

*Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение  
«Гимназия № 53» г. Пензы*

***II РЕГИОНАЛЬНЫЙ ФЕСТИВАЛЬ ТВОРЧЕСКИХ  
ОТКРЫТИЙ И ИНИЦИАТИВ***

***«ЛЕОНАРДО»***

*«Математика»*

*исследовательская работа*

***« «Танец» пчелы в полярных  
координатах»***

Выполнила Назарова Софья Алексеевна,  
Ученица 9 класса  
Научный руководитель  
кандидат физ.-мат. наук  
Монахова Оксана Александровна  
доцент ПГУ

Пенза, 2021

## Оглавление

|   |    |
|---|----|
| Введение  | 3  |
| 1. Полярная система координат                                 | 5  |
| 2. Связь полярной и прямоугольной декартовой систем координат | 5  |
| 3. Графики некоторых функций в полярной системе координат     | 6  |
| 4. Некоторые кривые Хабенихта                                 | 7  |
| 5. Розы Гранди  | 7  |
| 6. «Танец» пчелы в полярной системе координат                 | 9  |
| Заключение  | 12 |
| Список использованной литературы                              | 13 |

## Введение

История полярных координат начинается еще до нашей эры, так как понятие угла, понятие радиуса были уже известны древним греческим ученым. Греческий астроном Гиппарх применял полярные координаты для своих наблюдений за небесными телами. Персидские астрономы в 9 веке выдвигали идеи, которые схожи с введением полярных координат.

Строгое математическое описание полярной системы координат было сделано сразу несколькими математиками независимо друг от друга. Среди них бельгийский математик – монах иезуит Сен-Венсан (1625 год), итальянский математик Кавальери (1635 год).

Французский математик Паскаль использовал полярные координаты в своих исследованиях в середине 17 века. Ньютон занимался исследованием преобразования различных девяти систем координат, среди которых были и полярные координаты. Швейцарский математик Бернулли ввел понятие полюса и угла от полярной оси, которые используются и в настоящее время для описания этой системы координат. [5]

Полярные координаты имеют широкое применение в физике, например для моделирования звука динамиков, в фотометрии для описания зависимости отраженного светового потока от угла. В 1990-х годах российский математик В.И. Елисеев предложил биржевые графики рисовать в полярной системе, заметив, что количество дней в году -365 сопоставимо с градусной мерой угла -360 градусов. В радиолокационных станциях используются полярные координаты (рис.1), компьютерная томография сердца изображается также в ПСК.

