

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
Средняя общеобразовательная школа №15 города Кузнецка
Пензенской области

ЕЩЕ РАЗ О ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧКАХ ТРЕУГОЛЬНИКА,
ТОЧКАТОРРИЧЕЛЛИ

Выполнила:

обучающаяся 9 «А» класса

Зеленко Елизавета

Научные руководители:

Прошина Н. В.

Бухонина Е. В.

г. Кузнецк

2023г.

Оглавление

I.	Введение.....	3
II.	Основная часть	
1.	Точка Ферма–Торричелли–Штейнера.....	4
2.	Свойства точки Торричелли в зависимости от вида треугольника...5	
III.	Исследовательская часть.....	6-10
IV.	Заключение.....	11
V.	Список литературы.....	11

I. Введение

Во все времена внимание учёных привлекали экстремальные задачи, так как большинство из них приходило из практики. Задачи на максимум и минимум постоянно возникают в инженерных расчётах, в архитектуре и в повседневной жизни. Не исключение экономическая и социальная сфера.

Например, есть необходимость строительства мебельной фабрики, откуда в дальнейшем будут организованы поставки готовой продукции в города Кузнецк, Тольятти и Саранск. Где можно построить такой завод, чтобы транспортные расходы были минимальными? Договоримся, что для решения этой задачи пока не будем обращать внимание на отдельные компоненты территориального комплекса: рельеф, почву, расположение дорог.

Другая задача. Частный предприниматель арендовал кухню для выпечки пирожных и тортов. В этом помещении уже размещены электрические плиты, мойка и холодильники. Где нужно разместить рабочую поверхность (стол для приготовления сладостей), чтобы повара-кондитеры на свое передвижение между плитой, мойкой и холодильником тратили как можно меньше времени?

Чтобы решить данные задачи необходимо перевести их на математический язык, то есть выделить исходные данные и описать связи между ними.

Задачи можно объединить одной формулировкой: для треугольника построить точку, сумма расстояний от которой до вершин имеет наименьшее значение.

Итак, **цель работы** заключается в том, чтобы создать методику определения местоположения объекта, находящегося на наименьшем суммарном расстоянии от трёх заданных объектов.

Для достижения цели нужно решить следующие **задачи**:

- 1) Познакомиться с решением подобных задач в литературных источниках.
- 2) Получить представление о точке Торричелли и её свойствах.
- 3) Разработать алгоритм решения задач на оптимизацию для трёх объектов с помощью теории Торричелли.

Объект исследования - треугольник.

Предмет исследования - точка Торричелли в плоскости треугольника и её свойства.

Гипотеза: у треугольника есть еще одна "замечательная точка", сумма расстояний от которой до вершин треугольника является минимальной.

Актуальность: Знания замечательных точек и линий треугольника способствуют более эффективному и рациональному решению задач; развивают мышление и творческую активность.

Методы исследования:

- поисковый метод с использованием научной и учебной литературы;
- практический метод решения задач;
- исследовательский метод решения задач;
- анализ полученных результатов.

II. Основная часть

§1. Точка Ферма–Торричелли–Штейнера

Геометрия начинается с треугольника. Вот уже два с половиной тысячелетия треугольник является символом геометрии.

Треугольник неисчерпаем – постоянно открываются его новые свойства. Чтобы рассказать о всех известных его свойствах, необходим том, сравнимый по объёму с томом Большой энциклопедии.

Внутри любого треугольника лежит много точек, однако каждую из них нельзя назвать замечательной. Среди этих точек есть еще одна "замечательная точка", сумма расстояний от которой до вершин треугольника является минимальной. Этой точкой интересовались учёные ещё в 18 веке. Она связана с именами сразу трёх выдающихся учёных прошлого.

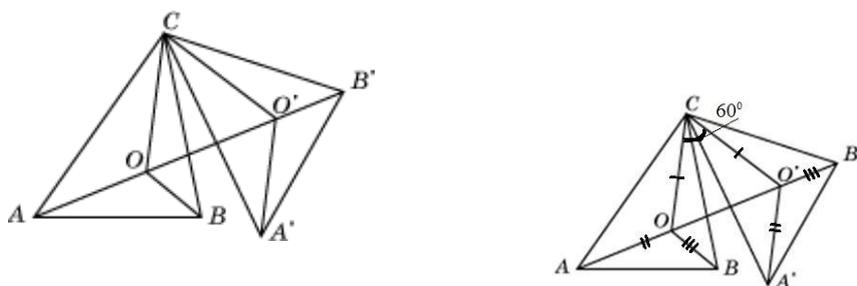
Точку треугольника, положение которой удовлетворяет этим условиям, построил итальянский учёный Эванджелиста Торричелли.

