

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа с. Посёлки
имени Героя Советского Союза И.Ф.Кузьмичёва Кузнецкого района

**«И даже там, где склон горист,
всё пашет землю тракторист»**

Номинация «Математика»

Выполнила:

Суркова Анна

учащаяся 10 класса

Руководитель: Купыра Наталья

Анатольевна учитель математики

высшей категории

Пенза ,2023-2024 учебный год

Содержание.

1. Введение.

2. Основная часть.

- Исследование допустимого угла наклона между плоскостью склона и горизонтальной плоскостью.
- Определение наибольшего допустимого угла наклона склона для различной сельскохозяйственной техники.
- Исследование угла поперечного крена различных тракторов, которые существенно влияют на устойчивость техники и его эксплуатационные параметры.
- Определение величины угла наклона рабочей поверхности плуга, и угла оборачивания трёхгранного клина.

3. Вывод.

4. Литература.

1. Введение.

Важнейшая задача - повысить производительность труда в сельском хозяйстве. Свой вклад в решение этой задачи должны внести труженики сельского хозяйства. И помочь им может математика.

«В 20-х годах прошлого столетия на тракторном заводе г. Челябинска проходил практику студент Московской области сельскохозяйственной академии. Ему поручили исправить рабочую поверхность корпуса трактора, которая из-за износа получилась при штамповке искажённой.

Для исправления ему предложили покрыть ее слоем гипса, а затем по слепку придать нужную форму, выровняв его на глаз линейкой...Изумленный студент сообщил, что ему нужны не гипс и линейка, а чертёжные принадлежности и бумага, потому он владеет точным графическим методом проектирования, как любых рабочих поверхностей, так и штампов для их штамповки.»

Поэтому работая над своей темой, хотела доказать, что математика не существует отдельно от жизни: математические соотношения рассматриваются применительно к конкретным ситуациям, теоретические результаты сравниваются с приемами, распространенными в практической деятельности.

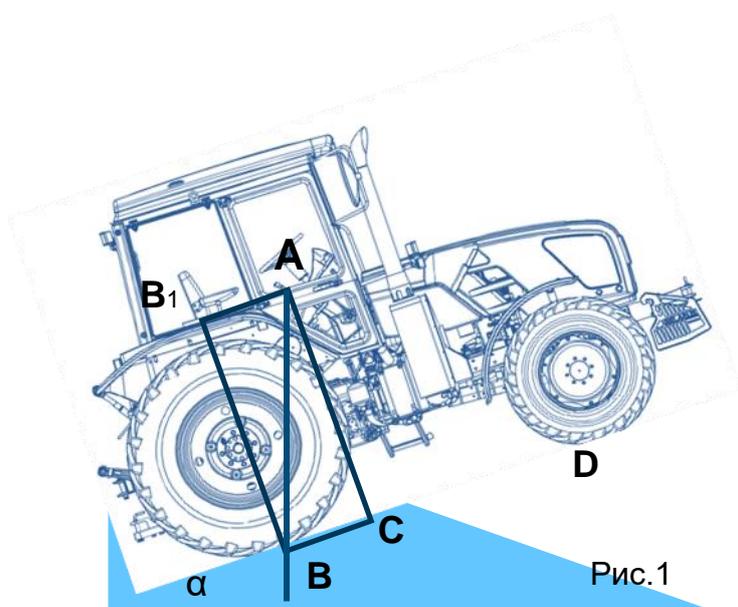
Целью моей работы: *практическое применение математики в сельском хозяйстве, в частности углы между прямыми и плоскостями.* Для выполнения поставленной цели следует решить ряд задач:

- Исследовать допустимый угол наклона между плоскостью склона и горизонтальной поверхностью.
- Определить наибольший допустимый угол наклона склона для различной сельскохозяйственной техники.
- Исследовать угол поперечного крена различных тракторов, которые существенно влияют на устойчивость техники и его эксплуатационные параметры.
- Определить величину угла наклона рабочей поверхности плуга и угла оборачивания трёхгранного клина.

2. Основная часть.

2.1. Исследовать допустимый угол наклона между плоскостью склона и горизонтальной плоскостью.

1. Найдите наибольший допустимый угол наклона склона, вдоль которого может стоять, не опрокидываясь трактор (этот угол называется продольным углом подъема трактора).