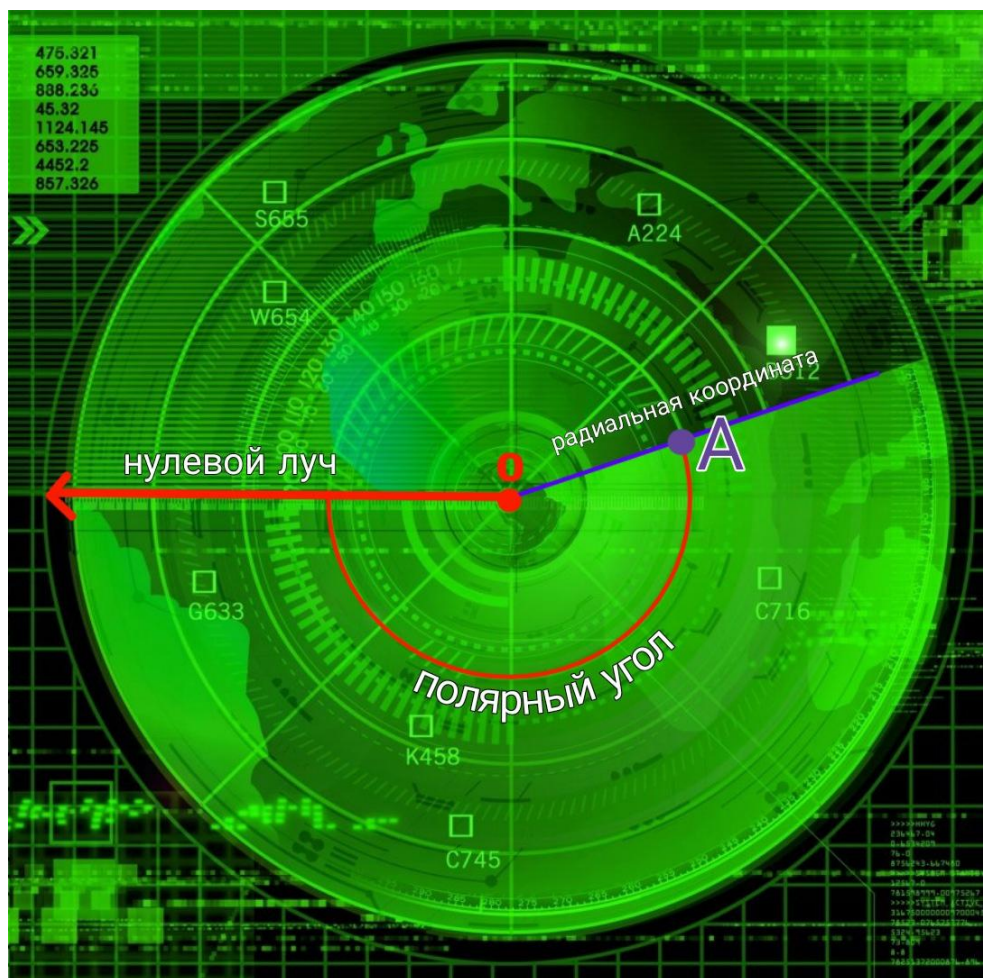


Рисунок 1. Радиолокационная станция

Изучение полярной системы координат расширяет представление о математическом аппарате и помогает понять многие приложения математики, использующие эту систему координат, поэтому является **актуальным и практически значимым**.

Изучая литературу,[2], [3] мы встретили описание «танца» пчелы, который по исследованию многих ученых «извещает других пчел о том, что найдены цветки с нектаром» [2].

Была поставлена **цель**: изучить полярную систему координат и сопоставить «танец» пчелы с полярными координатами источника корма.

Выдвинута **гипотеза**: «танец» пчелы, соотнесенный с полярной системой координат, указывает полярные координаты источника корма.

**Объект исследования** способ передачи пчелой информации об источнике корма – пчелиные «танцы». **Предметом исследования** являлось применение полярной системы координат для расшифровки «танца» пчелы. Исследование проводилось на экспериментальной пасеке Пензенского государственного аграрного университета.

Для достижения цели были поставлены и решены следующие **задачи**.

1. Изучена полярная система координат и ее связь с прямоугольной декартовой системой координат.
2. Построены графики функций некоторых кривых в полярной системе координат.
3. Изучена литература, описывающая поведение пчел.
4. Проведен эксперимент, подтверждающий гипотезу.

**Новизна** работы заключается в том, что в специальной пчеловодческой литературе не применяется математическая терминология, а математический аппарат позволяет применять методы математического анализа для обработки информации о пчелах. Например, можно строить в полярных координатах графики источников корма в разные периоды времени, прогнозировать неблагоприятные периоды, давать рекомендации пчеловодам о необходимости принятия мер.

При выполнении работы применялись следующие **методы исследования**: изучение литературы и других источников информации, проведение эксперимента, наблюдение за пчелами, метод сравнения и сопоставления данных.

## Полярная система координат

Полярная система координат — это плоская система координат, в которой каждая точка плоскости определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом.

