CC1. Аналогично, Z ∈ BB1; Z ∈ AA1. Таким образом, все три медианы имеют общую точку Z.

Рис.2



4. Кроме того, по правилу рычага (свойство 2) 2m × ZC1 = m × ZC, или ZC ÷ ZC1 = 2÷1.

- **<u>Математическое определение центра масс:</u>**

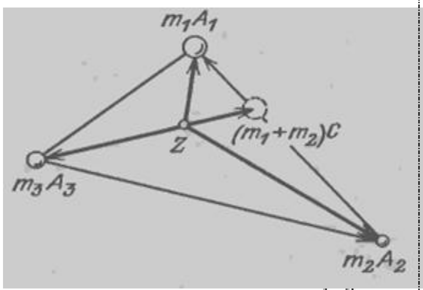
Для того чтобы с помощью понятия центра масс получать математически корректные решения геометрических задач, необходимо выяснить точный математический смысл данного понятия.

Рассмотрим сначала две материальные точки m_1A_1 и m_2A_2, и пусть Z — их центр масс (свойство 1). Равенство $m_1d_1 = m_2d_2$ (свойство 2) можно записать в виде

$m_1|\overline{ZA_1}| = m_2|\overline{ZA_2}|$, т. е. $|m_1\overline{ZA_1}| = |m_2\overline{ZA_2}|$. Учитывая, что векторы $\overline{ZA_1}$ и $\overline{ZA_2}$ имеют противоположные направления, получаем отсюда $m_1\overline{ZA_1} = -m_2\overline{ZA_2}$, т.е. $m_1\overline{ZA_1} + m_2\overline{ZA_2} = \bar{0}$. (1)

Итак, если мы хотим, чтобы выполнялись свойства 1 и 2, то центром масс двух материальных точек m_1A_1 и m_2A_2 должна быть такая точка Z, для которой справедливо равенство (1).

Пусть теперь даны три материальные точки m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3, и пусть Z — центр масс этой системы материальных точек (свойство 1). Обозначим через C центр масс системы двух материальных точек m_1A_1 и m_2A_2. Тогда, согласно (1), $m_1\overline{CA_1} + m_2\overline{CA_2} = \bar{0}$ (2)



Далее, согласно свойству 3, центр масс всей системы m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3 совпадает (рис. 3) с центром масс совокупности двух материальных точек $(m_1 + m_2)$ C и m_3A_3, т. е. (согласно (1)) $(m_1 + m_2)\overline{ZC} + m_3\overline{ZA_3} = \bar{0}$. (3)

Однако $(m_1 + m_2)\overline{ZC} = m_1\overline{ZC} + m_2\overline{ZC} = m_1(\overline{ZA_1} - \overline{CA_1}) + m_2(\overline{ZA_2} - \overline{CA_2}) = m_1\overline{ZA_1} + m_2\overline{ZA_2} - (m_1\overline{CA_1} + m_2\overline{CA_2}) = m_1\overline{ZA_1} + m_2\overline{ZA_2}$ (см. равенство (2));

И потому равенство (3) принимает вид $m_1\overline{ZA_1} + m_2\overline{ZA_2} + m_3\overline{ZA_3} = \bar{0}$. (4)

Итак, чтобы выполнялось также свойство 3, то центром масс трех материальных точек m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3 должна быть такая точка Z, что справедливо равенство (4).

Итак, в соответствии с приведенным эвристическим разбором мы принимаем следующее **<u>основное определение:</u>**

Центром масс (или барицентром) системы материальных точек $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$. называется точка Z, для которой имеет место равенство

$$m_1\overline{ZA_1} + m_2\overline{ZA_2} + \dots + m_n\overline{ZA_n} = \bar{0}$$

2.1.3 Основные теоремы и их доказательства

<u>Теорема 1.</u>

А) Если точка Z служит центром масс системы материальных точек, то при любом выборе в пространстве точки O справедливо равенство

$$\overline{OZ} = \frac{m_1\overline{OA_1} + m_2\overline{OA_2} + \dots + m_n\overline{OA_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (5)$$

Б) Обратно: если хотя бы при одном выборе в пространстве точки O верно равенство (7), то точка Z — центр масс системы.

<u>Доказательство:</u>

Ограничимся случаем n=2 (при n>2 доказательство аналогично).

1. Выберем произвольно точку O.
2. Получим $m_1 \overline{ZA_1} + m_2 \overline{ZA_2} = \bar{0}$; заменим: $m_1(\overline{OA_1} - \overline{OZ}) + m_2(\overline{OA_2} - \overline{OZ}) = \bar{0}$,

следовательно $\overline{OZ} = \dfrac{m_1\overline{OA_1}+m_2\overline{OA_2}}{m_1+m_2}$.

Следствие 1. Всякая система, состоящая из конечного числа материальных точек, имеет однозначно определенный центр масс (т. е. справедливо свойство 1).

В самом деле, выберем произвольную точку O. Тогда положение точки Z однозначно определяется формулой (5).

<u>Теорема 2.</u>

Центр масс двух материальных точек расположен на отрезке, соединяющем эти точки; его положение определяется архимедовым правилом рычага: $m_1d_1 = m_2d_2$.

