Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа с. Посёлки
имени Героя Советского Союза И.Ф.Кузьмичёва
Кузнецкого района Пензенской области

Тема работы:
«Геометрические дарования пчёл»

Работу выполнил*: Колпаков Сергей*
учащийся 11 класса

Адрес*: с. Посёлки, ул Молодёжная д.20*
Телефон*: 8 84157-59-2-19*
8 960 329 61 98

Научный руководитель*:*
Купыра Наталья Анатольевна,
учитель математики высшей категории

2022-2023 учебный год

Введение

«Странные общественные привычки и геометрические дарования пчёл, - пишет известный математик Герман Вейль, - не могли не привлечь внимания и не вызвать восхищения людей, наблюдавших их жизнь и использовавших плоды их деятельности». «Далее этой ступени совершенства в архитектуре, - отмечает Ч. Дарвин, - естественный отбор не мог вести, потому что соты пчелы, насколько мы в состоянии судить, абсолютно совершенны с точки зрения экономии труда и воска».

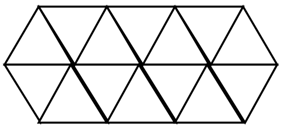
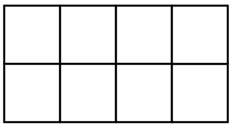
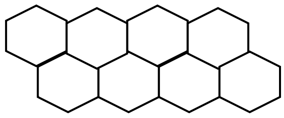
Цель моей работы - применение математических, в частности геометрических знаний пчёлами на практике. Таким образом, попробуем оценить геометрические «дарования» насекомых, исследуя построение сот и количество необходимого для этого воска.

Задачи, которые необходимо выполнить:

1. Определить какими ещё правильными фигурами можно замостить плоскость.
2. Рассчитать наименьший периметр правильных треугольника, четырехугольника и шестиугольника с одинаковой площадью.
3. Построить и математически оценить пчелиную ячейку в целом, которая состоит из двух рядов ячеек, стыкованных донышками.

Основная часть.

Пчелиные соты представляет собой прямоугольник, покрытый правильными шестиугольниками. Какими ещё правильными многоугольниками можно замостить плоскость?

Решение. Предположим, что плоскость замощена правильными n – угольниками, причём каждая вершина является общей для x таких многоугольников. Тогда имеем

$$\frac{180°(n-2)}{n}x = 360°.$$

Находим, что

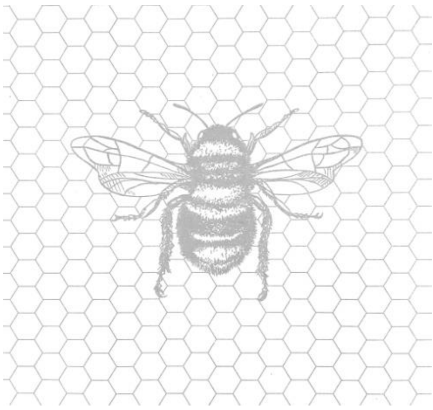
$$x = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}.$$

Учитывая, что x – целое получаемn=3,4,6.

Вывод: ***плоскость можно замостить правильными треугольниками, четырёхугольниками и шестиугольниками.***

Проблема: ***почему же пчёлы выбрали шестиугольник?***

Задача 2. Пусть даны правильные треугольник, четырёхугольник и шестиугольник одинаковой площади. У какого из этих многоугольников меньший периметр?



Решение. Легко показать, что площадь S_n правильного n – угольника через его сторону a_n выражается по формуле

$$S_n = \frac{n}{4}a^2 n \cot\frac{180°}{n}.$$

Отсюда имеем:

$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} a_3^2,$

$S_4 = a_4^2,$

$S_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a_6^2.$

Так как у нас $S_3 = S_4 = S_6 = S$, то из последних равенств получаем:

$a_3^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}},$

$a_4^2 = S,$

$a_6^2 = \frac{2S}{3\sqrt{3}}.$

Поскольку периметр правильного n – угольника

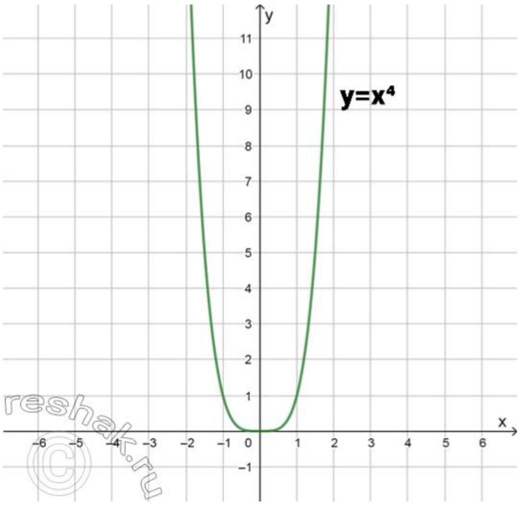
$P_n = na_n,$

то из полученных соотношений находим:

