Всероссийский конкурс исследовательских и проектных работ
школьников «Высший пилотаж»

**Оптимальный выбор точки**

Исследовательская работа
Направление «Математика»

Автор: Краснов Павел Максимович
учащийся 10 «А» класса,
МБОУ СОШ №30 г.Пенза

2024 г.

## Содержание

**Введение**

Российский математик 19 века П. Л. Чебышев говорил, что «особую важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека – как располагать своими средствами для достижения наибольшей выгоды»[5].

Большую часть своих сил каждый из нас тратит на поиск наилучшего или другими словами оптимального решения поставленной задачи. Мы ежедневно отвечаем на непростые вопросы, как при наименьших затратах, достичь наилучших результатов – высокого жизненного уровня, максимальной прибыли, минимальных затрат времени.

В современном обществе умение моделировать различные жизненные, экономические и производственные ситуации стало особенно важно. Представителям самых разных специальностей приходится постоянно решать задачи по выбору оптимального условия: инженеры-технологи стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции; конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей; экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными и т. д.

Именно этот фактор и определяет актуальность работы.

В самых простых задачах имеем дело с двумя величинами, одна из которых зависит от другой, причём надо найти такое значение второй величины, при котором первая принимает своё наименьшее или наибольшее значение.

Задачи подобного рода носят общее название — задачи на оптимизацию (от латинского слова optimum— «наилучший»).

**Целью работы** является ознакомление с некоторыми методами решения задач на оптимизацию и нахождение наиболее рационального способа решения задачи на оптимальный выбор точки обзора.

**Объект исследования:** задачи на оптимизацию.

**Предмет исследования:** различные методы решения задач на оптимизацию и их применение к задачам практического содержания.

**Гипотеза:** с точки зрения методов решения задач оптимизации, можно рассмотреть решение вопросов по определению положения определенной точки на линии, из которой объект виден под максимальным углом, а также величины этого угла.

Для достижения поставленной цели нами были поставлены следующие **задачи**:

1. Подобрать и изучить справочную и учебную литературу по заданной теме;

2. Раскрыть некоторые приемы решения задач на вычисление наибольших и наименьших значений функции;

3. Познакомить учащихся моего класса с решением задач такого типа;

4. Смоделировать задачу на оптимальный выбор точки наилучшей обозримости объекта;

5. Решить различными методами задачу о нахождении точки обзора объекта;

6. Рассмотреть некоторые обобщения задачи.

**Методы исследования:** систематизация теоретического материала; обобщение накопленного материала; изучение и анализ литературы по теме исследования, моделирование и интерпретация полученных результатов исследования; анализ методов решения задач оптимизации; математические методы обработки результатов исследования, табличная и графическая интерпретация данных, математические расчеты.

**Практическое значение** работы состоит в возможности применения ее результатов в вопросах наилучшей наблюдаемости объекта в военном деле, строительстве, в организации охраны, проблемах размещения смотровых площадок. Из моего личного опыта могу сказать, что их можно применить в спортивном ориентировании для определения места размещения контрольного пункта и контролера, который следит за прохождением КП в соответствии с правилами.

Тема работы выбрана не случайно. Задачи на оптимизацию встречаются в ЕГЭ и вызывают затруднения у учащихся. Я решил подробно изучить эту тему для того, чтобы как следует подготовиться к экзамену и помочь понять эти задачи моим одноклассникам.

## Глава 1 Математические методы решения задач на оптимизацию

### 1.1 Азбука теории оптимизации

Большинство старшеклассников знают, что на экзамене по математике есть задачи с экономическим содержанием. Они связаны со знанием некоторых специфических математических моделей из области экономики, умением переводить сформулированные в виде текста условия в уравнения и неравенства и пониманием того, как решения полученных уравнений и неравенств соотносятся с тем, что написано в условии задачи. К наиболее сложным относятся так называемые «задачи на оптимизацию» или экстремальные задачи. Они описывают разнообразные ситуации, с которыми граждане, предприятия могут встретиться в своей деятельности. Математикам удалось разработать методы решения задач на наибольшее и наименьшее значение, или, как их еще называют, задач на оптимизацию от латинского слова «оптимум" - наилучший. [3].