Точка Торричелли – это точка в плоскости треугольника, сумма расстояний от которой до вершин треугольника имеет наименьшее значение. Другое определение – это точка, из которой стороны треугольника видны под углом 120° .

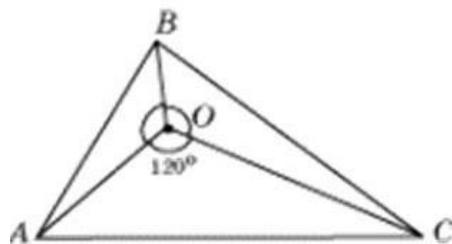
Разберём задачу нахождения точки Торричелли внутри остроугольного треугольника.

Пусть O – некоторая точка внутри остроугольного треугольника ABC .

Повернём треугольник ABC вместе с точкой O на 60° вокруг точки C (точнее говоря, пусть A' , B' и O' – образы точек A , B и O при повороте треугольника на 60° вокруг точки C). Тогда $AO + BO + CO = OO' + AO + B'O'$, $CO = CO'$, так как $\triangle COO'$ – равнобедренный ($CO = CO'$ и $\angle COO' = 60^\circ$). Правая часть равенства – это длина ломаной $AOO'B'$; она будет иметь наименьшую длину, когда совпадает с отрезком AB' . В этом случае $\angle COA = 180^\circ - \angle COO' = 120^\circ$ и $\angle COB = \angle CO'B' = 180^\circ - \angle CO'O = 120^\circ$, то есть стороны $\triangle ABC$ AC , CB и AB видны из точки O под углом 120° . Такая точка O будет точкой Торричелли для $\triangle ABC$.



Из решения задачи следует, что внутри остроугольного треугольника всегда существует точка O , из которой каждая сторона видна под углом 120° .



§2. Свойства точки Торричелли в зависимости от вида треугольника

Свойства	Виды треугольника				
	Остроугольный	С углом больше 120°	С углом в 120°	Прямоугольный	Равносторонний
1). Отрезки, соединяющие вершины равносторонних треугольников с противолежащими вершинами исходного треугольника равны. Пересечение этих отрезков и есть точка Торричелли.	+	+	+	+	+
2). Точка Торричелли принадлежит трем описанным около равносторонних треугольников, построенных внешним образом на сторонах исходного, окружностям.	+	+	+	+	+
3). Все стороны исходного треугольника видны из точки Торричелли под углом в 120 градусов.	+	-	-	+	+
4). Точка Торричелли минимизирует сумму расстояний до вершин исходного треугольника	+	-	+	+	+
5). Центры равносторонних треугольников, построенных внешним образом на сторонах исходного треугольника, являются вершинами равностороннего треугольника, центр которого совпадает с центром тяжести исходного треугольника (точкой пересечения медиан).	+	-	-	+	+

III. Исследовательская часть

Решим задачу: "Есть необходимость строительства мебельной фабрики, откуда в дальнейшем будут организованы поставки готовой продукции в города Кузнецк, Саранск, Тольятти. Где можно построить такой завод, чтобы транспортные расходы были минимальными?"

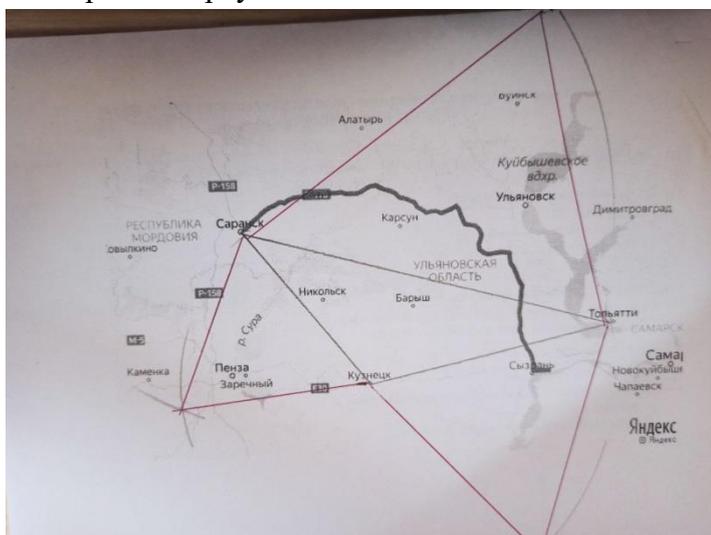
Транспортные расходы будут минимальными, если суммарная длина маршрута от завода до трёх городов будет наименьшей.