Полярная система координат задаётся лучом, который называют нулевым или полярной осью. Точка, из которой выходит этот луч, называется началом координат или полюсом. Любая точка  $M$  на плоскости определяется двумя полярными координатами: радиальной и угловой. Радиальная координата (обычно обозначается  $\rho$ ) соответствует расстоянию от точки до начала координат. Угловая координата, также называется полярным углом или азимутом и обозначается  $\varphi$ , равна углу, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для того, чтобы попасть в эту точку. Определённая таким образом радиальная координата может принимать значения от нуля до бесконечности, а угловая координата изменяется в пределах от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ . Однако, для удобства область значений полярной координаты можно расширить за пределы полного угла, а также разрешить ей принимать отрицательные значения, что отвечает повороту полярной оси по часовой стрелке. Итак: положительным направлением отсчета углов считается направление «против часовой стрелки» [2].

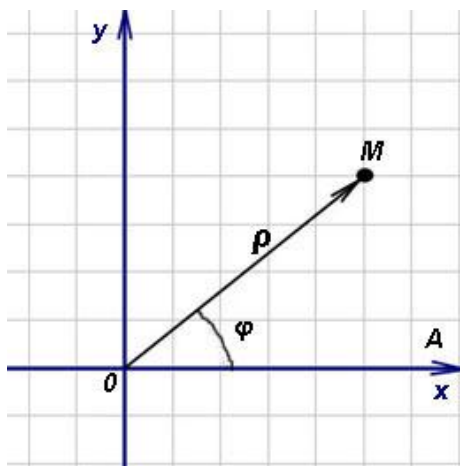


Рисунок 2. Полярная СК, совмещенная с ПДСК.

Точку  $M$  с полярными координатами  $\rho$  и  $\varphi$  обозначают символом  $M(\rho, \varphi)$ . [4]

### Связь полярной и прямоугольной декартовой систем координат

Установим связь между полярными координатами точки и её декартовыми координатами. Будем предполагать, что начало декартовой прямоугольной системы координат находится в полюсе, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью (рис.2). Пусть точка  $M$  имеет декартовы координаты  $x$  и  $y$  и полярные координаты  $\rho$  и  $\varphi$ . Тогда

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi.$$

Полярные координаты  $\rho$  и  $\varphi$  точки  $M$  определяются по её декартовым координатам следующим образом: полярный радиус  $\rho$  равен расстоянию от полюса до точки, а через декартовы координаты – равен корню квадратному из суммы квадратов декартовых координат этой точки. Для того чтобы найти величину угла  $\varphi$ , нужно, используя знаки  $x$  и  $y$ , определить квадрант, в котором находится точка  $M$ , и, кроме того, воспользоваться тем, что тангенс угла  $\varphi$  равен отношению ординаты точки к ее абсциссе. Описанные выше связи координат выражают переход от декартовых координат к полярным. [1]

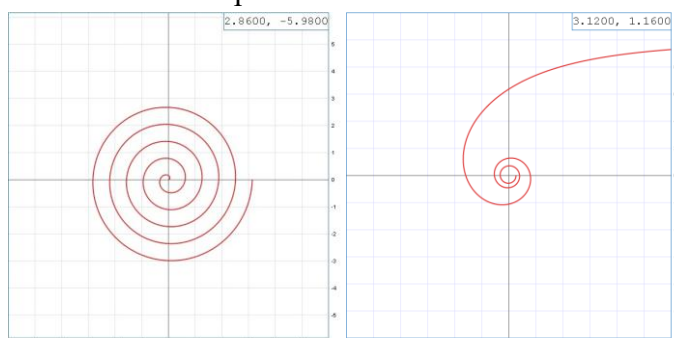
## Графики некоторых функций в полярной системе координат

С помощью полярных координат на плоскости можно задавать различные множества точек. Удобство полярных координат в этом случае заключается в том, что многие сложные кривые в полярных координатах имеют более простое аналитическое выражение, чем в декартовых координатах.

Уравнение окружности с центром в полюсе имеет очень простой вид  $\rho = \text{Const}$ ,  $\text{Const} > 0$  является радиусом этой окружности.