Решение. Требуется найти угол между плоскостью склона и горизонтальной плоскостью. Он равен углу между прямыми (рис.1) в продольном сечении склона. Из курса физики известно, что для устойчивости тела на наклонной плоскости необходимо, чтобы вертикаль, проведенная через центр масс A , не выходила за пределы опоры BD . Рассмотрим предельный случай, когда эта вертикаль AV проходит через границу опоры. Проведем $AC \perp BD$ и рассмотрим прямоугольный треугольник ACB . Так как

$$\angle BAC = \alpha, \text{ то } \operatorname{tg} \alpha \propto \frac{BC}{AC}$$

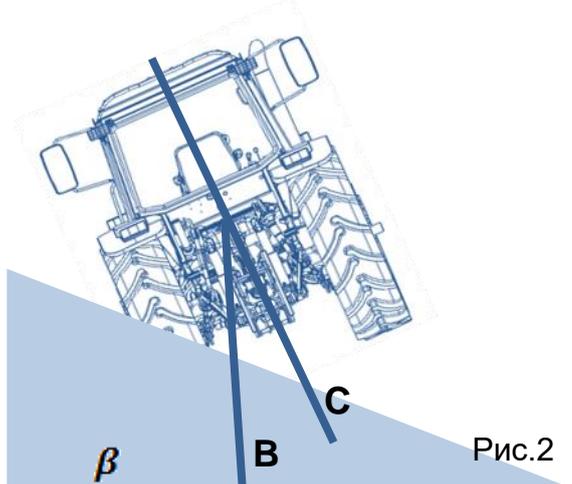
Я рассмотрела интересные для нас параметры различных тракторов, результаты представила в таблице:

	Вид трактора	АС-диаметр заднего колеса, см	ВС- расстояние от центра трактора, до оси колес, см	α -предельный угол подъема, °
1	Беларус-1221.3	89	85	43
2	AGRALE 7215	190	96,5	27
3	MASSEY FERGUSON	196,5	106,7	29
4	FLAT 44-28	1320	1265	44

Вывод: более современные трактора не позволяют безопасно работать на склонах, которые ранее прекрасно обрабатывались старыми тракторами без проблем (у нас в хозяйстве в течении двух лет перевернулись три трактора).Следовательно, для нашей местности необходимо хозяйству иметь трактора, которые обрабатывали почву без проблем и имеют предельный угол $\approx 43^\circ$ - 44° .

2.2.Определение наибольшего допустимого угла наклона склона для различной сельскохозяйственной техники.

2. Найду наибольший допустимый угол наклона склона β , поперёк которого может стоять, не опрокидываясь набок различные трактора (этот угол называется углом поперечной статической устойчивости трактора).



Решение: Рассуждая так же, как при решении предыдущей задачи, рассмотрим случай неустойчивого равновесия (рис.2), когда вертикаль, проведённая через центр A , проходит через точку B - границу опоры.

Предполагая, что центр масс находится на продольной плоскости трактора (плоскость, перпендикулярная задней оси и проходящая через её середину), получила:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BC}{AC} = \frac{b}{2h}$$

где h - высота центра масс, $b=2BC$ – ширина колеи.

	Вид трактора	$h, \text{м}$	$b, \text{м}$	$\operatorname{tg} \beta$	β
1	Беларус-1221.3	89	120	0,67	34°
2	AGRALE 7215	190	135	0,67	34°
3	MASSEY FERGUSON	196,5	180	0,46	25°
4	FLAT 44-28	132	191	0,72	36°

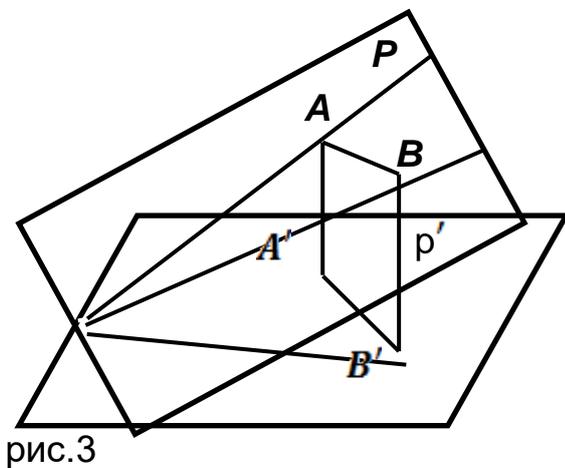
Вывод: угол поперечной статической устойчивости тракторов так же различен. Более устойчивым является FLAT 44-28, что и подтверждает на практике.

2.3. Исследование угла поперечного крена различных тракторов, которые существенно влияют на устойчивость техники и его эксплуатационные параметры.