Создадим математическую модель задачи, то есть выделим исходные данные и опишем связи между ними.

В заданном треугольнике нужно построить точку Торричелли (точку в плоскости треугольника, сумма расстояний от которой до вершин треугольника имеет наименьшее значение). Для этого выполним алгоритм построения точки Торричелли:



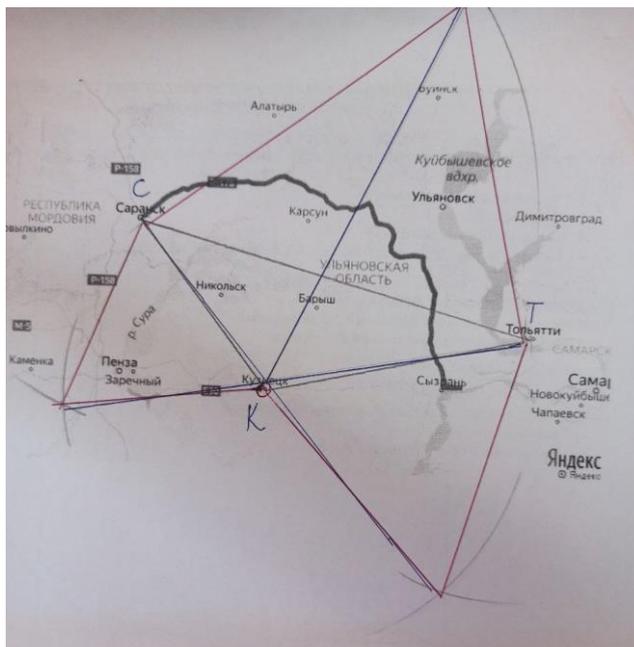
1. Обозначим буквой K город Кузнецк, буквой C – город Саранск, буквой T – город Тольятти.
2. Соединим попарно точки K, C, T отрезками KC, CT, TM .
3. Найдем градусную меру углов полученного ΔKCT :
 $\angle KCT=25^\circ, \angle CKT=120^\circ, \angle CTK=35^\circ$.
4. Построим на сторонах ΔKCT вне него равносторонние треугольники.



5. Соединим отрезком каждую вершину ΔKCT с

вершиной равностороннего Δ , построенного на противоположной стороне.

- б. Построим точку пересечения этих отрезков. Точка Торричелли совпала с точкой K .

