муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа № 25 г. Пензы им. В.П.Квышко»
(МБОУ СОШ № 25 г. Пензыим. В.П.Квышко)

II РЕГИОНАЛЬНЫЙ ФЕСТИВАЛЬ
ТВОРЧЕСКИХ ОТКРЫТИЙ И ИНИЦИАТИВ
«ЛЕОНАРДО»

«Математика»

Исследовательская работа
<u>«Векторы спешат на помощь»</u>

Авторы:

обучающийся 9 А класса
МБОУ СОШ №25 г. Пензы им. В.П. Квышко
Алешин Валерий

обучающийся 9 А класса
МБОУ СОШ №25 г. Пензы им. В.П. Квышко
Жуков Александр

Руководитель:
Обухова Татьяна Алексеевна
учитель математики
высшей квалификационной категории

Пенза,
2022 г.

Оглавление

Введение 3
Применение векторов к решению задач. 6
Геометрические задачи на вычисление расстояний и углов. 6
Решение уравнений и систем 8
Доказательство неравенств 11
Наибольшее и наименьшее значения функций 12
Заключение 13
Список используемых источников 15

Введение

В наши дни понятие «вектор» постоянно встречается в газетных и журнальных публикациях, в выступлениях политиков, ученых, педагогов. Обсуждая важнейшие процессы в жизни общества, говорят о векторе реформ и его социальной составляющей, о векторе экономических преобразований и его изменении, о направлении вектора развития системы образования. Понятие о векторе как направленном отрезке вошло в сознание и речь современного образованного человека.

Термин «вектор» ввел в науку в середине XIX в. выдающийся ученый Уильям Гамильтон (1805-1865), профессор астрономии в Дублинском университете и королевский астроном Ирландии, известный своими глубокими исследованиями в геометрической оптике и механике. Созданный им математический аппарат впоследствии послужил основой для построения квантовой механики.

Истоки векторного исчисления находятся в механике и астрономии, где впервые были изучены конкретные векторные величины - силы и скорости. Еще в работе «Механические проблемы», созданной в школе Аристотеля, введен термин «сложение движений», т. е. скоростей, и сформулировано правило параллелограмма. Его использовал Архимед в работе «О спиралях», а позже ¬Птолемей в своем знаменитом «Альмагесте». Астрономы средневекового Востока, развивая теорию Птолемея, постоянно использовали «сложение движений».

В современной математике и теперь не мало внимания уделяется векторам. С помощью векторного метода решаются сложные задачи. Увидеть использование векторов мы можем в физике, астрономии, биологии и других современных науках. На уроках геометрии мы часто используем алгебраические методы, а можно ли применить векторы не только для решения геометрических задач, но и чисто алгебраических?

Цель исследования: рассмотреть применение векторов для решения уравнений и систем уравнений.

Объект исследования: скалярное произведение векторов.

Предмет исследования: решение задач различного содержания с помощью скалярного произведения векторов.

Задачи исследования:

1.Научиться узнавать задачи, решаемые векторным методом.

2.Использовать знания программного материала о векторах, научиться переводить данные и требования задачи с языка алгебры на язык векторов, а именно: найти координаты векторов, их длины и скалярное произведение, выполнять преобразования векторных

выражений, научиться решать задачи рассмотренным методом, переводить полученные результаты с языка векторов на алгебраический язык.

3. Сделать выводы о достоинствах и недостатках, об эффективности данного метода.

Методы исследования: структурно-логический анализ учебного материала по проблеме исследования, методы статистической обработки данных.

Понятие вектора.

Как мы знаем, величины, которые характеризуются не только численным значением (скаляром), но и направлением называются векторными величинами или просто векторами.

Название вектора произошло от латинского слова vector (везущий, несущий). Геометрическим образом вектора является направленный отрезок. Вектор обозначается двумя заглавными буквами или одной прописной буквой латинского алфавита со стрелкой или черточкой наверху ($\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$..)

Порядок букв обязателен (в данном случае точка А – начало, а В – конец вектора).

Длиной (или модулем) вектора называют длину отрезка, изображающего его и обозначают $|\overrightarrow{a}|$. Ее можно выразить через координаты вектора $\overrightarrow{a}\{x, y\}$то есть $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ Длина любого вектора-число положительное, а длина нулевого вектора равна нулю. Два ненулевых вектора, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой, называются коллинеарными. Коллинеарные векторы делятся на сонаправленные ($\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$) - и противоположно направленные ($\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$).

