Филиал Муниципального бюджетного общеобразовательного учреждение средней общеобразовательной   школа с. Посёлки имени Героя Советского Союза И.Ф.Кузьмичёва- ООШ с.Никольское Кузнецкого района Пензенской области

II РЕГИОНАЛЬНЫЙ ФЕСТИВАЛЬ ТВОРЧЕСКИХ ОТКРЫТИЙ И ИНИЦИАТИВ «ЛЕОНАРДО»

«Математическая» исследовательская работа

«Производная в дорожном проектировании»

Автор: учащийся 10 класса

Колпаков Вадим

Адрес: с. Посёлки ул. Ленина д.422

Телефон: 8-927-091-64-68

Научный руководитель:

Купыра Наталья Анатольевна,

учитель математики

высшей квалификационной категории

Пенза 2022 год

Содержание.

Введение.

В настоящее время в России, а в частности в нашем районе активно развивается сельскохозяйственная промышленность. Большинство сельскохозяйственных предприятий не уделяет должного внимания транспортному сообщению. Грамотное построение в сёлах дорожных путей, которые предназначены для вывоза продукции с предприятий, позволяет рационализировать транспортные расходы и уменьшить время доставки продукции. В этом и состоит актуальность моей темы.

При изучении математики мне всегда хочется узнать её применение на практике. Поэтому работая над данной темой, я понял, что математика не существует отдельно от жизни, она поможет рационально использовать математические соотношения, которые рассматриваются применительно к конкретным ситуациям, распространённым в практической деятельности.

Поэтому **целью моей работы**: показать на примерах одномерных задач на оптимизацию, как можно добиться наиболее высоких результатов при наименьших потерях.

В работе пришлось решить ряд задач:

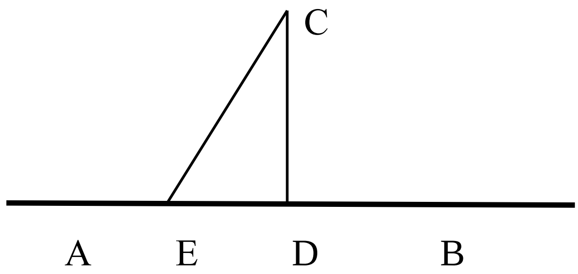
1. Определить угол примыкания подъездного пути к магистрали, расположенный недалеко от села.
2. Исследовать постройку прямой дороги от любого села В до села А, показать экономичность существующего пути.
3. Исследовать подъездные пути к автомагистрали. Определение оптимального угла примыкания при различных условиях.
4. Исследовать грузовую работу по вывозу урожая с поля к дороге. различные полевые дороги.

Данные задачи, применяемые в практической деятельности, позволяют более рационально и экономно подходить к вопросу транспортных расходов в сельскохозяйственных предприятиях.

Угол примыкания подъездного пути к магистрали.

При проектирование дорог сельскохозяйственного района часто возникает необходимость соединить подъездным путём тот или иной объект с автомагистралью. Различные экономические соображения в таких случаях обычно показывают, что подъездной путь должен пойти не перпендикулярно к магистрали, а под некоторым острым углом, называемый углом примыкания подъездного пути к магистрали.

1. Центральная усадьба села расположена в 2 км от райцентра А и 1,2 км от магистрали. Под каким углом к магистрали следует провести подъездной путь из С, чтобы стоимость перевозок груза из С в а и из А в С была наименьшей, если известно, что перевозки по магистрали будут обходиться селу в 2 раза дешевле, чем по подъездному пути?



Решение. Пусть $DE=x$. Тогда $CE=\sqrt{1{,}44+x^2}$, $AE=AD-x=0{,}8-x$. Обозначив стоимость перевозки 1 тонны груза на 1 км по магистрали через р, найдём стоимость перевозки 1 тонны груза от А до С (или в обратном направлении):

$$T(x)=p(0{,}8-x)+2p\sqrt{1{,}44+x^2}, (0\leq x\leq 0{,}8)$$

Требуется найти наименьшее значение функции T на отрезке $(0;0{,}8)$. Найдём производную функции:

$$T'(x)=-p+\frac{2px}{\sqrt{1{,}44+x^2}}.$$

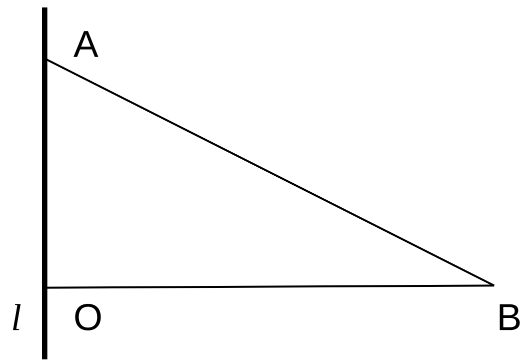
Замечаем, что на рассматриваемом отрезке у функции $T(x) = p(0{,}8 - x) + 2p\sqrt{1{,}44 + x^2}$, одна критическая точка $x_0 = 0{,}4\sqrt{3}$, при чём

$$T(0) = T(0{,}8) = 0{,}8p.$$

Значит, в точкеx_0 функции принимает наименьшее значение. Теперь легко найти угол примыкания:

$$tg \propto = \frac{1{,}2}{0{,}4\sqrt{3}} = \sqrt{3} \rightarrow \propto = 60^{0.}$$