<u>Доказательство:</u>

1. Пусть Z —центр масс системы двух материальных точек m_1A_1 и m_2A_2.
2. Тогда $m_1 \overline{ZA_1} + m_2 \overline{ZA_2} = \bar{0}$, т. е. $m_1 \overline{ZA_1} = - m_2 \overline{ZA_2}$. Из этого видно, что векторы $\overline{ZA_1}$ и $\overline{ZA_2}$ противоположно направлены, так что точка Z лежит внутри отрезка A_1A_2, причем $m_1 |\overline{ZA_1}| = m_2 |\overline{ZA_2}|$, т.е. $m_ld_1=m_2d_2$. Это и есть «архимедово правило рычага»; из него видно, что центр масс двух материальных точек ближе к «более массивной» из них, то есть к той, у которой масса больше (рис. 1)

<u>Теорема 3.</u>

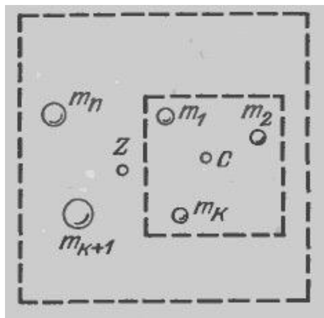
Пусть в системе, состоящей из n материальных точек, отмечены k материальных точек $m_1A_1,\dots m_кA_к$ (рис. 3) и пусть C — центр масс отмеченных материальных точек. Если всю массу отмеченных материальных точек, сосредоточить в их центре масс C, то от этого положение центра масс всей системы не изменится. Иначе говоря, система имеет тот же центр масс, что и система материальных точек $(m_1 + \dots + m_к)C$, $m_{k+l}A_{k+1},..,m_nA_n$ (см. рис. 4).

<u>Доказательство</u>:

1. Пусть Z — центр масс системы,
   т.е. $m_1 \overline{ZA_1} + \dots + m_k \overline{ZA_k} + m_{k+1} \overline{ZA}_{k+1} + \dots + m_n \overline{ZA}_n = \bar{0}$
2. Так как C — центр масс системы материальных точек $m_1A_1,\dots,m_кA_к$, то по теореме1:

$$\overline{ZC} = \frac{m_1\overline{ZA}_1+\dots+m_k\overline{ZA}_k}{m_1+\dots+m_k}$$

Рис.4



Из двух равенств следует, что $(m_1 + \ldots + m_k)\ \overline{ZC} + m_{k+1}\ \overline{ZA}_{k+1} + \ldots + m_n\ \overline{ZA}_n = \bar{0}$, а это и значит, что центром масс системы материальных точек $(m_1+\ldots \ldots + m_k)C$, $m_{k+1}A_{k+1}, \ldots, m_nA_n$ является та же точка Z.

2.2. Практическая часть. Применение барицентрического метода при решении задач

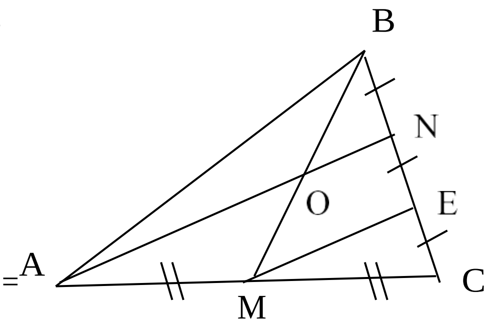
2.2.1 Рассмотрение преимущества барицентрического метода при решении задач

Многие задачи допускают несколько способов решения. Рассмотрим и проанализируем методы решения задач на отношения длин отрезков.

Задача 1. Пусть дан треугольник ABC. BM – медиана, AN делит сторону BC в отношении 1/2 от вершины B. AN пересекает BM в точке O. Найти отношение BO/OM.

<u>1 способ:</u>

1. Проведем ME параллельно AN.
   Рассмотрим ΔANC: AM = MC (т.к. BM - медиана);
   ME // AN. Следовательно, ME – средняя линия ΔANC, значит, NE = EC.

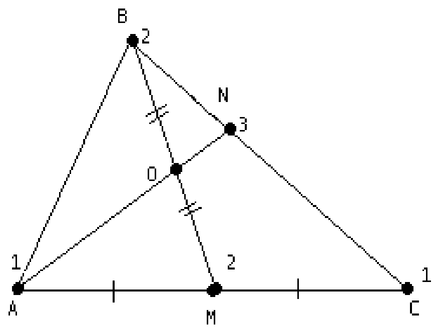


2. Пусть BN = x. Тогда CN = 2x
   (AN делит сторону BC в отношении 1/2).
   Значит, NE = EC = x.
3. Рассмотрим ΔBON и ΔBME: ∠MBE – общий; ∠BNO = ∠BEM (т.к. AN // ME), следовательно, ΔBON ∼ ΔBME (по двум углам). Из подобия следует: $\frac{BN}{BE} = \frac{BO}{BM} = \frac{1}{2}$.
4. Значит, BM = 2BO, следовательно, $\frac{BO}{OM} = \frac{1}{1}$.