Вообще решение практических задач средствами математики, как правило, содержит три основных этапа:

1. Формализация.
2. Решение полученной математической задачи.

3. Интерпретация найденного решения задачи.

При этом действуем по следующей схеме:

1. Задача «переводится» на язык функций. Для этого выбираем удобный параметр $x$, через который интересующую нас величину выражаем как функцию *f(x).*

2. Элементарными средствами или средствами математического анализа ищется наибольшее или наименьшее значение этой функции на некотором промежутке.

3. Выясняем, какой практический смысл (в терминах первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функции) результат.

Этот метод называют методом математического моделирования.

## 1.2 Методическая теория по нахождению наибольших и наименьших значений функции

*Графический метод*

При нахождении наибольших и наименьших значений непрерывной функции можно использовать соображения геометрического характера, изобразить схематически график функции и сделать все необходимые выводы.

«Графиком числовой функции называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции» [4].

*Наибольшее и наименьшее значения функции.*

Число $f(x_0)$ называют наибольшим (наименьшим) значением функции $f$ на множестве $M \subset D(f)$, если существует такое число $x_0 \in M$, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $F(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$. Обозначают: $\max_M f(x) = f(x_0)$ $(\min_M f(x) = f(x_0))$.

Отыскание наибольшего (наименьшего) значения функции можно упростить, если воспользоваться следующими свойствами непрерывных функций:

− если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ непрерывна и возрастает (убывает), то $\min_{[a;\, b]} f(x) = F(a)$ и $\max_{[a;\, b]} f(x) = f(b)$ $(\min_{[a;\, b]} f(x) = f(b)$ и $\max_{[a;\, b]} f(x) = f(a))$;

− если функция $y = f(x)$, непрерывная на $[a; b]$, имеет на этом отрезке только одну точку максимума $x_0$ и ни одной точки минимума (только одну точку минимума и ни одной точки максимума), то наибольшее (наименьшее) значение на данном отрезке есть $f(x_0)$ [4].

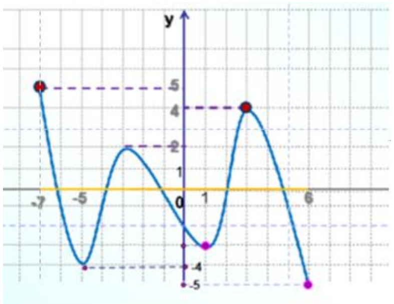


Рис.1

*Задача 1.* Найдите наибольшее и наименьшее значение функции по ее графику на [-7;1] и [-5;6] (Рис. 1).

Ответ: $\max_{[-7;1]} f(x) = f(-7) = 5$; $\min_{[-7;\,1]} f(x) = f(-5) = -4$

$\max_{[-5;6]} f(x) = f(3) = 4$; $\min_{[-7;\,1]} f(x) = f(-6) = -5$

*Метод поиска множества значений функции*

Как известно, у всякой функции $y = f(x)$ имеется область определения и область значений.

Область определения $D(f)$ — это множество допустимых значений независимой переменной $x$. Множество всех значений, которые принимает зависимая переменная, называют областью значений функции и обозначают значений $E(f)$.

Число $A$ принадлежит области значений функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда найдётся такой $x$, что $f(x) = A$. Таким образом, нахождение области значений есть задача с параметром: область значений функции $f(x)$ — это множество всех значений параметра $A$, при которых уравнение $f(x) = A$ имеет решение.

К нахождению области значений естественным образом сводятся некоторые задачи на вычисление наибольших и наименьших значений функций.

*Задача 2.* Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \frac{x}{x^2-x+1}$.