2. Сообщения между сёлами и центральной усадьбой А Fрасположенного около магистрали *l* осуществляется по дорогам, состоящим из двух перпендикулярных отрезков. Докажу, что постройка прямой дороги от любого села В до села А не может сократить путь из В в А более чем на 30%.



Решение. Пусть $AO = a, OD = x$. Тогда в результате спрямления путь В до А уменьшится на величину

$$\Delta S = OD + OA - AB = x + a - \sqrt{x^2 + a^2}.$$

Что составит такую часть от прежнего пути:

$$\delta(x) = \frac{\Delta S}{OB + OA} = 1 - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a + x}, (x > 0).$$

Найду производную функции $\delta(x)$:

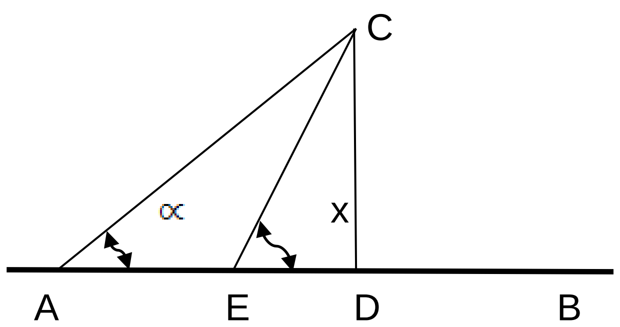
$$\delta'(x) = \frac{a(a-x)}{(x+a)^2\sqrt{a^2+x^2}}$$

Производная равна нулю при $x = a,$ при чём $x \in (0; \mathrm{a})$ производная положительная, а при $x \in (a, +\infty)$- отрицательна. Значит, функция $\delta(x)$ имеет на промежутке $(0, +\infty)$ наибольшее значение, и оно достигается при $x = a$. Следовательно, экономия пути не превзойдёт величины $\delta(a) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, что меньше 0,3, или 30%, существующего пути.

Подъездные пути.

Ранее была рассмотрена задача о нахождение угла примыкания подъездного пути к автомагистрали. Предлагаю рассмотреть ещё несколько задач по расчёту оптимального угла примыкания.

1. Определю, каким должен быть угол примыкания подъездного пути CE к магистрали AB, чтобы суммарный годовой пробег автомобилей из C в A и B был как можно меньше, если известно, что движение между C и A будет в 2 раза интенсивнее, чем между C и B, а AB=100 км, AC=50 км, СД=30 км.



Решение. Пусть m количество рейсов, которое планируется в среднем в течение года из C в B. Тогда суммарный годовой пробег автотранспорта [1] из C в A и B можно подсчитать по формуле

$$S(x) = 2m(AE + EC) + m(EC + BE) = m(3EC + AE + AB).$$

Из этой формулы видно, что точку примыкания E не имеет смысла выбирать правее D, так как в таком случае $CE > CD, AE > AD$. И значение $S(x)$, будет больше, чем при E=D. Значит, x принадлежит интервалу $I = \left[\propto; \frac{\pi}{2}\right]$.

Выразив из прямоугольного треугольника CDE стороны CE и DE через CD и x, получим:

$$S(x) = m\left(\frac{90}{\sin x} - 30ctg\, x + 140\right).$$

Найдём производную:

$$S'(x) = \frac{90m(\frac{1}{3} - \cos x)}{sin^2 x}$$

Так как производная существует в каждой точке отрезка I и обращается на нём в нуль только при

$$x_0 = arccos\frac{1}{3} \approx 70^0$$

То x_0 - единственная критическая точка функции $S(x)$, при чём $S'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс. Значит, при $x = x_0$ функция $S(x)$ и достигает наименьшего значения.

2. Найдём оптимальный угол примыкания в ситуации предыдущей задачи, изменив лишь расстояние между A и C с 50 км на 31 км.