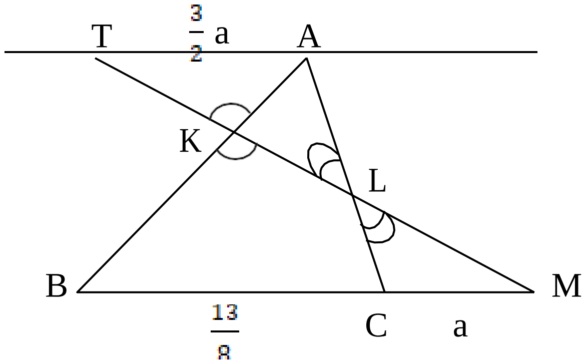
Ответ: $\frac{BO}{OM} = \frac{1}{1}$.

<u>2 способ:</u> Решим эту задачу с помощью барицентрического метода.

1. Загрузим точки A, B, C соответствующими массами. По определению центра масс для точки M: AM × m_A = MC × m_C; AM = MC (т.к. BM - медиана), следовательно $m_A = m_C = 1$
   По определению центра масс для точки N: BN × m_B = CN × m_C; т.к. AN делит сторону BC в отношении 1/2, то $\frac{BN}{CN} = \frac{mC}{mB} = \frac{1}{2}$ следовательно, $m_B = 2$.
2. Т.к. $m_A = m_C = 1$, то $m_M = 2$; $m_B = 2$; точка O является центром масс системы двух точек B и M, значит по определению центра масс $\frac{BO}{MO} = \frac{mM}{mB} = \frac{1}{1}$. Ответ: $\frac{BO}{OM} = \frac{1}{1}$.



Задача 2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки K и L так, что AK/KB = 4/7; AL/LC = 3/2. Прямая KL пересекает продолжение стороны BC в точке M. Найти отношение CM/BC.

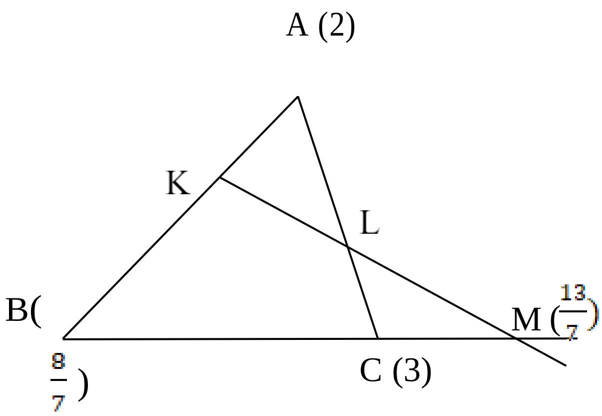


<u>1 способ:</u>

1. Через точку A проведем прямую, параллельную BC.
   Пусть точка T – ее пересечение с прямой KL.
   Обозначим CM = a.
2. Из подобия треугольников ALT и CLM следует, что $AT = \frac{3}{2}CM = \frac{3}{2}a$.
3. Из подобия треугольников AKT и BKM следует, что $BM = \frac{7}{4}AT = \frac{7}{4}\cdot\frac{3}{2}a = \frac{21}{8}a$.
4. Тогда $BC = BM - CM = \frac{21}{8}a - a = \frac{13}{8}a$. Следовательно, $\frac{CM}{BC} = \frac{8}{13}$

.Ответ: $\frac{CM}{BC} = \frac{8}{13}$.

<u>2 способ:</u>

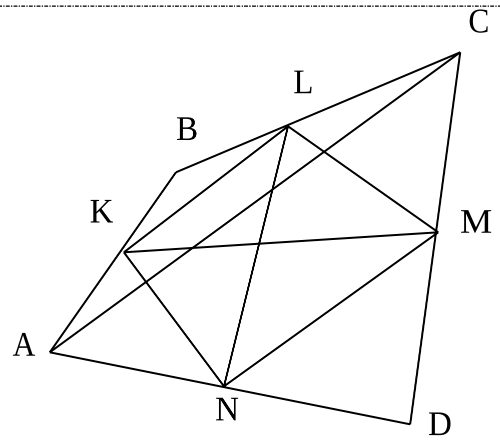


1. Загрузим точки A, B, C соответствующими массами.
2. По определению центра масс для точки L: $AL \times m_A = CL \times m_C$;
   Т.к. $\frac{AL}{Cl} = \frac{3}{2}$, то $m_A = 2$; $m_C = 3$.
3. По определению центра масс для точки K: $AK \times m_A = BK \times m_B$;
   Т.к. $\frac{AK}{BK} = \frac{4}{7}$, то $m_B = \frac{8}{7}$.
4. Рассмотри центр масс двух точек B и M – точку C:
   $m_C = m_B + m_M$, следовательно $m_M = \frac{13}{7}$,
   а значит $\frac{CM}{BC} = \frac{8\cdot 7}{7\cdot 13} = \frac{8}{13}$. .

Ответ: $\frac{CM}{BC} = \frac{8}{13}$.