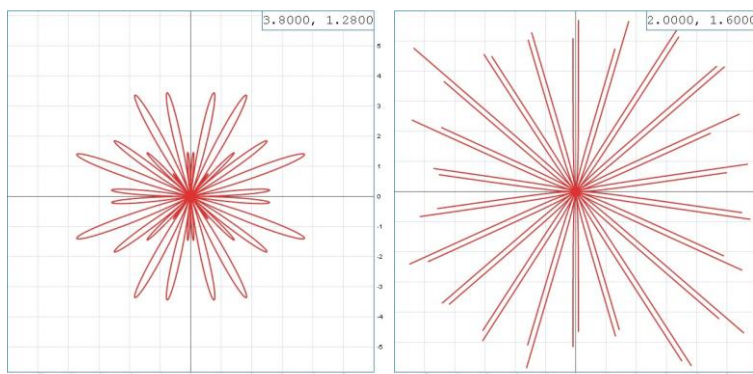
Уравнение  $\varphi = \text{Const}$ ,  $0 < \text{Const} < 2\pi$  определяет множество точек, лежащих на луче, исходящем из полюса под углом  $\text{Const}$  к полярной оси.

Простые уравнения  $\rho = \varphi/10$ ,  $\rho = 10/\varphi$  ( $\varphi \neq 0$ ) определяют две спирали, изображенные на рисунках 3 и 4. Все графики, представленные в моей работе, построены мною самостоятельно в онлайн программе построения графиков в полярной системе координат, которая является свободно распространяемой в сети интернет.

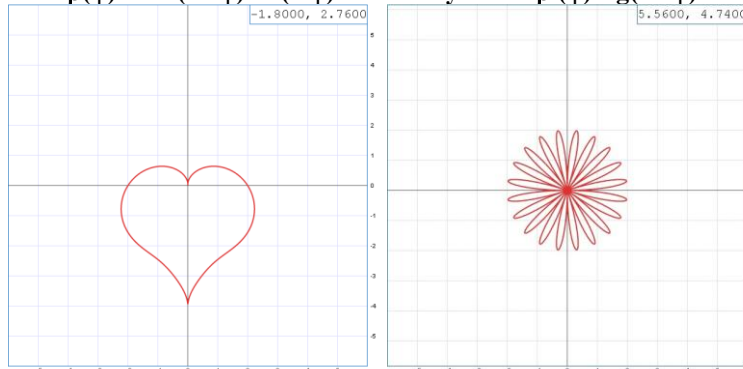


**Рисунок 3** Спираль Архимеда  $\rho(\varphi) = \varphi/10$       **Рисунок 4**  $\rho = 10/\varphi$

Более сложные примеры графиков в полярной системе координат представлены на рисунках 5-8.



**Рисунок 5**  $\rho(\varphi) = 4\sin(13\varphi)\cos(9\varphi)$       **Рисунок 6**  $\rho(\varphi) = \text{tg}(12\varphi)$



**Рисунок 7**  $\rho(\varphi) = 2 - 2\sin(\varphi) + \sin(\varphi)\sqrt{|\cos(\varphi)|}/(\sin(\varphi) + 1.4)$       **Рисунок 8**  $\rho(\varphi) = 2\sin(10\varphi)$

## Некоторые кривые Хабенихта

Б. Хабенихт немецкий математик конца 19 начала 20 века. Его считают не только математиком, но и натуралистом. Наблюдая за красотой природы, он отмечал наличие осевой симметрии во многих растениях. Выбрав эту ось симметрии в качестве полярной оси, он писал уравнения различных листьев и цветков. На рисунках 9-11 приведены некоторые кривые Хабенихта. Конечно, он делал это не вслепую, методом проб и ошибок, а с помощью процесса аппроксимации, восстанавливая уравнение кривой по опорным точкам графика функции.