Решение. В данном случае $S'(x)$ нигде на отрезке $I = \left[\propto; \frac{\pi}{2}\right]$ не обращается в нуль. Действительно, поскольку косинус на отрезке I убывает, то при любом x из I.

$$\cos x \le cos \propto = \frac{\sqrt{31^2 - 30^2}}{31} = \frac{\sqrt{61}}{31} < \frac{8}{31} < \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

И поэтому уравнение $\cos x = \frac{1}{3}$ на I решений не имеет. Одновременно показал, что $S'(x) > 0$ на отрезке I, и поэтому $S(x)$ на этом отрезке возрастает. Значит, наименьшее значение $S(x)$ достигает при $x =\propto$, и поэтому в рассматриваемом случае подъездной путь следует вести прямо к пункту А.

3. Определим каким должен быть угол примыкания [3] подъездного пути из пункта С к магистрали, чтобы суммарная стоимость перевозок из С в А и В (и в обратном направлении) была наименьшей, если известно, что годовой грузооборот между А и С составляет a, между В и С b $(a > b)$, а стоимость перевозки груза (1 т на 1 км) по магистрали m, по подъездному пути p $(m < p)$.

Решение. Введу обозначение:

$$CD = h, AD = s, AB = t, m(a-b) = r, p(a+b) = q$$

Тогда суммарная стоимость годового грузооборота для пункта С такова:

$$T(x) = amAE + apCE + bm(AB - AE) + bpCE = rAE + qCE + bmAB$$

Из найденного выражения видно, что точку примыкания не имеет смысла брать правее точки D. Значит, $x \in I = \left[\propto, \frac{\pi}{2}\right]$ и

$$T(x) = \frac{qh}{\sin x} - \ rh\, ctg\, x + bmt + rs$$

Найдём производную:

$$T'(x) = \frac{qh(\frac{r}{q} - \cos x)}{sin^2 x}$$

Производная существует всюду на I. Поскольку числа r и q положительны и $r < q, 0 < \frac{r}{q} < 1$, а потому уравнение $T'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{r}{q}$ имеет в промежутке$(0;\frac{\pi}{2})$ единственное решение x_0. Возможны два случая:

1. $x_0 > \propto$. Тогда функция $T(x)$ имеет на отрезке I единственную критическую точку, при чём слева от точки x_0 производная отрицательная, а справа положительная. Значит, в точке x_0 функция $T(x)$ достигает наименьшего значения.
2. $x_0 \leq \propto$. В этом случае у функции $T(x)$ нет критических точек и $\cos x < \frac{r}{q}$ на I, то есть $T'(x) > 0$ на рассматриваемом промежутке. Значит, $T(x)$ возрастает на интервале I , а потому наименьшего значения она достигает в точке $\propto$.

Для определения оптимального угла примыкания следует найти решение x_0 уравнения

$$\cos x = \frac{m(a-b)}{p(a+b)}$$

Принадлежащее $(0,\frac{\pi}{2})$, и сравнив его с $\propto = < CAB$. Если $x_0 > \propto$, то угол примыкания следует брать равным x_0; если же $x_0 \leq \propto$, то объездной путь нужно вести прямо к пункту А.

Рассмотренное решение показывает, что оптимальный угол примыкания не зависит от расстояния между пунктами А,В,С, а определяется эксплуатационными характеристиками a, b, m, p и в некоторой степени величиной угла САВ.

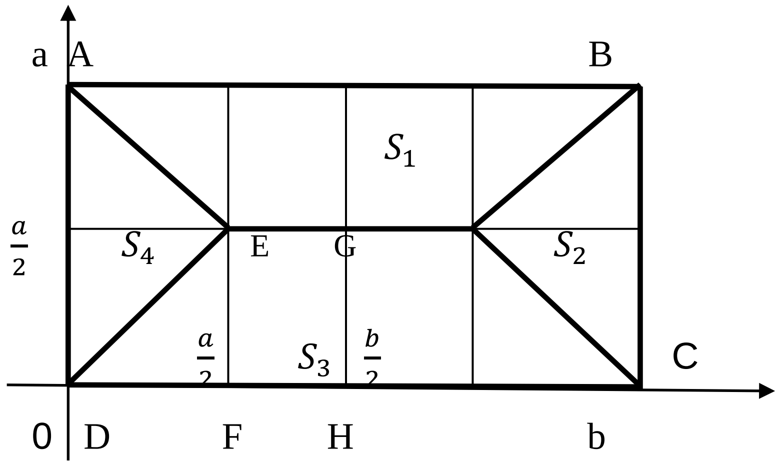
Грузовая работа по вывозу урожая с поля к дороге.