*Решение.* Найдём область значений данной функции. Ищем все значения $A$, при которых уравнение $\frac{x}{x^2-x+1} = A$ имеет решения. Умножаем обе части на выражение $x^2-x+1$, которое не обращается в нуль ни при каком $x$, и после преобразований получаем: $Ax^2-(A+1)x+A=0$. (1)

Если $A = 0$, то уравнение (1) имеет корень $x = 0$, так что $A = 0$ годится.

Если $A\neq 0$, то уравнение (1) является квадратным. Чтобы оно имело корни, его дискриминант должен быть неотрицателен: $D = -3A^2 + 2A + 1 \geq 0$, откуда $-\frac{1}{3} \leq A \leq 1$. Этот отрезок содержит значение $A = 0$, полученное ранее.

Итак, мы нашли область значений: $E(f) = [-\frac{1}{3};1]$. Теперь ясно, что наибольшее значение функции $f$ равно $1$, и оно достигается в точке $x = \frac{A+1}{2A} = 1$, а наименьшее значение равно $-\frac{1}{3}$ в точке $x = -1$. Ответ: 1 и $-\frac{1}{3}$.

*Геометрический метод*

*Задача 3.* Дана окружность с хордой и касательной, причём точка касания лежит на меньшей из двух дуг, стягиваемых хордой. Найдите на касательной точку, из которой хорда видна под наибольшим углом.

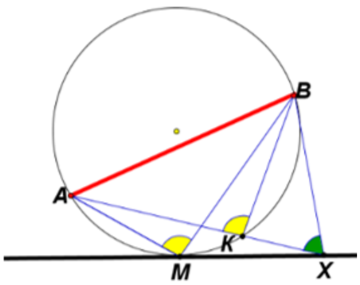


Рис.2

Решение.

Пусть $M$—точка касания, $AB$—хорда, $X$—произвольная точка касательной, отличная от M (Рис.2). Предположим, что отрезок AX пересекает дугу $AMB$ в точке $K$. Тогда ∠AKB—внешний угол треугольника $KXB$. Поэтому $\angle AMB = \angle AKB > \angle AXB$.

Можно рассуждать иначе: Угол $AMB$ измеряется половиной дуги

$AB$, которая не содержит точку $M$. А любой другой угол, скажем, $\angle AXB$ , измеряется полуразностью дуг $AB$ и $KB$.

Ответ: Точка касания

*Задача 4*. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок $AB$ виден под данным углом $\propto$.

Ответ: Дуги двух равных окружностей с общей хордой (без концов этой хорды). Решение задачи представлено в приложении А.

*Задача 5*. Дана окружность с хордой $AB$ и прямая, не пересекающая окружность. Найдите на прямой точку, из которой хорда $AB$ видна под наибольшим углом.

Очевидно, максимум величины искомого угла может достигаться только в той точке, где окружность, проходящая через точки $A$ и $B$, касается прямой. Но через точки $A$ и $B$ можно провести две окружности, которые касаются данной прямой. Пусть $M$ и $M_1$—точка касания, $l$ – данная прямая (Рис.3). Считаем, что прямые $AB$ и $l$ пересекаются, но не являются перпендикулярными.

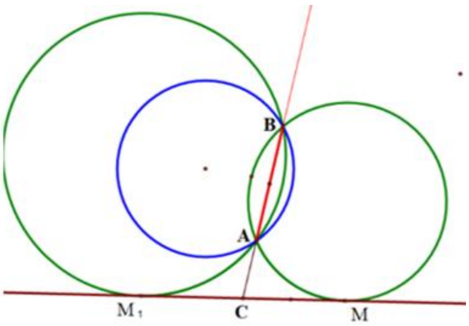


Рис.3

Точка пересечения этих прямых равноудалена от точек $M$ и $M_1$ по свойству касательной и секущей. Радиус построенной окружности, касающейся стороны острого угла, образованного прямыми $AB$ и $l$, будет меньше радиуса другой окружности. По обобщенной теореме синусов получаем, что угол $AMB$ больше угла $AM_1B$. Заметим, что если прямые $AB$ и $l$ перпендикулярные, то задача имеет два решения. Если прямые $AB$ и $l$ не имеют общих точек, то искомая точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $AB$.