$P_3^4 = 81a_3^4 = 432S^2,$

$P_4^4 = 256S^2,$

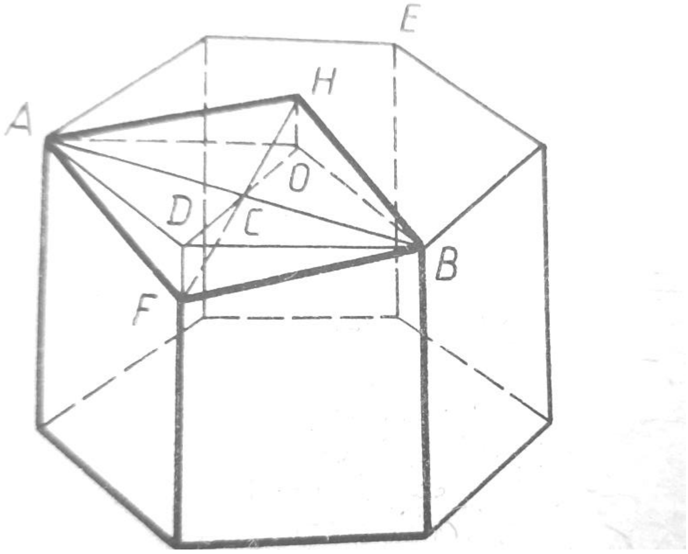
$P_6^4 = 192S^2.$



В силу того, что функция y=x^4 при x>0 возрастающая, заключаем, что наименьший периметр у шестиугольника.

Вывод**:** ***пчелиной ячейки – правильный шестиугольник, а он из всех возможных многоугольников с данной площадью имеет наименьший периметр.***

Задача 3. Посмотрим теперь на ячейку в целом. Она представляет собой открытую сверху шестиугольную призму с хитроумно достроенным дном. Такую конструкцию можно получить с помощью следующего геометрического построения.



Рассмотрим правильную шестиугольную призму. Выберем на её оси симметрии точки H и проведём плоскость через точки A, H и B. Отбросим от призмы отсекаемую этой плоскостью пирамиду FABD и добавим к призме пирамиду HABO. Так как в правильном шестиугольнике ODAB и DC=CO, то рассматриваемые пирамиды симметричны относительно прямой AB, и, значит, они равны.

Если через точку H провести ещё плоскости HBE и HAE и выполнить операции, аналогичные описанным выше, то получится многогранник, весьма похожий на пчелиную ячейку, поставленную дном вверх. Объём полученного многогранника такой же (в силу равенства пристраиваемых и отбрасываемых пирамид), как и у исходной призмы. Но площадь поверхности у него, конечно же, другая. Найдём её.

Пусть a-сторона основания призмы, b-её высота (a<b), OH=x. Площадь трапеции – боковой грани ячейки – равна *0,5a(2b-x)*, а потому площадь всей боковой поверхности ячейки равна *3a (2b-x)*. Фигура ABFH – ромб. Так как

AB=$a\sqrt{3}$,

CF=$\sqrt{x^2 + {a^2}/{4}}$,

то площадь дна ячейки (площадь трёх ромбов) равна:

$3a\sqrt{3x^2 + {}^{3a^2}/_{4}}$.

Площадь поверхности ячейки

S=3a(2b – x + $\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4x^2 + a^2}$) (0≤x≤b)

$s` = 3a(0 - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}(4x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \times 8x = 3a(-1 + \sqrt{3} \times 2x \times \frac{1}{\sqrt{4x^2+a^2}}) = 3a(\frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{4x^2+a^2}} - 1) = 3a(\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{4x^2+a^2}}{\sqrt{x^2}}} - 1) = 3a(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{4x^2+a^2}{x^2}}} - 1) = 3a(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4+\frac{a^2}{x^2}}} - 1)$

Найдём теперь, при каком значении x функция S принимает наименьшее значение. Рассмотрим производную:

$S`(x) = 3a(\frac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{4x^2+a^2}} - 1) = 3a(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4+\frac{a^2}{x^2}}} - 1).$

$3a(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4+\frac{a^2}{x^2}}} - 1) = 0$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4 + \frac{a^2}{x^2}}} = \frac{1}{1}$$

$$(2\sqrt{3})^2 = (\sqrt{4 + \frac{a^2}{x^2}})^2$$

$12 = 4 + \frac{a^2}{x^2}$

$x^2 = \frac{a^2}{8}$

$x = \pm\sqrt{\frac{a^2}{8}}$

$x = \sqrt{\frac{a^2}{8}} = \frac{a}{\sqrt{8}} = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Замечаем, что на отрезке $[0; b]$ имеется единственная критическая точка

$x_0 = a\sqrt{2}/4,$

причём S`(x)<0 при 0<x<$x_0$ и S`(x)>0 при x>x_0. Функция достигает в точке x_0наименьшее значение.

Найдём чему равен при x=x_0тупой угол α ромба AFBH. Имеем

AB=a$\sqrt{3}$,

CH=$\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Поэтому tg$\frac{\alpha}{2}$=$\sqrt{2}$, α≈110°.

Это значение несущественно отличается от данных, полученных при измерении реальных пчелиных сот (чаще всего α≈107°, a=3,5 мм, b=12 мм).

Заключение.

Проделав свою работу, я убедился, что именно благодаря такой «математической» работе расчётливые «геометры» экономят около 2 % воска. Количество воска, сэкономленного при постройке 54 ячеек, может быть использовано для одной такой же ячейки.

В итоге необходимо сказать, что пчелиные соты представляют собой пространственный паркет, поскольку заполняют пространство так, что не остаётся просветов.

Как в заключение не согласиться с мнением Пчелы из сказки «Тысяча и одна ночь»: «Мой дом построен по законам самой строгой архитектуры. Сам Евклид мог бы поучиться, познавая геометрию моих сот».

Так с помощью геометрии и математического анализа мы прикоснулись к тайне математических шедевров из воска, ещё раз убедившись во всесторонней эффективности математики.

Действительно, пчёлы – удивительно грамотные архитекторы!

Литература.

1. А.И.Азевич «Двадцать уроков гармонии» - гуманитарно – математический цикл;
2. Журнал: «Математика в школе» №1 1995 г.
3. Журнал: «Пчеловод», подшивка за 2001 год.
4. Детская энциклопедия: «Что? Где? Почему?»
5. «Геометрия 7-11 класс» Погорелов;
6. «Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс» С.М. Никольский, Просвещение, 2020.-464с.

Рецензия

на исследовательскую работу «Геометрические дарования пчёл»

ученика 11 класса Колпакова Сергея

МБОУ СОШ с.Посёлки Кузнецкого района Пензенской области.

Работа посвящена обобщению знаний и демонстрации ярких применений геометрии в окружающем мире. Актуальность проблемы ученик видит в том, что математика не существует отдельно от жизни, она помогает рационально использовать математические соотношения, которые рассматриваются применительно к конкретным ситуациям, распространённым в практической деятельности.

Исследовательская работа имеет логически правильную структуру. Она состоит из введения, теоретической и практической части, заключения, а так же использованной при написании литературы. Работа грамотно оформлена.

Работа содержит большое количество доказательного материала, которое позволяет сделать правильные выводы и подтвердить основную гипотезу исследования показать на примерах геометрических задач на оптимизацию, как можно добиться наиболее высоких результатов при наименьших потерях.

Проект является исследовательским, поэтому способствует развитию познавательного интереса, аналитических способностей, различных способов восприятия и обработки информации. В работе поставлена цель, определены задачи, решая которые ученик показывает свою заинтересованность в данной проблеме.

Сергеем проделана серьёзная работа по решению геометрических задач, применяемых в практической деятельности, которые позволяют более рационально и экономно подходить к вопросу расходов в сельскохозяйственных предприятиях. Работа выполнена на достаточно высоком уровне, содержит ряд выводов, представляющих практический интерес. Работа полностью соответствует требованию качества, может быть дидактическим материалом для внеклассной работы с учащимися 10-11 классов: факультативы, кружки и внеурочных занятий.

Таким образом, можно заключить, что поставленные цель и задачи успешно раскрыты. Исследовательская работа заслуживает высокой оценки.

9.01.2023 г.

Руководитель исследовательской работы : ________Купыра Н.А.

учитель математики МБОУ СОШ с.Посёлки