Углом продольного наклона трактора называется угол между прямой - траекторией движения и горизонтальной плоскостью. Угол между горизонтальной плоскостью и прямой, перпендикулярной траектории движения, принадлежащей плоскости движения, называется *углом поперечного крена* трактора. Если трактор работает на горизонтальной плоскости, то оба эти угла равны нулю. Иначе дело обстоит в случае работы на склоне. Величины этих углов существенно влияют на устойчивость трактора и его эксплуатационные параметры.

3. Найдем угол продольного наклона трактора, движущегося по склону P вдоль прямой OL (рис.3), если известен угол подъема склона и угол отклонения траектории OL от продольного направления OM , где $OM \perp p$.

Решение. Возьму на прямой OM произвольную точку B и проведу через нее прямую, параллельную p . Обозначим через A точку пересечения этой прямой с прямой OL . Построим проекции OA' и OB' отрезков OA и OB на горизонтальную плоскость P' . Тогда по условию $\angle AOB = \beta$, $\angle BOB' = \alpha$, а требуется найти $\gamma = \angle AOA'$.



Из прямоугольного треугольника $AA'O$ имеем:

$$\sin \gamma = \frac{AA'}{OA}$$

Так как $BB' = AA'$, то из $\Delta BB'O$ видно, что

$$AA' = OB \cdot \sin \alpha.$$

Из того же, что $AB \perp OB$, вытекает что

$$AO = \frac{OB}{\cos \beta}$$

Представив, получаем, что

$$\sin \gamma = \alpha \cdot \cos \beta.$$

Из этого отношения может быть найден угол γ .

4. Найдите угол поперечного крена трактора, движущегося по склону P вдоль прямой OL (рис.4), если известны те же углы α и β , что и в предыдущем случае.

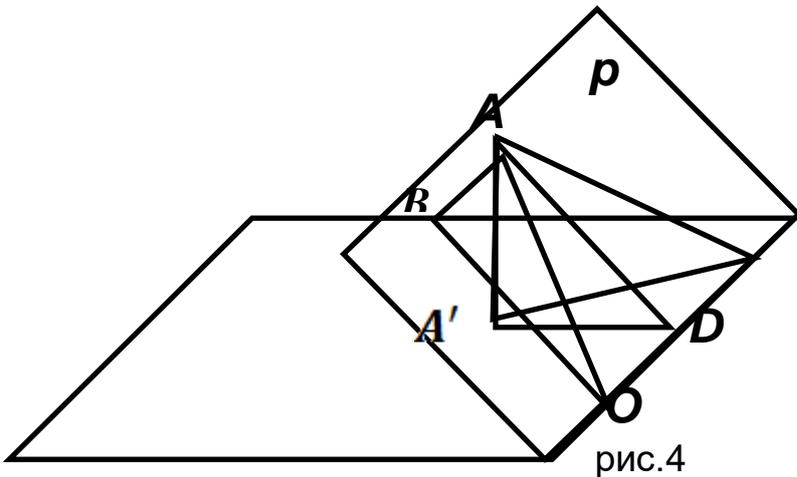


рис.4

Решение. Пусть $AB \perp OA$, $AD \perp OC$. Тогда требуется найти угол $\delta = \angle ACA'$, а известно, что $\angle ADA' = \alpha$ и $\angle BOA = \beta$. Из треугольника $AA'C$ находим :

$$\sin \delta = AA' : AC.$$

Рассматривая треугольники $AA'D$ и ADC , замечаем, что

$$AA' = AD \cdot \sin \alpha, AC = AD : \sin C.$$

Но углы ACD и AOD равны (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами).

Значит,

$$AC = AD : \sin \beta.$$

Подставляя найденные значения AA и AC , получаем

$$\sin \delta = \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

2.4. Определите величину угла наклона рабочей поверхности плуга и угла оборачивания трёхгранного клина.

В основу конструкции плуга положен так называемый трёхгранный клин, представляющий собой пирамиду, у которой все плоские углы трёхгранного угла $BACD$ прямые. Такой клин, перемещаясь в направлении BA , ребрами AC и AD вырезает пласт, а гранью ADC поднимает его, отодвигает и наклоняет.

У плуга в отличие от рассмотренного клина рабочая поверхность ADC должна быть криволинейной, чтобы подрезанный пласт не только наклонялся, но и оборачивался. При проектировании рабочей поверхности плуга важную роль играют зависимости, существующие между различными углами клина.

5. Найдите величину угла γ наклона рабочей поверхности (двугранный угол AD) и угла оборачивания δ (угол BDC) трёхгранного клина, у которого $BCA = \alpha$ и $BAD = \beta$.