Получим:

1. Если прямые $AB$ и $l$ пересекаются, но не перпендикулярные, то решением будет точка $M$.
2. Если прямые $AB$ и $l$ перпендикулярные, то решением являются точки $M$ , $M_1$.
3. Если прямые $AB$ и $l$ параллельные, то искомой точкой будет точка пересечения данной прямой и серединного перпендикуляра к отрезку АВ.

*Метод производной*

При решении задач на оптимизацию используются знания теоремы Ферма.

Теорема Ферма. Если дифференцируемая на промежутке $X$ функция $y=f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке $x_0$ этого промежутка, то производная в этой точке равна нулю.

Остановимся на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции с использованием производной.

Для этого следуем известному алгоритму:

1. Находим *ОДЗ* функции.

2. Находим производную функции.

3. Приравниваем производную к нулю.

4. Находим промежутки, на которых производная сохраняет знак, и по ним определяем промежутки возрастания и убывания функции:

Если на промежутке *I* производная функции f*(x)>0* (*f(x)<0*), то функция *y =f(x)* возрастает (убывает) на этом промежутке.

5. Находим точки максимума и минимума функции.

В точке максимума функции производная меняет знак с плюса на минус. В точке минимума функции производная меняет знак с минуса на плюс.

6. Находим значение функции в концах отрезка. Затем сравниваем значение функции в концах отрезка и в точках максимума (минимума), и выбираем из них наибольшее (наименьшее), если нужно найти наибольшее (наименьшее) значение функции.

Однако, в зависимости от того, как себя ведет функция на отрезке, этот алгоритм можно значительно сократить**.**

Задача 6. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \frac{x}{x^2-x+1}$.

Функция определена на всей числовой прямой.

Находим производную: $f'(x) = \frac{x^2-x+1-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$.

Приравниваем производную к нулю: $-x^2+1=0$. $x_1=-1$, $x_2=1$.

Вычисляем значения функции *y* = *f(x)* в этих точках: $f(-1) = -\frac{1}{3}$ , $f(1) = 1$.

Наибольшее значение функции *f(x)* равно 1, а наименьшее значение равно $-\frac{1}{3}$

Ответ: 1 и $-\frac{1}{3}$ .

## Глава 2 Решение задачи на оптимальный выбор точки

Наш регион богат историческими объектами. Главное ее культурное сокровище – это усадьбы Пензенской области, которые прочно вплетены в культурный код нашей страны. Хочется отметить, что в проект «Усадебное достояние РФ» вошло 7 пензенских усадеб. Это: усадьба Голицыных (село Зубрило во), усадьба Войкова (город Каменка), усадьба Шараповых (село Проказа), усадьба Шуваловых (село Нижний Шкафут), главный дом усадьбы Анненково (село Анненково), усадьба графа Шереметьева (с. Поим), усадебный дом княгини Долгоруковой (село Литовка).

В регионе усадьбы ежегодно посещают десятки людей, устраивая автопробеги и экскурсии, чтобы посмотреть архитектуру и узнать больше об их жильцах.

### 2.1 Решение задачи на определение положения точки на прямой, из которой неподвижный объект виден под максимальным углом

Меня заинтересовала задача о наилучшей точке обзора. То есть где лучше устроить смотровую площадку или остановить экскурсионный автобус, чтобы фасад главного дома усадьбы можно рассмотреть под наибольшим углом.

Задача, которую рассмотрим, звучит так: Неподалёку от дороги, по которой постоянно курсируют туристические автобусы, расположена старинная усадьба. В какой точке шоссе должен остановиться автобус, чтобы экскурсанты могли лучше всего рассмотреть из автобуса фасад здания?