Для коллинеарности вектора $\overrightarrow{a}$ненулевому вектору $\overrightarrow{b}$ необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число λ , что $\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b}$, где $\lambda = \frac{|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{b}|}$.

Отсюда следует условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{a}\{x_1, y_1\}$и $\overrightarrow{b}\{x_2, y_2\}$ на плоскости: $x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2$ или $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

Сумму двух векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ можно найти по правилу треугольника или по правилу параллелограмма. В нашей работе применяем правило треугольника : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Для любого треугольника ABC можно записать: AC≤ AB+BC (неравенство треугольника). Но AB=$|\overrightarrow{a}|$ BC=$|\overrightarrow{b}|$ AC=$|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|$, отсюла получаем векторное неравенство $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| \le |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|$. Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда векторы

$\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ сонаправлены, то есть когда отношения их соответственных координат равны между собой и равны отношения их длин.

Сложение векторов можно производить и в координатной форме, то есть

$\overrightarrow{a}\{x_1, y_1\} + \overrightarrow{b}\{x_2, y_2\} = \overrightarrow{c}\{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}$.

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними**:** $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Учитывая, что $\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \le 1$, приходим к известному неравенству о скалярном произведении $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, то есть **скалярное произведение векторов не больше произведения их длин.** Знак равенства достигается тогда и только тогда , когда $\cos(\vec{a}, \vec{b})=1$ и векторы сонаправлены. Скалярное произведение векторов можно выразить в координатной форме: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 . y_2$.

Из скалярного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ вытекают соотношения

$$\overrightarrow{(a \cdot b)}^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\vec{a}, \vec{b}),$$

$$-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны. Таким образом,

если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$,то $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$,

если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Применение векторов к решению задач.

Геометрические задачи на вычисление расстояний и углов.

В ряде случаев при решении задач на вычисление применение векторов предпочтительнее конструктивных подходов, связанных с использованием дополнительных построений, применения элементарной алгебры и тригонометрии.

Чтобы успешно решать геометрические задачи посредством векторов, требуется не только знание законов векторной алгебры, знакомство с понятием разложения вектора в базисе, умение переводить геометрический факт на язык векторов, но и определенная методика при составлении плана решения. Отметим несколько важных положений.

1. Если требуется вычислить расстояние или угол, то надо применить скалярное умножение векторов.

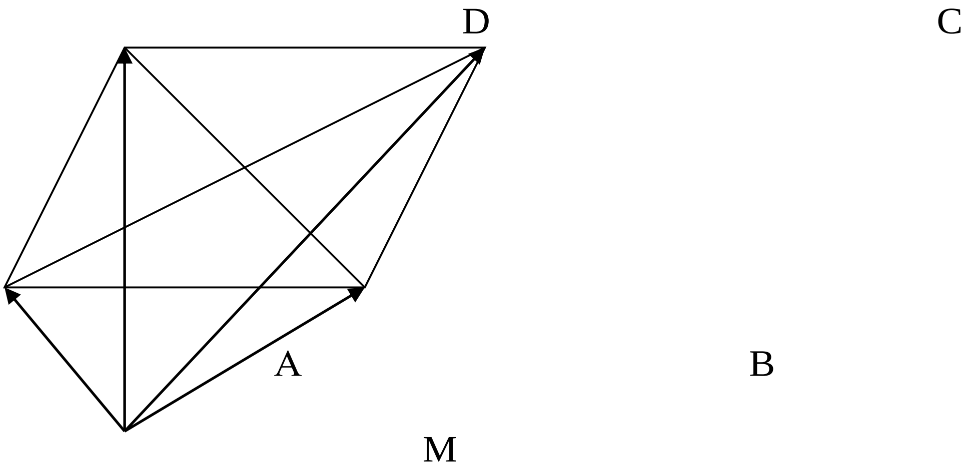
2. При введении векторов можно идти двумя путями: а) выбрать точку, от которой откладываются известные векторы; б) векторы изображать направленными отрезками, связанными с рассматриваемыми в задаче фигурами, не откладывая их от одной точки.

3. Если задача планиметрическая, то целесообразно выделить два неколлинеарных вектора в качестве базисных и остальные векторы выразить через них.