Решение. Рассматривая последовательно прямоугольные треугольники ABC, ABD, CBD , найду:

$$BC = AB \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$BD = AB \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

$$\operatorname{tg} \delta = BC : BD = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta.$$

Для определения величины двугранного угла AD построим его линейный угол. Проведем в плоскости основания пирамиды прямую BE , перпендикулярную AD . Так как BC перпендикулярна AB и BD по условию, то BC перпендикулярна основанию. Поэтому BE – проекция прямой CE на основание, а значит, по теореме о трёх перпендикулярах $CE \perp AD$.

Из перпендикулярности прямой AD к прямым CE и BE вытекает перпендикулярность этой прямой плоскости BEC , а это означает, что угол

BEC – линейный для двугранного угла AD .

Рассматривая теперь прямоугольные треугольники ABC, BEA, CBE (необходимо выяснить, почему угол CBE прямой), находим:

$$BC = AB \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$BE = AB \cdot \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg} E = BC : BE = \operatorname{tg} \alpha : \sin \beta.$$

Найденные значения тангенсов и определяют величины искомых углов.

При рассмотрении различных плугов, получились следующие результаты:

	α	$\operatorname{tg} \alpha$	β	$\sin \beta$	$\operatorname{tg} \alpha / \sin \beta$	E	$\operatorname{tg} E$
1	60°	1,73	30°	0,5	3,46	74°	3,48
2	55°	2,42	45°	0,71	3,41	74°	3,48
3	55°	2,42	40°	0,64	3,78	75°	3,73
4	65°	2,15	40°	0,64	3,36	74°	3,48
5	70°	2,75	60°	0,87	3,16	73°	3,27

Вывод. Зависимость между углами трёхгранного клина выполняется почти во всех рассматриваемых плугах, но в двух случаях они более точные. Это говорит о том, что обработка почвы будет лучшей (плуг будет вырезать, поднимать, отодвигать и наклонять пласт земли, что скажется на улучшении урожайности).

2.5. Движение по окружности на горизонтальной поверхности.

Для определения боковой силы, вызывающей занос трактора, рассмотрим рис. 1. Принято допущение: шины трактора в поперечном направлении не деформируются.

Точка C – центр тяжести трактора;

точка O – центр поворота;

$OC = \rho$ – радиус движения центра тяжести;

$OB = R$ – радиус движения центра задней оси;

θ – угол между продольной осью трактора и направлением движения середины переднего моста (этот угол приблизительно равен полусумме поворота управляемых колес);

L – база трактора;

γ – угол между ρ и R .

При равномерном движении трактора по кругу с постоянным радиусом центробежная сила равна

$$P_u = M_a \cdot \omega^2 \cdot \rho, \quad (1)$$

где M_a – масса трактора, кг;

ω – угловая скорость трактора, рад/с.

Вместе с тем

$$\omega = V / R \quad ; \quad \rho = R / \cos \gamma, \quad (2)$$

где V – мгновенная линейная скорость трактора, м/с².