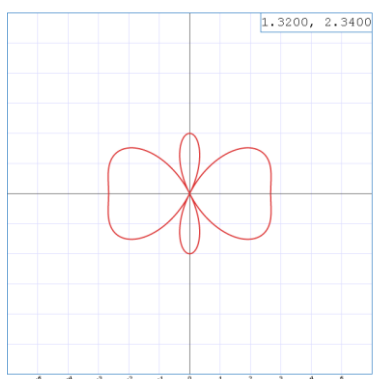


Рисунок 9 Бабочка

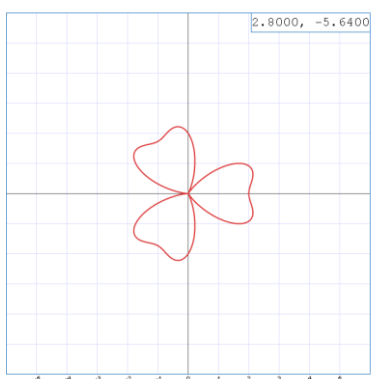


Рисунок 10 Лист Кислицы

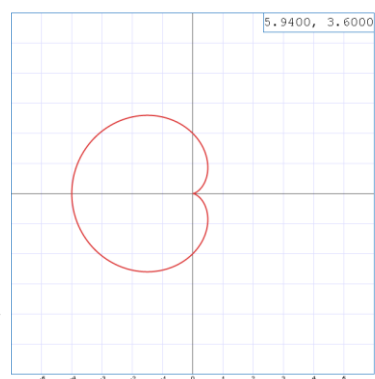


Рисунок 11 Лист кувшинки

- 1)  $\rho(\varphi) = (1 + 7\cos(2\varphi) + 4\sin(2\varphi) \sin(2\varphi) + \sin(2\varphi)\sin(2\varphi))/3$
- 2)  $\rho(\varphi) = 1 + \cos(3\varphi) + \sin(3\varphi)\sin(3\varphi)$
- 3)  $\rho(\varphi) = 2(1 - \cos(\varphi))$

## Розы Гранди

Флорентийский монах Гвидо Гранди, живший в 18 веке, известен своими математическими трудами, посвященными исследованию кривой на плоскости, которая напоминает цветок розы. На рисунках 12 – 15 приведены некоторые из роз, которыми занимался Гранди, впоследствии они были названы его именем.