Пример 1. Дан параллелограмм ABCD. Доказать, что для любой точки M пространства разность

$$(|MA|^2+|MC|^2)-(|MB^2|+|MD|^2)$$

принимает одно и тоже же значение δ. Найти его.



Решение:

Так как ABCD – параллелограмм, то $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$. Отсюда $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}$, и поэтому $\delta=|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MC}|^2-|\overrightarrow{MD}|^2-|\overrightarrow{MB}|^2=|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MC}|^2-|\overrightarrow{MB}|^2-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})^2=|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MC}|^2-|\overrightarrow{MB}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2-|\overrightarrow{MC}|^2+|\overrightarrow{MB}|^2-2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MB}=-2|\overrightarrow{MB}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2-|\overrightarrow{MC}|^2+|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{MB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{MC}|^2+|\overrightarrow{MB}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2$.

Но $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2)$, поэтому

$$\delta=|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2)=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2)$$

В частном случае, когда параллелограмм есть прямоугольник, получаем δ=0, т.е. для любой точки М пространства

$$|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MC}|^2=|\overrightarrow{MB}^2|+|\overrightarrow{MD}|^2$$

Решение уравнений и систем

Традиционно векторы широко применяются при решении геометрических и стереометрических задач. Но оказывается, что довольно большое число примеров на решение уравнений, систем уравнений, доказательство неравенств, особенно задач на нахождение наибольших и наименьших значений существенно упрощается по сравнению с решениями, выполненными традиционным путем.

Как распознать уравнение, которое можно решать векторным методом?

-уравнение содержит алгебраическое выражение вида $\sqrt{x^2 + y^2}$ -это длина некоторого вектора $\overrightarrow{a}\{x, y\}$;

-уравнение содержит алгебраическое выражение вида $x_1 \cdot x_2 + y_1 . y_2$скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$;

-левая часть уравнения-скалярное произведение некоторых векторов, а правая часть-произведение их длин.

Пример 2. Решить уравнение

$$2\sqrt{1-2x} - x\sqrt{2x+9} = \sqrt{10(x^2+4)}$$

Решение. На первый взгляд: возводи, возводи и решай. Что и будем делать.

$$4(1-2x) + x^2(2x+9) - 10(x^2+4) = 4x\sqrt{1-2x}\cdot\sqrt{2x+9},$$

$$2x^3 - x^2 - 8x - 36 = 4x\sqrt{1-2x}\cdot\sqrt{2x+9}.$$

Возводя еще раз мы придем к многочлену, где будет и x^6, и x^5 и т.д.

Вряд ли приведет к успеху и введение новой переменной!

А векторы нам помогут.

1) ОДЗ: $\begin{cases} 1-2x \geq 0; \\ 2x+9 \geq 0. \end{cases}$ $\quad 4{,}5 \leq x \leq 0{,}5$ или $x \in [-4{,}5\ ;\ 0{,}5]$

2) введем векторы $\bar{u} = (\sqrt{1-2x}\ ; \sqrt{2x+9})$

$\bar{v} = (2;-x)$

3) находим их скалярное произведение

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = 2\sqrt{1-2x} - x\sqrt{2x+9}$$

4) вычислим длины $\bar{u}$ и $\bar{v}$, и их произведение

$$|\bar{u}| = \sqrt{1-2x+2x+9} = \sqrt{10}\ , \quad |\bar{v}| = \sqrt{2^2+(-x)^2} = \sqrt{4+x^2}\ ;$$

$$|\bar{u}|\cdot|\bar{v}| = \sqrt{10}\cdot\sqrt{4+x^2} = \sqrt{10(x^2+4)}.$$

5) Согласно условия $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|$, то есть векторы $\bar{u}\uparrow\uparrow\bar{v}$, следовательно соответственные координаты пропорциональны, то есть

$$\frac{\sqrt{1-2x}}{2} = \frac{\sqrt{2x+9}}{-x} \Rightarrow x^2(1-2x) = 4(2x+9),$$

$2x^3 - x^2 + 8x + 36 = 0$. Решаем, используя т. Безу.