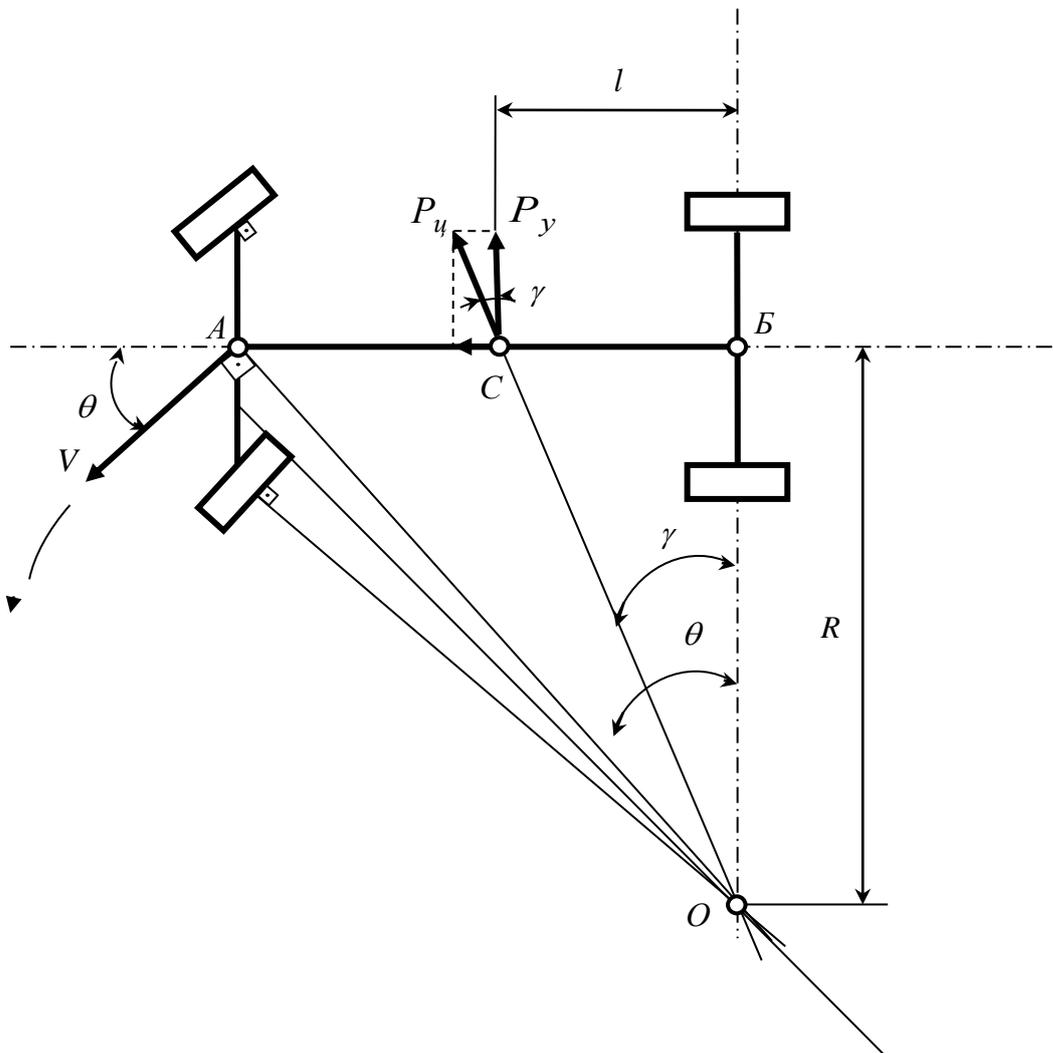


Рис. 1. Движение на повороте

После преобразования уравнения (1) с учетом выражений (2) получим

$$P_u = \frac{M_a \cdot V^2}{R \cdot \cos\gamma}. \quad (3)$$

Отсюда можно определить поперечную составляющую центробежной силы:

$$P_y = P_u \cdot \cos\gamma = M_a \cdot V^2 / R. \quad (4)$$

Показателями поперечной устойчивости трактора являются максимально возможные скорости движения (критические скорости, рис. 2, а).

При движении по горизонтальному участку дороги с поворотом (см. рис. 2, а) под действием боковой силы трактор может либо опрокинуться относительно оси, проходящей через центры контактов шин наружных колес с дорогой, либо начать скользить (занос).

При опрокидывании уравнение моментов выглядит следующим образом:

$$R_{zb} \cdot B - G_a \cdot B / 2 + P_y \cdot h_{\text{цт}} = 0, \quad (5)$$

где B – колея трактора, м;

R_{zb} – сумма нормальных реакций внутренних (по отношению к центру поворота) колес, Н;

G_a – вес трактора, Н;

$h_{\text{цт}}$ – высота центра тяжести трактора, м.

В момент начала опрокидывания внутренние (по отношению к центру поворота) колеса трактора отрываются от дороги. В этом случае $R_{zb} = 0$, тогда

$$P_y \cdot h_{\text{цт}} = G_a \cdot B / 2. \quad (6)$$

Подставив вместо силы P_y ее значение из формулы (4), получим выражение для критической скорости по условиям опрокидывания:

$$V_o^{\text{кр}} = \sqrt{\frac{B \cdot R \cdot g}{2 \cdot h_{\text{цт}}}}, \quad (7)$$

где g – ускорение свободного падения, $g=9,81 \text{ м/с}^2$.

Однако трактор проектируется таким образом, чтобы сила, его опрокидывающая, была больше силы, вызывающей занос. В таком случае боковая сила растет до тех пор, пока имеется возможность роста боковой реакции дороги из условий сцепления. При достижении боковой силой значения, равного максимальному из условий сцепления, начинается занос трактора, что обычно предотвращает его опрокидывание, т.е. критическая скорость начала заноса должна быть меньше скорости начала опрокидывания.

При заносе баланс сил

$$P_y = R_{yH} + R_{yB}, \quad (8)$$

где $R_{yH} + R_{yB} = G_a \cdot \varphi_y$.