Рассмотрим поле имеющее форму криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 0, y = f(x), x = a, x = b$. Если урожай с этого поля вывозится по кратчайшим путям к дороге – оси абсцисс, то грузовая работа по вывозке урожая с поля к дороге вычисляется по формуле

$$R = k\int_a^b f^2(x)dx,$$

где k- некоторый коэффициент, зависящий от урожайности. Замечу, что значение R не зависит от выбора оси ординат, то есть определяется формой поля и положением дороги. Наиболее предпочтительно поле в форме прямоугольника, по сторонам которого проложены дороги. Поэтому особенно важно знать формулу для определения работы для такого поля. Найду грузовую работу по вывозке урожая с прямоугольного поля шириной a и длиной b по кратчайшим путям к краю поля [2].

Решение. Так как из данной точки поля урожай вывозится к ближайшей стороне прямоугольника, то поле делится на 4 зоны S_1, S_2, S_3, S_4 из которых машины идут соответственно к сторонам AB, DC, BC, DA . на 8 треугольников и 4 прямоугольника.



Найду работу R_T по вывозке урожая с треугольника DEF. Ось абцисс (дорога) в этом случае должна совпадать с прямой DC. За ось ординат примем прямую DA. Тогда DE - график функции $f(x) = x$. Поэтому

$$\mathrm{R_T} = \mathrm{k}\int_0^{\mathrm{a}\backslash 2} \mathrm{x}^2\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{ka}^3}{24}$$

Поскольку работа формулой поля и положением дороги, то она будет такой же и для каждого из остальных треугольников (относительно своей дороги – катета).

Найду работу

$$R_{П} = k \int_{a\backslash 2}^{b\backslash 2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 dx = \frac{ka^2}{4}\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right) = \frac{k(a^2b - a^3)}{8}$$

Такой же будет работа и для остальных прямоугольников (относительно своих дорог). Теперь можно найти ответ на вопрос задачи:

$$R = 8R_T + 4R_{П} = \frac{k}{6}(3a^2b - a^3).$$

Полевые дороги.

Поля севооборота обычно проектируют в форме прямоугольников, что обеспечивает наиболее производительное и правильное выполнение механизированных полевых работ. В соответствии с этим полевые дороги также целесообразно проектировать в виде сетки прямоугольников, совмещая их стороны со сторонами полей севооборота [4]. Предлагаю рассмотреть одну из задач, возникающих при определении рационального соотношения сторон прямоугольника, являющихся основой сети полевых дорог.

Если прямоугольное поле окаймлено полевой дорогой. То урожай с любой точки поля транспортируется сначала по кратчайшему пути к дороге, а затем – по дороге к фиксированной вершине прямоугольника. Известно [4], что грузовая работа по вывозе урожая с поля в таком случае вычисляется по формуле

$$R(x) = k\left(\frac{6S^2}{x} + 9Sx - x^3\right),$$

Где x - ширина, S - площадь поля, k - некоторый коэффициент, зависящий от урожайности. Из всех прямоугольников данной площади S требуется выбрать такой, для которого грузовая работа R будет наименьшей.

Решение. Требуется найти наименьшее значение функции $R(x)$ на промежутке $\left(0, \sqrt{S}\right)$. Найду производную:

$$R'(x) = -\frac{3k(x^2 - S)(x^2 - 2S)}{x^2}$$

Так как $R'(x) < 0$ на промежутке $\left(0, \sqrt{S}\right)$ убывает. Поэтому функция R достигает наименьшего значения при $x = \sqrt{S}$, то есть тогда, когда прямоугольник является квадратом.

Заключение.

Проделав свою работу, я убедился в том, что грамотное построение в сёлах дорожных путей, которые предназначены для вывоза продукции с предприятий, позволяет рационализировать транспортные расходы и уменьшить время доставки продукции. И в этом поможет всегда математический подход к решению поставленных задач.

1. Определил угол примыкания подъездного пути к магистрали, расположенный недалеко от нашего села

$$tg \propto = \frac{1,2}{0,4\sqrt{3}} = \sqrt{3} \to \propto = 60^{0}.$$

2. Исследовал постройку прямой дороги от любого села В до села А, показал экономичность существующего пути составляет 30%.
3. Исследовать подъездные пути к автомагистрали. Определение оптимального угла примыкания при различных условиях

$$x_0 = arccos\frac{1}{3} \approx 70^0$$

4. Исследовать грузовую работу по вывозу урожая с поля к дороге, которая равна

$$R = 8R_T + 4R_{\Pi} = \frac{k}{6}(3a^2b - a^3).$$

Решение данных исследовательских задач, позволило мне удовлетворить моё любопытство, ответить на многие вопросы, подтвердить народную мудрость используй в любой работе научный подход.

Литература.

1. Бируля А.К. Проектирование автомобильных дорог.М.1961.
2. Романенко И.А. Технико-экономические основы проектирования сетей автомобильных дорог. М.1975.
3. Петров В.А. Преподавание математики в сельской школе. М.1986
4. Славуцкий А.К. Проектирование, строительство, содержание и ремонт сельскохозяйственных дорог. М., 1972.