Если местные власти запланируют оборудовать смотровую площадку на обочине дороги, то как выбрать точку наилучшего обзора?

Есть множество факторов, которые следовало бы учесть при выборе этой точки, — рельеф местности, растительность и т. п. Для наших целей предельно упростим задачу: будем считать, что дорога прямолинейная, местность — открытая равнина, а нас интересует только фасад здания, который можно представить в виде отрезка $AB$.

Первоначально, кажется, нужно взять точку пересечения дороги и серединного перпендикуляра к отрезку $AB$. Но как определить эту точку, если здание расположено перпендикулярно к дороге? Точку обзора приходится «отправить в бесконечность», а фасад здания из не будет виден, так как приходится смотреть вдоль него.

Тогда возникает идея найти такую точку $X$ на дороге, из которой здание можно видеть под наибольшим углом.

Задачу максимизации угла $AXB$ мы и примем в качестве математической модели исходной задачи.

Математическая постановка задачи выглядит следующим образом:

Дана прямая $l$ и не пересекающий ее отрезок $AB$. Найдите на прямой $l$ такую точку $X$, для которой угол $AXB$, имеет наибольшую возможную величину.

#### *2.1.1 Графический метод*

Посмотрим, как примерно изменяется угол $AXB$, когда точка $X$ движется по прямой $l$. Другими словами: как ведёт себя функция $f$, которая каждой точке $X$ прямой $l$ ставит в соответствие величину угла $AXB$.

Несложно приблизительно построить график этой функции: над каждой точкой $X$ нашей прямой берётся точка на расстоянии, равном $f(X) = \angle AXB$.

Для более точного построения графика функции для нашей задачи воспользуемся «Математическим конструктором».

Дорогу изобразим горизонтальной прямой $l$, а точки $A$ и $B$ лежат в одной из полуплоскостей, относительно этой прямой (Рис.4).

Отметим на прямой любую точку $X$ и измерим угол $\angle AXB$. Теперь уже можно искать лучшую точку обзора, просто двигая точку $X$ по прямой и следя за изменением величины угла.

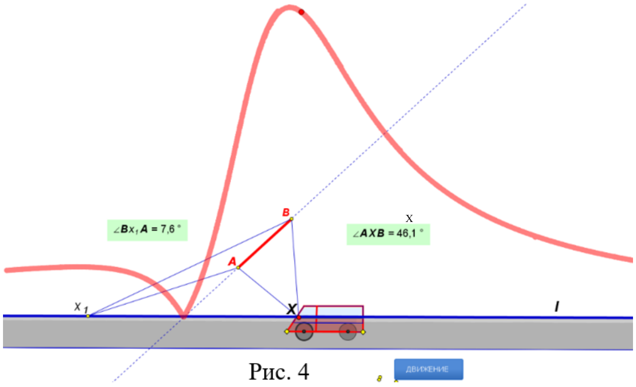


Рис. 4

Для более содержательной информации о найденной точке построим график величины угла $AXB$, как функции от точки $X$. Возможности динамической программы позволяют это выполнить без вычислений и, не задавая аналитически функцию.

Непосредственно из построенного графика видно, что с обеих сторон от прямой $AB$ (если только она не параллельна прямой $l$) найдется по точке максимума: одна из них — лучшая точка обзора фасада, другая — тыльной стороны.

Также видим, что график имеет одну точку излома, из которой отрезок $AB$ виден под нулевым углом (точнее говоря, не виден); функция принимает в ней минимальное значение. Построенная модель удобна еще и тем, что позволяет легко посмотреть, как перемещается точка наилучшего обзора при изменении положения объекта, — нужно просто передвинуть концы отрезка $AB$, а график изменится автоматически.

### *2.1.2 Метод поиска множества значений функции*

Этот способ повторяет первый с той разницей, что угол выражается через координаты концов отрезка $AB$ и точки $X$, а полученная функция исследуется аналитически. Примем прямую $l$ за ось $x$, начало координат поместим в точку $O$ - пересечения оси абсцисс с прямой, проходящей через точку $A$, перпендикулярно прямой $l$ (Рис.5).