Задача 3 (задача 16 ЕГЭ профиль). Дан выпуклый четырёхугольник ABCD. а) Докажите, что отрезки *LN* и *KM*, соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

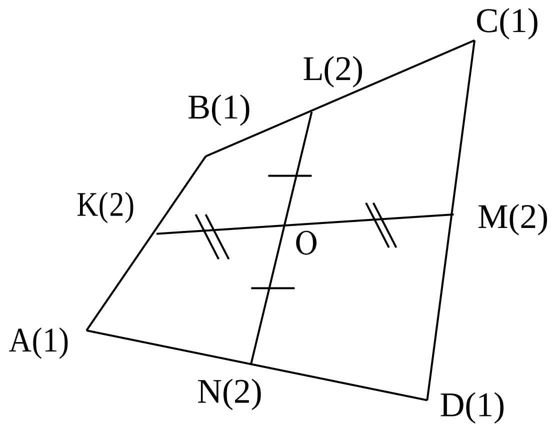
1 способ:



1. Пусть K, L, M и N – середины сторон AB, BC, CD, AD четырехугольника ABCD соответственно.
2. Тогда KL и MN – средние линии треугольников ABC и ADC. Значит, KL = $\frac{1}{2}$ AC = MN;

   KL // AC // MN, поэтому KLMN – параллелограмм.
3. Значит, его диагонали KM и LN делят друг друга пополам, что и требовалось доказать.

2 способ:



1. Загрузим точки A, B, C, D четырехугольника ABCD соответствующими массами:
Пусть K, L, M и N – середины сторон AB, BC, CD, AD четырехугольника ABCD соответственно. По определению центра масс: $m_A \times AK = m_B \times BK$; $m_B \times BL = m_C \times CL$;
$m_C \times CM = m_D \times DM$; $m_D \times DN = m_A \times AN$. Значит массы точек A, B, C, D равны между собой.

2. Пусть $m_A = m_B = m_C = m_D = 1$. Т.к. точки K, L, M и N – середины сторон AB, BC, CD, AD, то $m_K = m_L = m_M = m_N = 2$.

3. По определению центра масс для точки O: $m_K \times KO = m_M \times MO$; $m_N \times NO = m_L \times LO$, следовательно KO = MO; NO = LO, что и требовалось доказать.

Проанализировав способы решения задач на соотношения длин отрезков: метод масс и метод дополнительных построений, можно с уверенностью сказать, что барицентрический метод наиболее рациональный и эффективный, что помогает быстро и оптимально решать задачи на данную тематику.

2.2.2 Практическое занятие

Цель практических занятий состояла в том, чтобы показать достоинства метода масс при решении задач на соотношения длин отрезков перед другими методами.

На первом практическом занятии одноклассникам были предложены для решения 2 задачи, которые рассматривались в работе. Ребятам предстояло в группах решить их с помощью знакомых им методов. Они решали задачи через подобие треугольников, а также использовали метод дополнительных построений. Решение задач вызвало у них затруднения. Успешно решена была только первая задача.

На втором практическом занятии я объяснила суть метода масс и предложила ребятам снова решить задачи первого практического занятия только с помощью барицентрического метода. Одноклассники успешно справились с поставленной задачей, затратив меньше времени и сил

Таким образом, барицентрический метод оказался более простым и понятным по сравнению с другими уже знакомыми методами.

3. Заключение

В результате проведенного исследования я:

1. Познакомился с теорией способа решения задач методом геометрии масс;
2. Подтвердил свою гипотезу о том, что метод геометрии масс позволяет рационально решать задачи на отношения длин отрезков, которые сложно решать другими способами;
3. Убедился в том, что используя рациональные способы решения математических задач, можно сделать этот процесс интересным и увлекательным.

Итак, в ходе работы мы исследовали эффективность применения барицентрического метода при решении геометрических задач, рассмотрели способы решения задач с помощью данного метода. Собранный нами материал можно использовать на уроках, а также на факультативных занятиях по подготовке к ОГЭ, ЕГЭ, олимпиадам. Материал, представленный в этой работе, будет также полезен всем, кто интересуется вопросами математики .Перспективу своей работы вижу в применении метода масс к решению задач по стереометрии в 10 классе.

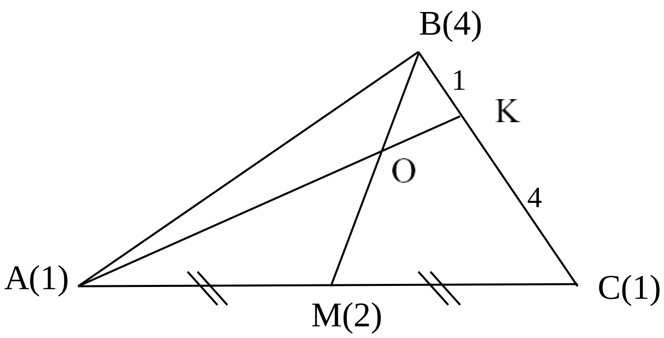
4. Список литературы

1. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. Москва «Наука», главная редакция физико-математической литературы, 1987, библиотечка «Квант», выпуск 61.
2. Интернет ресурсы: https://ege.sdamgia.ru
3. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: Ч.2 – Наука, 1990
4. Ф.Ф.Лысенко, С.Ю. Кулабухова, «Математика 9 класс, подготовка к ГИА-2012». «Легион-М», Ростов на Дону.
5. Эвнин А.Ю. Метод масс в геометрии треугольника // Математика в школе – 2014
6. Эвнин А.Ю. Практикум по математике – Челябинск, 2009
7. Эвнин А.Ю. 150 красивых задач для будущих математиков, 2014

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Задача 1.