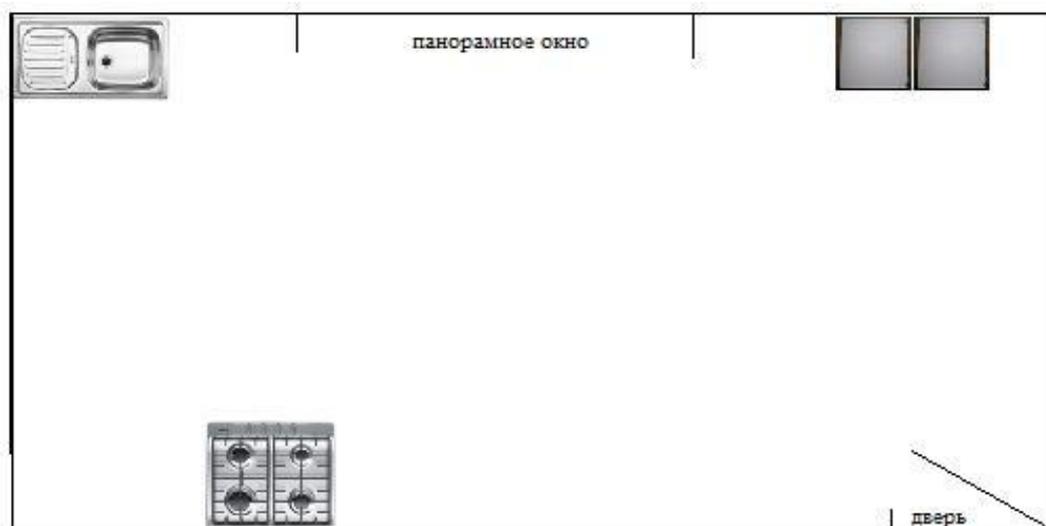


Значит, мебельную фабрику следует построить в городе Кузнецк, откуда в дальнейшем будут организованы поставки готовой продукции в города Саранск и Тольятти. В этом случае сумма расстояний от города Кузнецк до городов Кузнецк, Саранск и Тольятти будет наименьшей, т.е. транспортные расходы будут минимальными.

Решение этой задачи носит рекомендательный характер, так как при её решении не были учтены точные схемы проложенных автомобильных и железнодорожных дорог.

Переведя на математический язык эту задачу, был рассмотрен треугольник, в котором один из углов был равен 120° . И в этом случае точка Торричелли совпала с вершиной этого угла.

Решим другую задачу: "Частный предприниматель арендовал кухню для выпечки пирожных и тортов. В этом помещении уже размещены электрические плиты, мойка и холодильники. Где нужно разместить рабочую поверхность (стол для приготовления сладостей), чтобы повара-кондитеры на свое передвижение между плитой, мойкой и холодильником тратили как можно меньше времени?"



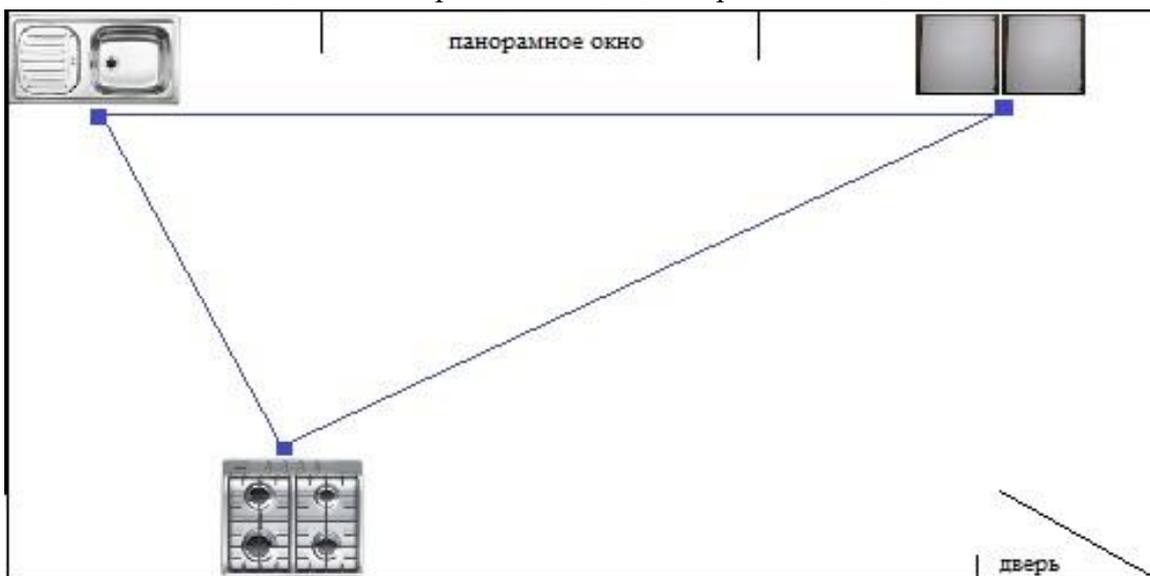
Повара-кондитеры на свое передвижение между плитой, мойкой и холодильником будут

тратить меньше времени, если сумма расстояний от трёх бытовых приборов до рабочего стола будет наименьшим.

Выделим исходные данные и опишем связи между ними, создав математическую модель задач.