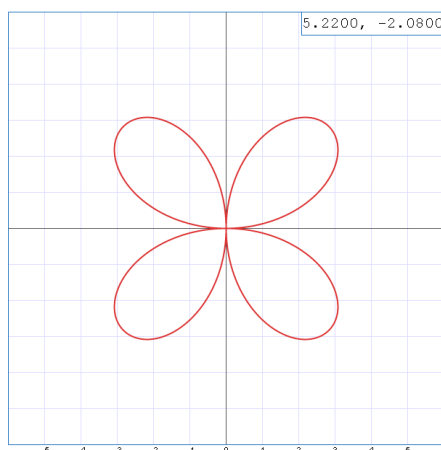


Рисунок 12  $\rho(\varphi) = 4\sin(2\varphi)$

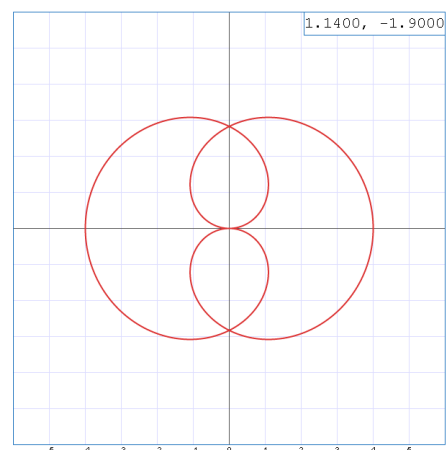


Рисунок 13  $\rho(\varphi) = 4\sin(1/2\varphi)$

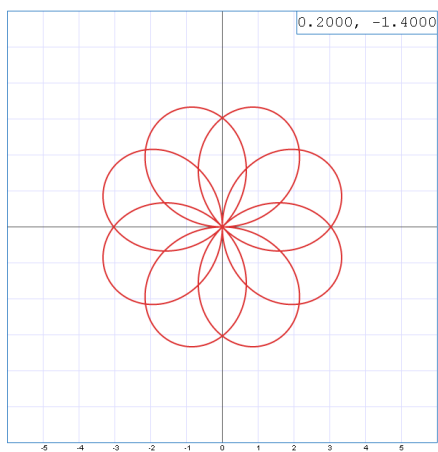


Рисунок 14  $\rho(\varphi)=3.5\sin(4/3\varphi)$

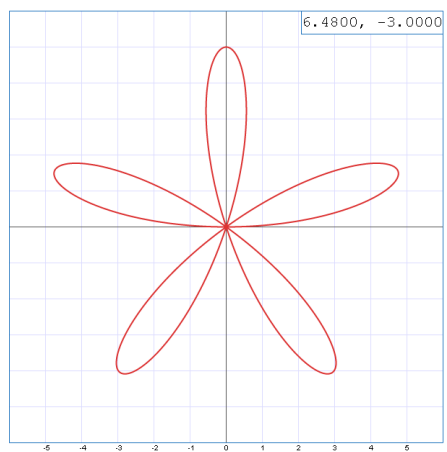


Рисунок 15  $\rho(\varphi)=5\sin(5\varphi)$

Я попробовала самостоятельно на основе кривых Хабенихта получить рисунок, похожий на пчелу, вот что у меня получилось.

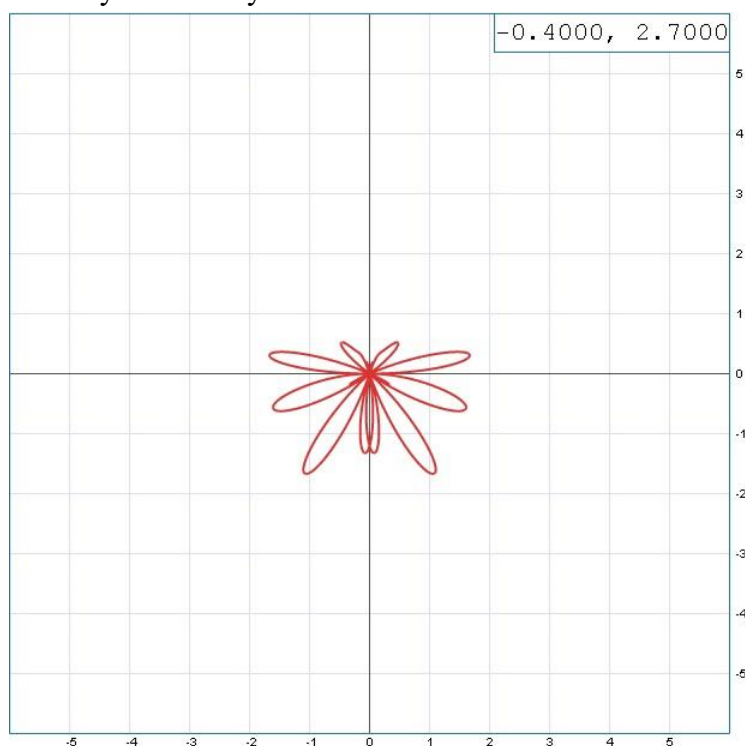


Рисунок 16  $\rho(\varphi)=(3\cdot(1+\cos(3\cdot\varphi))-4(\sin(3\varphi))^2-2\sin(0.5\varphi))/2\sin(5\varphi)$

**Вывод:** Исследования Б. Хабенихта и Г. Гранди смогли в полной мере показать красоту графиков в ПСК.



## «Танец» пчелы в полярной системе координат

Удивительно, что пчелы, не зная математических законов, каким-то образом умудряются использовать полярную систему координат в своих интересах. Многие исследователи описывали пчелиный «танец», сообщающий расположение источника корма.