В треугольнике ABC точка K делит BC в отношении 1:4, считая от вершины B. В каком отношении AK делит медиану BM?



1. Загрузим точки A, B, C соответствующими массами. По определению центра масс для точки K: BK × m_B = KC × m_C; $\frac{BK}{CK} = \frac{mC}{mB} = \frac{1}{4}$

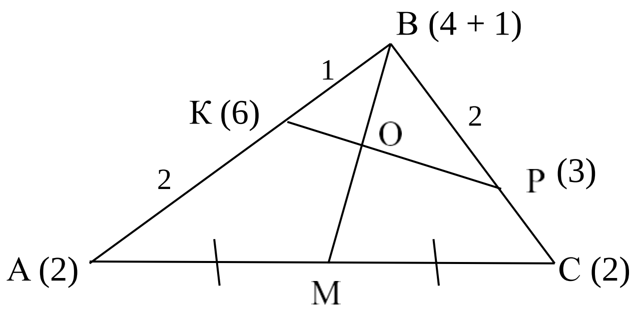
   следовательно, $m_B = 4$, $m_C = 1$.
2. По определению центра масс для точки M: AM = MC (по условию), значит $m_A = m_C = 1$.

   Следовательно $m_M = m_A + m_C = 2$.
3. Точка O является центром масс системы двух точек B и M, значит по определению центра масс $\frac{BO}{MO} = \frac{mM}{mB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{BO}{MO} = \frac{1}{2}$.

Задача 2.

Дан треугольник ABC, BM – медиана. Отрезок KP точкой K делит AB в отношении 2:1 от вершины A, а точкой P делит отрезок BC в отношении 2:1 от вершины B. Отрезки KP и BM пересекаются в точке O. В каком отношении точка O делит отрезок KP?



1. Найдем такие массы точек A, B, C, чтобы точка O стала центром масс системы точек, т.е. центр масс должен попасть и на отрезок KP, и на отрезок BM. Для этого расщепим массу точки B.
2. Относительно точки P: $2 \cdot m1_B = m_C$ (из соотношения BP и CP). Относительно точки K: $m2_B = 2 \cdot m_A$ (из соотношения BP и CP).
3. Пусть $m1_B = 1$, тогда $m_C = 2$, $m_A = m_C = 2$ (BM – медиана), $m2_B = 4$.

   Значит $m_K = m2_B + m_A = 6$; $m_P = m1_B + m_C = 3$.

4. Следовательно, относительно точки O: $\frac{Ko}{Po} = \frac{mP}{mK} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{KO}{PO} = \frac{1}{2}$.

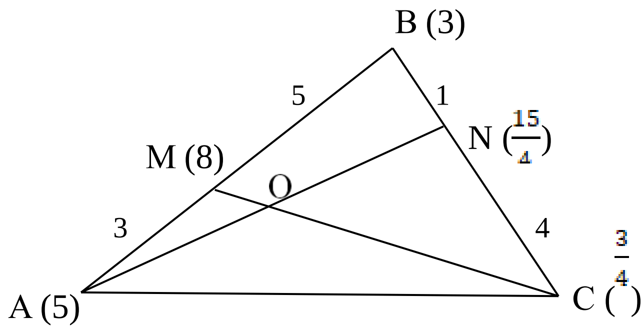
Задача 3.

На сторонах AB и BC расположены точки M и N соответственно, причем AM : BM = 3 : 5, BN : NC = 1 : 4. Прямые CM и AN пересекаются в точке O. Найти отношения AO : ON и CO : OM.

1. Загрузим точки A, B, C соответствующими массами.

   По определению центра масс для точки M: $BM \times m_B = AM \times m_A$; $\frac{BM}{AM} = \frac{mA}{mB} = \frac{5}{3}$ следовательно, $m_B = 3$, $m_A = 5$.

   По определению центра масс для точки N: $BN \times m_B = CN \times m_C$; $\frac{BN}{CN} = \frac{mC}{mB} = \frac{1}{4}$, следовательно, $m_C = \frac{3}{4}$.



2. Точки M и N – центры масс для точек A и B, C и B, следовательно, $m_M = m_B + m_A = 5$; $m_N = m_B + m_C = \frac{15}{4}$.

3. Точка O является центром масс системы двух точек A и N, значит по определению центра масс $\frac{AO}{NO} = \frac{mN}{mA} = \frac{3}{4}$. Также точка O является центром масс системы двух точек C и

   M, значит по определению центра масс $\frac{CO}{MO} = \frac{mM}{mC} = \frac{3}{32}$.