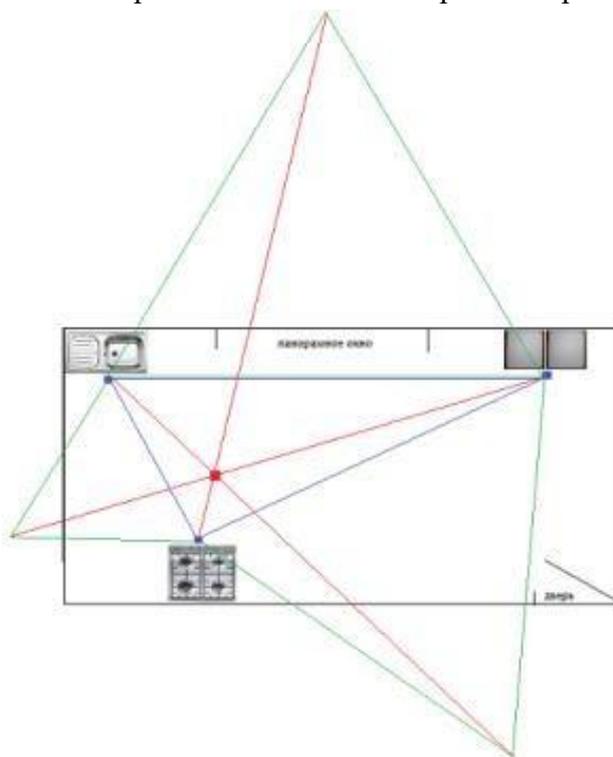
В заданном треугольнике необходимо построить точку Торричелли (точку в плоскости треугольника, сумма расстояний от которой до вершин треугольника имеет наименьшее значение). Для этого выполним алгоритм построения точки Торричелли:

1. Обозначим буквой M мойку, буквой X – холодильник, буквой P – электрическую плиту.
2. Соединим попарно точки M, X, P отрезками MX, XP, MP .



3. Найдем градусные меры углов полученного $\triangle MXP$: $\angle PMX=65^\circ$, $\angle MXP=25^\circ$, $\angle XPM=90^\circ$.

4. Построим на сторонах $\triangle MXP$ вне него равносторонние \triangle .



5. Соединим отрезком каждую вершину ΔMXP с вершиной равностороннего Δ , построенного на противоположной стороне.

6. Построим точку пересечения этих отрезков. Точка Торричелли лежит внутри ΔMXP .

Итак, чтобы повара-кондитеры на свое передвижение между плитой, мойкой и холодильником тратили как можно меньше времени, нужно разместить стол для приготовления сладостей так:



В этой задаче, был рассмотрен треугольник, в котором все углы были меньше 120° . Точка Торричелли расположена внутри треугольника. Каждая сторона треугольника из точки Торричелли видна под углом 120° .

Итак, **алгоритм решения задач** на нахождение местоположения точки Торричелли (точки, суммарное расстояние от которой до трех вершин треугольника (трех заданных объектов) минимальное) можно представить следующим образом:

1. Три заданных объекта обозначить точками.		
2. Соединить попарно точки отрезками.		
3. Измерить углы получившегося треугольника.		
4. Действовать в зависимости от полученных измерений.		
Все углы в треугольнике меньше 120°	Один из углов в треугольнике равен 120°	Один из углов в треугольнике больше 120°
5. Построить на сторонах треугольника вне него равносторонние треугольники.	5. Точка Торричелли совпадает с вершиной угла, градусная мера которого 120° .	Точка Торричелли находится вне треугольника и она не минимизирует сумму расстояний до вершин исходного треугольника.
6. Соединить отрезком каждую вершину треугольника с вершиной равностороннего треугольника, построенного на противоположной стороне.		

7. Построить точку Торричелли, как точку пересечения этих отрезков.		
---	--	--

Рассмотрев задачи на оптимизацию для трёх объектов с помощью теории Торричелли, несложно сделать вывод: существует огромное количество задач в экономической и социальной сферах, которые актуальны в наше время.

Например,

- Жильцы трёх домов, не стоящих на одной прямой, решили поставить столб для освещения прямых тропинок между домами. Где его следует поставить, чтобы сумма расстояний от столба до трёх домиков была наименьшей?
- Собственники нескольких коттеджей, стоящих на разных улицах, решили вырыть общий колодец. Как выбрать место, чтобы сумма расстояний от домов до колодца имела наименьшее значение?
- Администрация города решила начать строительство детского спортивного комплекса, чтобы дети из ближайших трёх микрорайонов города могли посещать его. Где это можно сделать, чтобы сумма расстояний от спортивного комплекса до трёх городских микрорайонов была наименьшей?