Австрийский ученый Карл Риттер фон Фриш в середине прошлого века занимался изучением пчел, получил Нобелевскую премию за свои исследования. Фриш исследовал способ передачи пчелами-разведчицами информации о местонахождении источников корма. Он сделал вывод, что пчелы прилетая в улей, сигнализируют о направлении, в котором находится источник корма и о расстоянии до него, ориентируясь на положение солнца.[3]

Движения пчелы, передающие информацию об источнике корма, называют «танцем» пчелы. «Танец» представляет собой круговые и колебательные движения пчелы. Ось этого танца находится под тем же углом по отношению к солнцу, что и ось, на которой расположен корм. По исследованиям Карла Фриша [3] количество колебаний тела пчелы определяет дальность расстояния до корма.

Посмотрим на этот танец с точки зрения полярной системы координат. Если полюсом считать улей, из которого вылетает, и в который возвращается пчела-разведчица, то полярная ось направлена из полюса на солнце. Пчела вылетает под определенным углом к этой оси, находит корм, «запоминает» этот угол и, прилетая в улей, на прилётной доске сообщает своим коллегам направление полета. Пчела пробегает несколько кругов, попеременно меняя, направление движения то по часовой стрелке, то против, при этом она совершает колебательные движения телом.

Пчелы на летке «считывают» полученную информацию и летят к источнику. Таким образом, пчела сообщает полярные координаты источника корма: направление полета к источнику – полярный угол, расстояние – полярный радиус.

Была выдвинута *гипотеза*: «танец» пчелы, соотнесенный с полярной системой координат, указывает место источника корма. Мы решили провести эксперимент, подтверждающий эту гипотезу.

Суть эксперимента в следующем: корм для пчел размещается в определенном месте на пасеке, определяются координаты этого места в полярной системе координат. В качестве полюса выбирается улей, в качестве полярной оси в данный момент времени – направление на солнце, расстояние измеряется в метрах, угол – в градусах. Затем проводится наблюдение за пчелами, ставятся метки на пчел-разведчиц, измеряется угол оси «танца» отмеченной пчелы при ее прилете в улей, подсчитывается количество колебательных движений. Полученные данные сопоставляются с данными Карла Фриша и с полярными координатами корма.

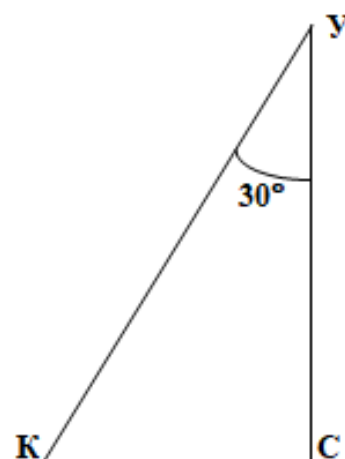


Рисунок 17 Выбор улья



**Рисунок 18** Размещение корма для пчел

Для определения градусной величины угла расположения корма относительно оси, направленной на солнце, на крышке улья была нарисована схема, приведенная ниже. На крышке выбрали точку У. Направление оси на солнце УС определили с помощью деревянного колышка, перемещая его перед ульем так, чтобы тень колышка проходила через точку У. Направление на корм УК определили визуально с помощью этого же колышка. Градусную величину угла определили транспортиром.



**Рисунок 20** Пчела с зеленой меткой

В начале осени – 02.10.2021, когда естественные источники корма пчел уже почти исчезли, мы приехали на экспериментальную пасеку Пензенского государственного аграрного университета, руководит которой Невитов Михаил Николаевич. Под его руководством приготовили корм для пчел в виде сахарного сиропа. Выбрали один из ульев для наблюдения, он был самый активный в этот день: пчелы интенсивно вылетали из улья и возвращались в него.