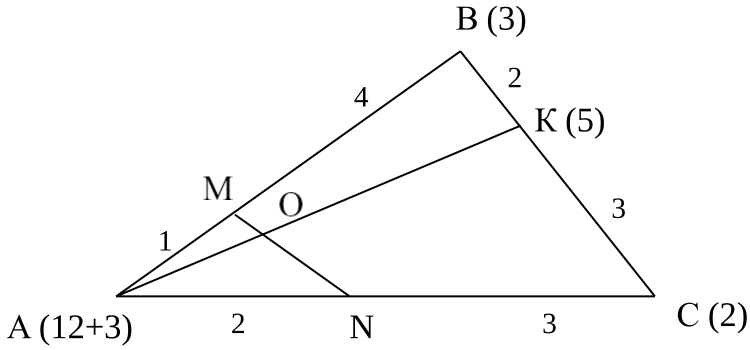
   Ответ: $\frac{AO}{NO} = \frac{3}{4}$; $\frac{CO}{MO} = \frac{3}{32}$.

Задача 4.

В треугольнике ABC точки M, N, K расположены соответственно на сторонах AB, AC, BC так, что AM : BM = 1 : 4; AN : CN = 2 : 3; CK : KB = 3 : 2. Отрезки AK и MN пересекаются в точке O. Во сколько раз OK больше AO?

1. Найдем такие массы точек A, B, C, чтобы точка O стала центром масс системы точек, т.е. центр масс должен попасть и на отрезок AK, и на отрезок MN. Для этого расщепим массу точки A.

2. Относительно точки К: $2 \cdot m_B = 3 \cdot m_C$, значит $m_C = 2$, а $m_B = 3$.
3. Расщепим массу m_A точки А на массы m1 и m2 так, что $m1 \cdot AM = m_B \cdot BM$, следовательно, m1= 12; $m2 \cdot AN = m_C \cdot CN$, следовательно, m2= 3.



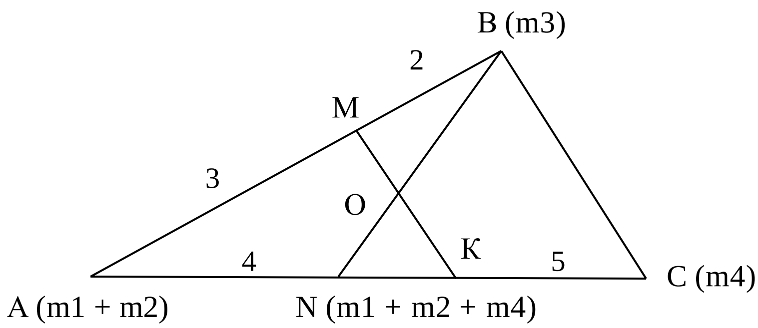
4. Точка О является центром масс системы двух точек А и К. Значит, $m_A \cdot AO = m_K \cdot KO$, т.е. $(m1+m2) \cdot AO = (m_B + m_C) \cdot KO$. Следовательно, $\frac{KO}{AO} = \frac{15}{5} = 3$.

Ответ: $\frac{KO}{AO} = 3$.

<u>Задача 5.</u>

В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки M и N соответственно так, что AM : BM = 3 : 2 и AN : CN = 4 : 5. В каком отношении прямая, проходящая через точку M параллельно BC, делит отрезок BN?

1. Пусть MO // BC и пересекает сторону AC в точке К. Тогда треугольник АМК подобен треугольнику АВС (по двум углам). Следовательно, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{2}$



2. Найдем такие массы точек A, B, C, чтобы точка O стала центром масс системы точек, т.е. центр масс должен попасть и на отрезок BN, и на отрезок MK. Для этого расщепим массу точки А.
3. Пусть масса m точки А равна m = m1 + m2. Масса точек B и C равны m3 и m4 соответственно. Тогда составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3 \times m1 = 2 \times m3 \\ 3 \times m2 = 2 \times m4 \\ 4 \times (m1 + m2) = 5 \times m3 \end{cases}$$

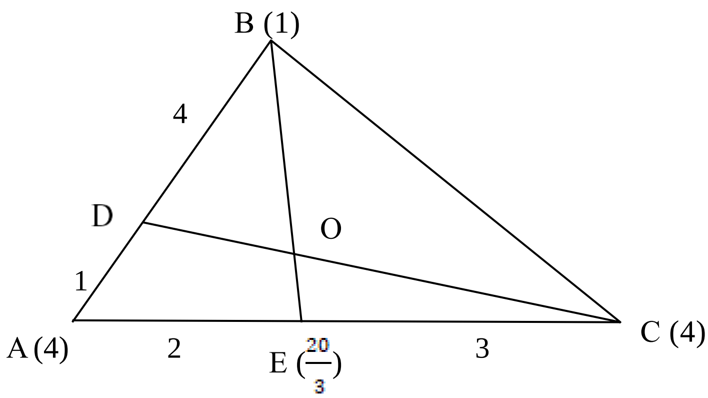
$$\begin{cases} m1 = \frac{2}{3} \times m3 \\ m2 = \frac{2}{3} \times m4 \\ m3 = \frac{7}{8} \times m4 \end{cases}$$

5. Пусть m4 = 1, тогда $m3 = \frac{7}{8}$; $m1 = \frac{14}{24}$; $m2 = \frac{2}{3}$. Следовательно, $m_N = m1 + m2 + m4 = \frac{54}{24}$. По определению центра масс для точки O: $\frac{BO}{NO} = \frac{mN}{m3} = \frac{54 \cdot 8}{24 \cdot 7} = \frac{18}{7}$.