Сразу замечаем, что $x = -2$.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - x^2 + 8x + 36 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3 + 4x^2} & 2x^2 - 5x + 18 \\ \quad -5x^2 + 8x & \\ - & \\ \quad \underline{-5x^2 - 10x} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{l} 18x + 36 \\ \underline{18x + 36} \end{array} \end{array}$$

$2x^3 - x^2 + 8x + 36 = (x+2)(2x^2 - 5x + 18) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ 2x^2 - 5x + 18 = 0 \end{array}\right.$$

Второе уравнение не имеет решений, т.к. D <0; с учетом ОДЗ   x = -2

Ответ: -2

Из первого задания вы заметили алгоритм. Мы будем стремиться придерживаться его в дальнейшем, а некоторые задачи будем выполнять тезисно,

Пример 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 36x^2 + 9y^4 + 4z^6 = 1 \\ x + y^2 + z^3 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Решение. Пусть $\bar{u} = (6x; 3y^2; 2z^3)$, $\bar{v} = (\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2})$. Тогда $\bar{u} \cdot \bar{v} = \frac{2}{3}$;

$|\bar{u}| = 1$, $|\bar{v}| = \sqrt{\frac{19}{72}} \Rightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} > |\bar{u}| \cdot |\bar{v}|$, что невозможно.

Ответ: система не имеет решений

Пример 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 25} = 10 \\ 3x + 4y = 26 \end{cases}$$

Преобразуем левую часть первого уравнения системы:

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$ + $\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}$ = 10. Пусть $\bar{u}$ =(x-2; y+1), $\bar{v}$ =(10-x; 5-y) $\Rightarrow$

$|\bar{u}| = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$, $|\bar{v}| = \sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}$. Находим координаты суммы векторов $\bar{u}$ и $\bar{v}$ и ее длину $\bar{u} + \bar{v}$ = (8;6), $|\bar{u} + \bar{v}|$ = 10. В соответствии с векторным неравенством $\bar{u} + \bar{v} \geq |\bar{u} + \bar{v}|$, равенство достигается, когда $\bar{u} \uparrow\uparrow \bar{v}$. Значит $\frac{x-2}{10-x} = \frac{y+1}{5-y}$ (1) $\Leftrightarrow$ 3x – 4y = 10. Теперь с учетом второго уравнения системы имеем:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ 3x + 4y = 26. \end{cases}$$

Отсюда x = 6, y = 2, подставляя эти значения в **(1)** : 1 = 1 > 0.

<u>Ответ</u>: (6;2)

Доказательство неравенств

Пример 5. *Для любых действительных чисел докажите неравенство:*

$$\frac{x+y+z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

<u>Доказательство</u>: Пусть

$\bar{u}$ = (x, y, z), $\bar{v} = (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ $\Rightarrow$ $\bar{u} \cdot \bar{v} = \frac{x+y+z}{3}$.

$|\bar{u}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $|\bar{v}| = \sqrt{\frac{1}{3}}$ $\Rightarrow$ $|\bar{u}| \cdot |\bar{v}| = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$. На основании неравенства $\bar{u} \cdot \bar{v} \leq |\bar{u}| \cdot |\bar{v}|$ имеем $\frac{x+y+z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$. Что и требовалось доказать.

Пример 6. Докажите неравенство:

$\sqrt{2a+1}$ + $\sqrt{2b+1}$ + $\sqrt{2c+1}$ ≤ 15 для всех чисел a,b и c, которые удовлетворяют условию a + b + c =1 и для которых левая часть неравенства имеет смысл

Доказательство. Пусть $\bar{u} = (\sqrt{2a+1}; \sqrt{2b+1}; \sqrt{2c+1})$, $\bar{e}$ =(1;1;1) $\Rightarrow$

$\bar{u} \cdot \bar{e} = \sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1}$; $|\bar{u}| = \sqrt{2a+1+2b+1+2c+1} = \sqrt{2(a+b+c)+3} = \sqrt{5}$

$|\bar{e}| = \sqrt{3}$.

Согласно неравенству $\bar{u} \cdot \bar{v} \leq |\bar{u}| \cdot |\bar{v}|$ имеем $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq 15$,

так как $\sqrt{15} < 15$. Ч. т. д.

Наибольшее и наименьшее значения функций

Нахождение наибольших и наименьших значений целого ряда функций с помощью производной приводит к неоправданно громоздким вычислениям, большим затратам времени и, как следствие к грубым арифметическим просчетам. Этих трудностей можно избежать, если при их вычислении использовать векторный метод.