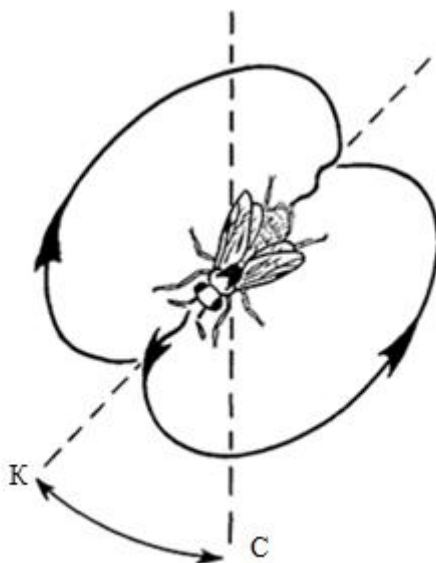
Сироп разместили на расстоянии примерно 50 м от улья, расстояние определили шагами. Получилось 100 моих шагов, длина шага равна примерно 50 см.

**Рисунок 19** Схема расположения корма относительно полярной оси

Через 20 минут от начала эксперимента к кормушке прилетели две пчелы. Михаил Николаевич пометил их специальным маркером зеленого цвета.

Пчелы около 5 минут исследовали источник корма и «лакомились» сиропом. Мы тем временем переместились к летку улья. Пчелы покинули место кормления и одну из них с зеленой меткой мы увидели у нашего

Пчела, расположившись на специально приделанной к летку прилетной доске, начала совершать круговые движения. Схема «танца» приведена на рисунке 21.



**Рисунок 21** Схема танца пчелы

Ось пчелиного танца указывала на источник корма. Пчела совершила 3 колебательных движения телом, что соответствует по данным Карла Фриша, расстоянию от 50 до 100 метров.

Еще через 20 минут у источника корма собралась приличная кучка пчел.



**Рисунок 22** Пчелы прилетели

**Вывод:** направление оси пчелиного танца, соответствует полярному углу, а количество колебательных движений – полярному радиусу точки, в которой расположен источник корма в полярной системе координат, полюсом которой является улей, полярная ось направлена на солнце.

## Заключение

В заключении хочется отметить практическую значимость проведенного исследования.

Проведенный и описанный нами в работе эксперимент подтвердил, что при изучении пчел возможно использование математических методов анализа.

На основе полученных данных и сформулированных выводов можно предположить, что наблюдение за пчелами и расшифровка их танцев позволит составить карту сбора нектара в полярной системе координат. Эту карту можно сопоставить с картой местности и прогнозировать возможные неблагоприятные факторы, такие, как обработка медоносных культур ядохимикатами, сбор нектара в экологически загрязненных районах (вблизи дорог, производственных предприятий, других источников загрязнения окружающей среды).

Владение такой информацией позволит пчеловодам принимать своевременные меры: во время обработки полей ядохимикатами ограничить лет пчел, либо переместить пасеку в безопасное место, в экологически чистые районы. Это в свою очередь поможет сберечь летный состав пасеки от гибели, и здоровье тех людей, которые будут есть мед.

## Список использованной литературы

1. Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А. Метод координат. – М.: МЦНМО, 2009.
2. Рут А.И. Энциклопедия пчеловодства / А.И. Рут, Э.Р. Рут, Х.Х. Рут, М.Дж. Дейелл, Дж.А. Рут; пер. с англ. Е.И. Северцовой, Т.И. Губиной. - М.: Художественная литература, МП Брат, 1993.
3. Фриш Карл. Из жизни пчел Перевод с немецкого Т. И. ГУБИНОЙ Под редакцией канд. биол. наук И.А. Халифмана. – М. : Мир, 1980.
4. <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%8F%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82>
5. [https://function-x.ru/geometry\\_coordinates\\_polar.html](https://function-x.ru/geometry_coordinates_polar.html)