Для решения подобных задач поможет алгоритм нахождения точки Торричелли (точки, суммарное расстояние от которой до трех заданных объектов минимальное).

IV. Заключение

В ходе исследовательской работы были решены следующие задачи.

Получено представление еще об одной замечательной точке треугольника, точке Торричелли. Изучены её свойства и история возникновения.

В исследовательской части работы были рассмотрены две задачи на оптимизацию для трёх объектов и разработан алгоритм их решения с помощью теории Торричелли. Кроме того, создана методика определения местоположения объекта, находящегося на наименьшем суммарном расстоянии от трёх заданных объектов в плоскости треугольника, в котором все углы меньше 120° или один из углов равен 120° .

Остаётся не решённым вопрос о нахождении точки, сумма расстояний от которой до вершин треугольника имеет наименьшее значение, в плоскости треугольника, в котором есть угол больше 120° . Решение такой задачи будет иным, так как, в этом случае, точка Торричелли будет находиться вне треугольника, и она не будет минимизировать сумму расстояний до вершин исходного треугольника.

V. Список литературы

1. Глейзер Г.И. История математики в школе. 7 - 8 классы. Пособие для учителей, М., «Просвещение», 1982.
2. Коксетер С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией, М., «Наука», 1966.
3. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: учебное пособие, М., «Наука. Физматлит», 2006.
4. Факультативный курс по математике: учебное пособие для 7–9 классов средних школ, составитель И. Л. Никольская, М., «Просвещение», 1991.
5. Энциклопедия для детей. Том 11. Математика. Главный редактор Мария Аксёнова, М., издательский центр «Аванта +», 2002.
6. Радзивилловский Л. О точке Торричелли // Научно-популярный физико-математический журнал «Квант» №3, 2014.
7. <http://geometry2006.narod.ru/Art/Lecture1.htm>
8. http://math4school.ru/torricelli_.html
9. https://ru.wikipedia.org/wiki/Ферма,_Пьер
10. https://ru.wikipedia.org/wiki/Штейнер,_Якоб
http://stories-ofsuccess.ru/biografiya_evandzhelista_torrichelli_uchenik_galileya

Рецензия на научно-исследовательскую работу по математике

Тема: «ЕЩЕ РАЗ О ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧКАХ ТРЕУГОЛЬНИКА, ТОЧКА
ТОРРИЧЕЛЛИ», которую

выполнила обучающаяся 10 А класса Зеленко Елизавета Евгеньевна.

Данная работа направлена на создание методики определения местоположения объекта, находящегося на наименьшем суммарном расстоянии от трёх заданных объектов.

Научно-исследовательская работа имеет четкую структуру и состоит из введения, основной части, заключения, списка литературы .

Работа написана грамотным научным языком. Оформление работы в целом соответствует предъявленным требованиям.

Во введении Зеленко Елизавета Евгеньевна объяснила актуальность работы и выдвинула гипотезу о том, что у треугольника есть еще одна "замечательная точка", сумма расстояний от которой до вершин треугольника является минимальной. Четко сформулировала цель, заострила внимание на постановке конкретных задач. Введение выглядит достаточно содержательным и емким. В результате четкого изложения цели работы в изложении основной части научно-исследовательской работы присутствует логичность, четкость, последовательность. Наличие ссылок показывает детальную работу с научной литературой. В своей теоретической части работы Зеленко Елизавета Евгеньевна рассматривает расположение точки Торричелли в зависимости от вида треугольника. Зеленко Елизавета Евгеньевна провела объемную исследовательскую работу по нахождению точки Торричелли при решении актуальных практических задач. В частности, рассмотрела решение задачи на нахождение места строительства мебельной фабрики, чтобы транспортные расходы при транспортировке продукции были минимальными. Проанализировала результаты исследований, составила чертежи и кратко сформулировала основные выводы.

Список литературы включает разнообразные источники, оформленные в соответствии с требованиями.

Рекомендации: продолжить работу над исследованием с целью расширения доказательной базы для своих выводов.

Дата 07.11.2023

Рецензент: Бухонина Е.В.
Прошина Н.В.