Ответ: $\frac{BO}{NO} = \frac{18}{7}$.

Задача 6.

В треугольнике ABC на стороне AC взята точка E, причем AE : EC = 2 : 3, а на стороне AB взята точка D так, что AD : DB = 1 : 4. Отрезки CD и BE пересекаются в точке O. Найдите отношение четырехугольника ADOE к площади треугольника ABC.

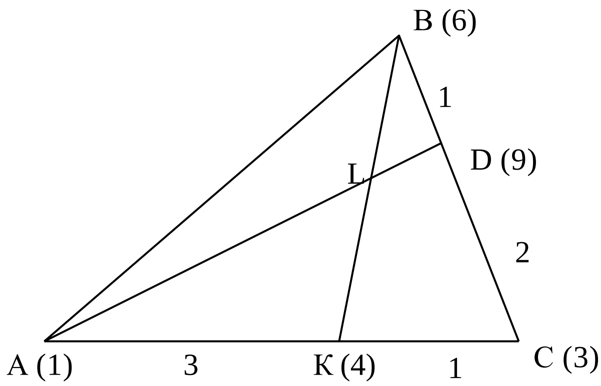


1. Загрузим точки A, B, C соответствующими массами исходя из определения центра масс. Получим, $m_B = 1$, $m_A = 4$, $m_C = \frac{8}{3}$, $m_E = m_A + m_C = \frac{20}{3}$.
2. Найдем площади треугольников ABE и BDO: $\frac{SABE}{SADO} = \frac{AB \cdot BE}{BD \cdot BO} = \frac{23}{16}$, следовательно, $S_{ABE} = 23$, $S_{BDO} = 16$.
3. Треугольники ABC и ABE имеют общую высоту, следовательно, $\frac{SABC}{SABE} = \frac{AC}{AE} = \frac{5}{2}$, т.е. $S_{ABC} = \frac{5}{2} S_{ABE}$.
4. $S_{ADOE} = S_{ABE} - S_{BDO} = 23 - 16 = 7$. $\frac{SADOE}{SABC} = \frac{SADOE}{\frac{5}{2}SABE} = \frac{14}{115}$.

Ответ: $\frac{SADOE}{SABC} = \frac{14}{115}$.

Задача 7.

Площадь треугольника ABC равна 120, точка D лежит на отрезке BC так, что BD : CD = 1 : 2, биссектриса BK пересекает прямую AD в точке L. Найдите площадь четырехугольника KLDC, если AK : KC = 3 : 1.



1. Загрузим точки A, B, C соответствующими массами исходя из определения центра масс для точки L. Получим, $m_A = 1$, $m_C = 3$, $m_B = 6$. Таким образом, $\frac{AL}{DL} = \frac{mD}{mA} = \frac{9}{1}$; $\frac{BL}{LK} = \frac{mK}{mB} = \frac{2}{3}$.
2. Треугольники ABC и ABK

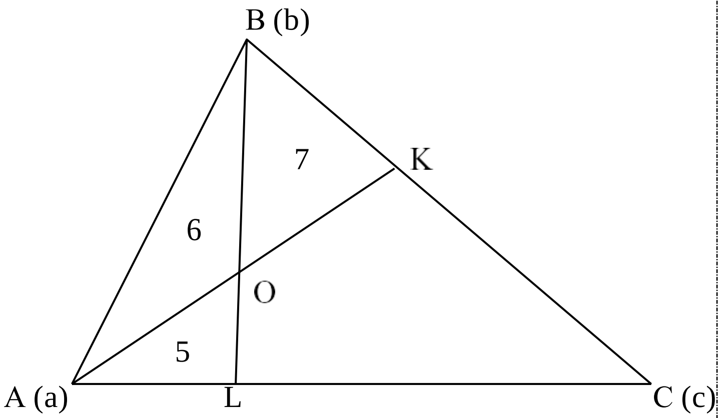
имеют общую высоту, следовательно $S_{ABK} = S_{ABC} \cdot \frac{AK}{AC} = 120 \cdot \frac{3}{4} = 90$. Значит, $S_{KBC} = 30$. Аналогично, $S_{ABD} = 40$.

3. Рассмотрим треугольники КВС и BLD: $\frac{SBLD}{SKBC} = \frac{2}{5 \cdot 3}$, т.е. $S_{BLD} = 4$. Значит, $S_{KLDC} = S_{KBC} - S_{BLD} = 26$.

   Ответ: $S_{KLDC} = 26$.

Задача 8.

На сторонах АС и ВС взяты точки L и K. O – точка пересечения отрезков AK и BL. Найдите площадь исходного треугольника, если площади треугольников ALO, AOB, BOK равны соответственно 5, 6 и 7.