Известно, что коэффициент сцепления φ_y определяется как отношение максимально возможной касательной силы (в нашем случае боковой) к нормальной силе (на ровной дороге нормальная сила равна весу трактора, на косогоре – лишь нормальной составляющей веса).

$$\varphi_{x(y)} = R_{x(y)} / (G_a \cdot \cos \beta).$$

Отсюда, учитывая выражение (4), получим критическую скорость при заносе трактора $V_3^{kp} = \sqrt{R \cdot g \cdot \varphi_y}$ (9)

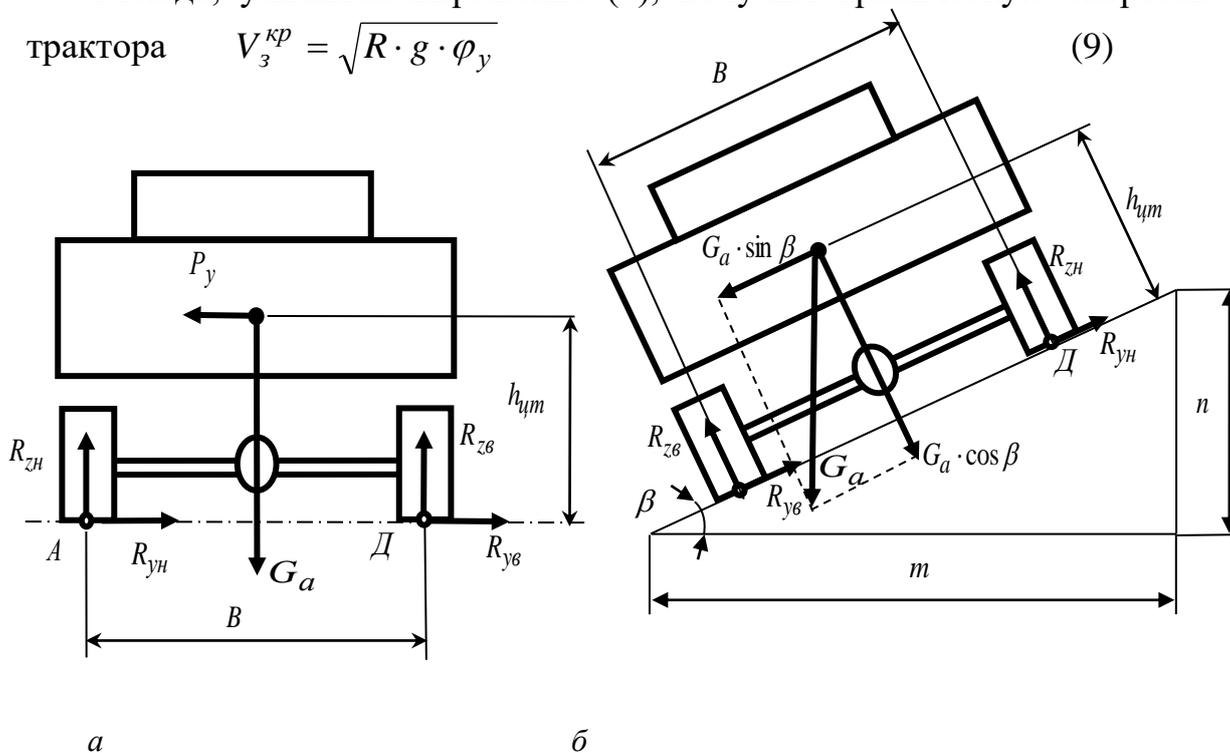


Рис. 2. Схема к расчету показателей поперечной устойчивости:

a – критических скоростей; b – критических углов косогора

2.6. Движение по дороге с поперечным уклоном.

При движении трактора по дороге с поперечным уклоном потеря устойчивости возможна вследствие действия поперечной составляющей силы тяжести, равной $G_a \cdot \sin \beta$ (рис. 2, б).

При опрокидывании уравнение моментов относительно точки A запишем

$$R_{zb} \cdot B + G_a \cdot \sin \beta \cdot h_{um} - G_a \cdot \cos \beta \cdot B/2 = 0. \quad (10)$$

В момент начала опрокидывания внутренние колеса отрываются от дороги, т.е. $R_{zb} = 0$, тогда

$$G_a \cdot \sin \beta \cdot h_{um} = G_a \cdot \cos \beta \cdot B/2. \quad (11)$$

Разделив левую и правую части уравнения (11) на $G_a \cdot \cos \beta$, после преобразования получим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{B}{2 \cdot h_{um}}. \quad (12)$$

Критический угол косогора при опрокидывании определится из уравнения (12):

$$\beta_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{B}{2 \cdot h_{um}} \right). \quad (13)$$