Пример 7. Найти наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{x} + 4\sqrt{1-\frac{x}{2}}$$

Решение. D(y) = [0; 2]. Выполним ряд преобразований, чтобы длины векторов не зависели от переменной *x*:

$y = \sqrt{x} + 4\sqrt{\frac{2-x}{2}} = \sqrt{x} + 2\sqrt{2}\,\sqrt{2-x}$. Пусть $\bar{u} = (\sqrt{x}, \sqrt{2-x})$, $\bar{v} = (1; 2\sqrt{2})$ $\Rightarrow$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = \sqrt{x} + 2\sqrt{2}\,\sqrt{2-x}$; $|\bar{u}| = \sqrt{2}$; $|\bar{v}| = 3$ $\Rightarrow$ $\sqrt{x} + 4\sqrt{1-\frac{x}{2}} \leq 3\sqrt{2}$.

Векторы $\bar{u} \cdot \bar{v}$ коллинеарны, если $\frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{2-x}}{2\sqrt{2}}$. $x = \frac{2}{9}$.

Ответ: $\max\limits_{[0;\,2]} y(x) = y(\frac{2}{9}) = 3$

Пример 8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x\,(2\sqrt{16-9x^2} + 3\sqrt{9-4x^2})$$

Решение: $D(y) = [-\frac{4}{3};\ \frac{4}{3}]$

Пусть $\bar{u} = (2x;\ \sqrt{9-4x^2})$, $\bar{v} = (\sqrt{16-9x^2};\ 3x) \Rightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} = y$; $|\bar{u}| = 3$, $|\bar{v}| = 4 \Rightarrow$

$y(x) \le 3 \cdot 4 = 12$, причем знак равенства достигаются тогда и только тогда, когда $\bar{u}$ и $\bar{v}$ сонаправлены, то есть $\frac{\sqrt{16-9x^2}}{2x} = \frac{3x}{\sqrt{9-4x^2}}$

$x > 0$ $\qquad\qquad$ $x = \frac{12}{\sqrt{145}}$

Заметим, что $\frac{12}{\sqrt{145}} < \frac{4}{3}$, поэтому $\frac{12}{\sqrt{145}} \in D(y)$.

Ответ: $\max y(x) = y(\frac{12}{\sqrt{145}}) = 12$

Заключение

Векторы широко применяются и при решении геометрических задач, особенно в стереометрии.

Примененный нами векторный метод показывает, что довольно большое число примеров на решение уравнений, систем уравнений, доказательство неравенств, особенно задач на нахождение наибольших и наименьших значений существенно упрощается по сравнению с решениями, выполненными традиционным путем, а в некоторых случаях, особенно, когда много переменных, только такой подход и приводит к успеху.

Итогом нашей заинтересованности стало, то, что мы намного лучше стали понимать роль векторов в математике, взаимосвязь курса алгебры и геометрии. Кроме того, векторы позволяют «сжать» информацию, сделать ее наглядной и оперативной, и тем самым способствуют поиску путей решения математических заданий, что очень важно. И заметим, что приведенные выше решения задач не обладают для многих из нас признаком привычности, хотя они соответствуют школьной программе.

Необходимо отметить и то, что порой аналогичные задания являются частью более сложных задач. Например, при решении уравнений методом оценки: в которых максимум левой части совпадает с минимумом правой части; причем решение обычным путем не предоставляется возможным.

Надеемся, что метод решения заданий, рассмотренный нами, может оказать вам активную помощь при подготовке к итоговым и приемным испытаниям. Также будет способствовать развитию и обогащению вашей математической культуры, а значит общечеловеческой культуры.

Список используемых источников

1. Атанасян Л. С., В. Ф Бутузов, С. Б. Кадомцев и др., Геометрия 7-9, Учебник для общеобразовательных учреждений, М., «Просвещение», 2019г.

2. Гальперин И.М, Габович И.Г «Использование векторного неравенства Коши-Буняковского длярешения задач по алгебре», М., «Педагогика» Математика в школе №2 1991г.

3. Литвинова С.А. и др. «За страницами учебника математики» Издательство «Панорама» 2006 г.

4. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов/ под научн.ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005.

5. Олехник, С. Н. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10-11 классы [Текст]: учебно-методическое пособие / С. Н. Олехник [и др.]. – М.: Дрофа, 2004.

6. Рыжик В.И. «25000 уроков математики», М.,Просвещение, 1993г

7. С.А. Литвинова и др. «За страницами учебника математики» Издательство «Панорама» 2006 г.