1. Заметим, что $\frac{BO}{OL} = \frac{SABO}{SAOL} = \frac{6}{5}$ и $\frac{AO}{OK} = \frac{SABO}{SBOK} = \frac{6}{7}$. Подберем такие массы a, b,c для точек A, B, C, чтобы точка O стала центром массы системы. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 6 \cdot b = 5 \cdot (a + c) \\ 6 \cdot a = 7 \cdot (b + c) \end{cases}$$

2. Из полученных уравнений найдем, a = 77c; b = 65c. Отсюда CL = 77 · LA, значит $S_{BCL} = 77 \cdot S_{ALB}$; $S_{ABC} = 78 \cdot S_{ALB} = 78 \cdot 11 = 858$.

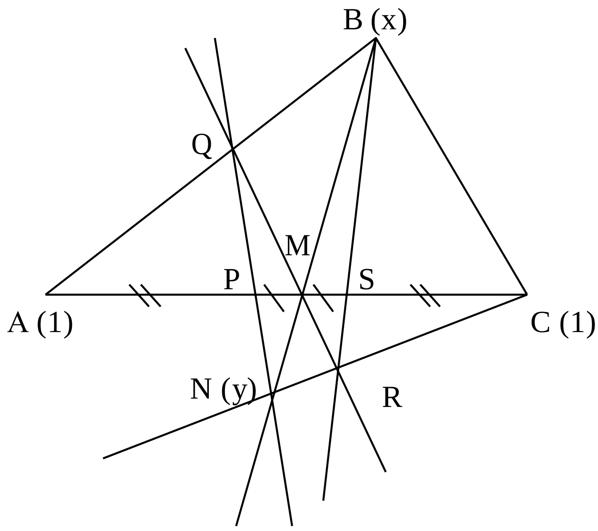
   Ответ: $S_{ABC} = 858$.

Задача 9.

Дан треугольник ABC; на продолжении его медианы BM за точку M выбрана точка N, через которую проведена прямая, пересекающая отрезки AM и AB в точках P и Q соответственно. Прямые MQ и NC пересекаются в точке R, а прямые RB и AC – в точке S. Докажите равенство PM = MS.

1. Поместим в точки A и C единичные массы, а в точки B и N такие массы x и y, что Q = c (1A, xB) и M = c (xB, yN).

2. Поскольку M – центр масс точек A и C, т.е. M = c (1A, 1C), то M = c (xB, yN, 1A, 1C) = c ((1 + x)Q, (1 + y)R).



3. По-разному группируя массы точек A ,B, N получаем, что P – центр масс этих точек, т.е. 1A + x + y = (1 + x + y) P.

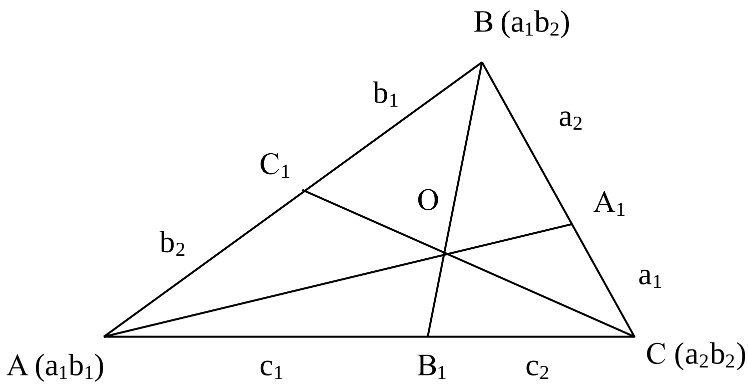
   Аналогично получаем, S – центр масс точек B, C, N, т.е. 1B + x + y = (1 + x + y) S.

4. Значит, M = c ((1 + x + y) P; (1 + x + y) S). Получилось, что центр двух одинаковых масс в точках P и S расположен в точке M. Поэтому M – середина отрезка PS.

Задача 10.

Докажите теорему Чевы. На сторонах треугольника ABC выбраны точки $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$. Отрезки AA1, BB1, CC1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{CA1}{BA1} \cdot \frac{BC1}{AC1} \cdot \frac{AB1}{CB1} = 1$.

1. Пусть отрезки AA1, BB1, CC1 пересекаются в точке O. Разместим в вершинах треугольника такие массы, чтобы точка O стала центром масс системы. Обозначим $CA_1 = a_1$; $BA_1 = a_2$; $BC_1 = b_1$; $AC_1 = b_2$; $AB_1 = c_1$; $CB_1 = c_2$.



   Следовательно, подходящим будет распределение масс (a_1b_1 A, a_1b_2 B, a_2b_2 C)

2. Если выполнено равенство $\frac{CA1}{BA1} \cdot \frac{BC1}{AC1} \cdot \frac{AB1}{CB1} = 1$, то $a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2$, значит B_1 – центр масс двух точек A и C. И тогда центр масс должен лежать на прямой BB_1, другими словами, прямые AA1, BB1, CC1 пересекаются в одной точке.