Занос трактора на косогоре начнется при достижении боковыми реакциями максимальной силы сцепления:

$$G_a \cdot \sin \beta = |R_{yв} + R_{yh}| = G_a \cdot \cos \beta \cdot \varphi_y. \quad (14)$$

Разделив (14) на $G_a \cdot \cos \beta$, получим

$$\operatorname{tg} \beta = \varphi_y. \quad (15)$$

Отсюда критический угол косогора по условиям заноса

$$\beta_3 = \operatorname{arctg} \cdot \varphi_y. \quad (16)$$

В рассмотренных выше вариантах предполагается занос всего трактора, но обычно начинают скользить колеса одного из мостов.

Из теории трактора известно, что колесо продолжает устойчивое качение, пока результирующая касательных сил в пятне контакта колеса с дорогой не превышает максимальной по условиям сцепления

$$\sqrt{R_y^2 + R_x^2} \leq R_z \cdot \varphi. \quad (17)$$

Отсюда

$$R_y \leq \sqrt{R_z^2 \cdot \varphi^2 - R_x^2}. \quad (18)$$

Таким образом, поперечная сила, которую можно приложить к колесу, не вызывая его скольжения, тем больше, чем больше сила сцепления $R_z \cdot \varphi$ и чем меньше продольная касательная реакция R_x (тормозная или тяговая).

На рис. 3, *а* показан трактор, у которого передние колеса движутся поступательно со скоростью V_1 , а задние, кроме составляющей V_1 , имеют еще скорость заноса V_2 . В результате задний мост перемещается со скоростью V_3 , что вызывает поворот автомобиля вокруг центра O , хотя передние колеса при этом находятся в нейтральном положении (не повернуты).

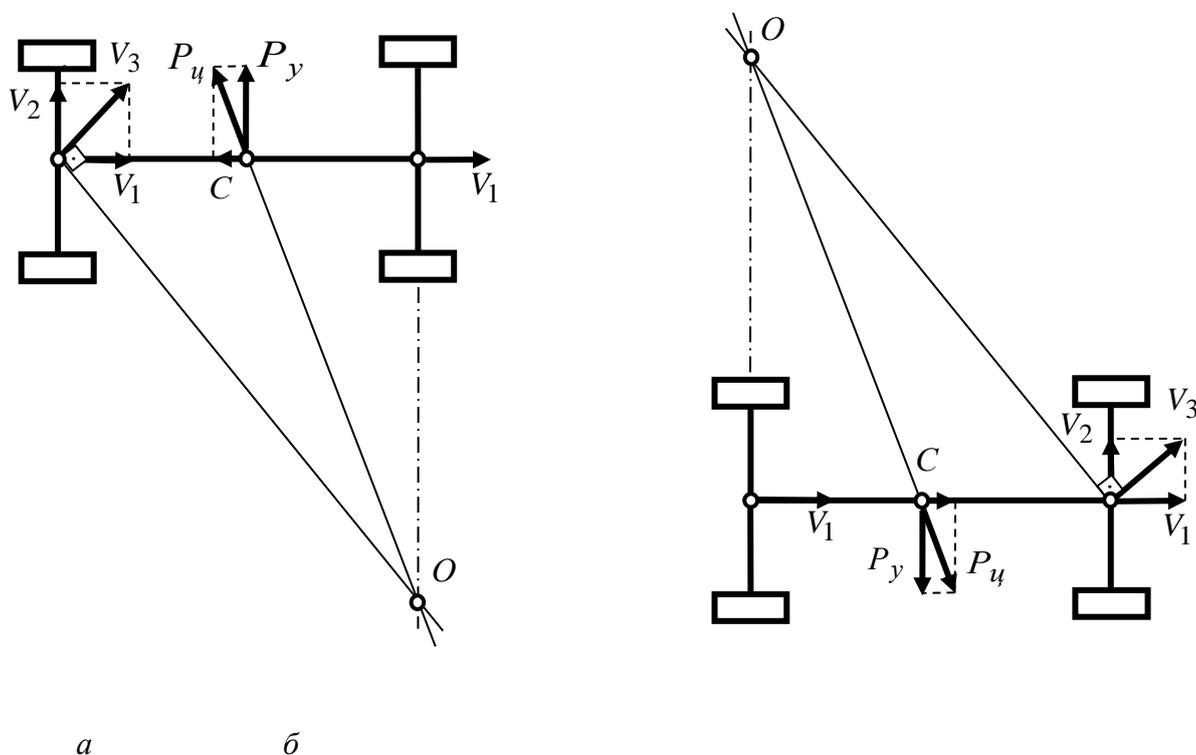


Рис. 3. Занос мостов трактора: *а*– заднего; *б*– переднего

Поперечная составляющая P_y возникающей при этом центробежной силы P_ψ действует в направлении скольжения заднего моста, повышая скорость скольжения V_2 . Это вызывает дальнейшее возрастание центробежной силы, в результате чего занос прогрессирует. Поэтому опаснее занос заднего, а не переднего моста (рис. 3, *б*), при котором поперечная составляющая P_y силы P_ψ направлена в сторону, противоположную скорости бокового скольжения V_2 , в результате чего скольжение передних колес автоматически прекращается и трактор не теряет устойчивости.

Заключение.

Проделав свою работу, я убедилась, что математический подход к выбору сельскохозяйственной техники, позволяет правильно и экономно подойти к вопросу приобретению последнего, учитывая рельефы территории. В работе были выполнены все поставленные задачи:

1. Более современные трактора не позволяют безопасно работать на склонах, которые ранее прекрасно обрабатывались старыми тракторами без проблем (у нас в хозяйстве в течении двух лет перевернулись 3 трактора). Следовательно, для нашей местности необходимо хозяйству иметь трактора, которые обрабатывали почву без проблем и имеют предельный угол $\approx 43^\circ - 44^\circ$ (К – 700 или близкие к МТЗ – 50).

2. Угол поперечной статистической устойчивости тракторов так же различен. Более устойчивым является К-700, что подтверждается на практике.

3. Исследовала угол поперечного крена различных тракторов, которые существенно влияют на устойчивость техники и его эксплуатационные параметры.

$$\sin \gamma = \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

4. Зависимость между углами трёхгранного клина выполняется почти во всех рассматриваемых плугах, но в двух случаях они более точные.

$$\operatorname{tg} E = BC:BE = \operatorname{tg} \alpha : \sin \beta.$$

Это говорит о том, что обработка почвы будет лучшей (плуг будет вырезать, поднимать, отодвигать и наклонять пласт земли, что скажется на улучшении урожайности).

Литература.

1. Д.И. Горин. Справочник ремонтника сельскохозяйственной техники. Минск. 1997, стр. 187.
2. Г.А. Карпенко. Сельскохозяйственные машины. М. 1974, стр. 388.
3. М.В. Сабликов, Сельскохозяйственные машины, М. 1968, стр. 156.
4. Н.А. Терёшин. Прикладная направленность школьного курса математики, М. 1990, стр. 18.

Рецензия

на исследовательскую работу «И даже там, где склон горист, всё пашет землю тракторист» ученицы 10 класса Сурковой Анны
МБОУ СОШ с. Посёлки имени Героя Советского Союза И.Ф.Кузьмичёва
Кузнецкого района Пензенской области.

Работа посвящена обобщению знаний и демонстрации ярких применений геометрии в сельском хозяйстве. Актуальность проблемы Анна видит в том, что математика не существует отдельно от жизни, она помогает рационально использовать математические соотношения, которые рассматриваются применительно к конкретным ситуациям, распространённым в практической деятельности.

Исследовательская работа имеет логически правильную структуру. Она состоит из введения, теоретической и практической части, заключения, а так же использованной при написании литературы. Работа грамотно оформлена.

Работа содержит большое количество доказательного материала, которое позволяет сделать правильные выводы и подтвердить основную гипотезу исследования показать на примерах геометрических задач на оптимизацию, как можно добиться наиболее высоких результатов при наименьших потерях.

Проект является исследовательским, поэтому способствует развитию познавательного интереса, аналитических способностей, различных способов восприятия и обработки информации. В работе поставлена цель, определены задачи, решая которые ученица показывает свою заинтересованность в данной проблеме.

Анной проделана серьёзная работа по решению геометрических задач, применяемых в практической деятельности, которые позволяют более рационально и экономно подходить к вопросу расходов в сельскохозяйственных предприятиях. Работа выполнена на достаточно высоком уровне, содержит ряд выводов, представляющих практический интерес. Работа полностью соответствует требованию качества, может быть дидактическим материалом для внеклассной работы с учащимися 10-11 классов: факультативы, кружки и внеурочных занятий.

Таким образом, можно заключить, что поставленные цель и задачи успешно раскрыты. Исследовательская работа заслуживает высокой оценки.

6.12.2023 г.

Руководитель исследовательской работы :  Купыра Н.А.
учитель математики МБОУ СОШ с.Посёлки