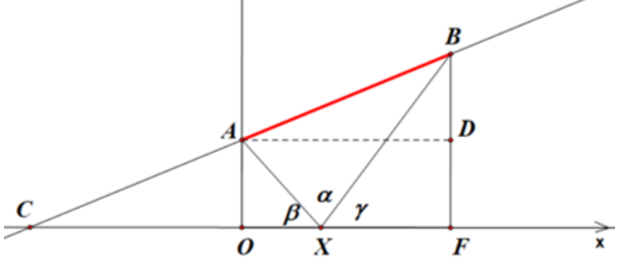


Рис.5

Заметим, что если прямая $AB$ параллельна оси $l$, то точка наилучшего обзора, очевидно, будет находиться на серединном перпендикуляре к $AB$. Пусть точки имеют координаты: $O(0;0)$, $A(0;\ a_2)$, $B(b_1;\ b_2)$, $X\ (x;\ 0)$.

Из треугольника $AOX$ определим:

$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_2}{x}$ и $\operatorname{tg}\gamma = \frac{b_2}{b_1 - x}$.

Тогда искомый угол $AXB$ обозначим через $\alpha$ и найдем его тангенс:

$\operatorname{tg}\alpha = tg\left(180^0 - (\beta+\gamma)\right) = -tg(\beta+\gamma).$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\frac{a_2}{x}+\frac{b_2}{b_1-x}}{1-\frac{b_2}{b_1-x}\cdot\frac{a_2}{x}} = -\frac{a_2(b_1-x)+b_2(x)}{x(b_1-x)-a_2b_2} = \frac{x(b_2-a_2)+a_2b_1}{x^2-b_1x+a_2b_2}.$

Получили: $f_1(x) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{x(b_2-a_2)+a_2b_1}{x^2-b_1x+a_2b_2}$ .

При переходе от критической точки $tg\alpha$ к углу, надо учитывать, что тангенс — функция немонотонная и даже имеет вертикальную асимптоту в точке π/2. Можно использовать не $tg\alpha$, а $cos\alpha$ — функцию, монотонно зависящую от α и легко выражаемую через $x$ с помощью скалярного произведения: $\overrightarrow{\mathrm{XA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XB}} = |\overrightarrow{\mathrm{XA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{XB}}|cos\alpha$ . Учитывая, что $\overrightarrow{\mathrm{XA}}\{-x;a_2\}$, $\overrightarrow{\mathrm{XB}}\{b_1-x;b_2\}$, получим: $f_2(x) = cos\alpha = \frac{-x(b_1-x)+a_2b_2}{\sqrt{x^2+a_2^2}\cdot\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}}$.

Также несложно получить функцию $sin\alpha$, монотонно зависящую от α и легко выражаемую через $x$ методом площадей: $S_{\Delta AXB} = S_{A0FB} - S_{\Delta A0X} - S_{\Delta XFB}$.

$\sqrt{x^2+a^2}\cdot\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}\ \sin\alpha = (a_2+b_2)\,b_1 - a_2x - (b_1-x)b_2.$

$f_3(x) = sin\alpha = \frac{(b_2-a_2)x+a_2b_1}{\sqrt{x^2+a_2^2}\cdot\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}}.$

Учитывая, что угол обзора изменяется от $0^0$ до $180^0$ , то $sin\alpha \ge 0$. Тогда,

$f_3(x) = \frac{|(b_2-a_2)x+a_2b_1|}{\sqrt{x^2+a_2^2}\cdot\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}}$ , так как $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, то $f_1(x) = \frac{|x(b_2-a_2)+a_2b_1|}{x^2-b_1x+a_2b_2}$.

Исследуем функцию $f_1(x)$. Найдем ее наибольшее и наименьшее значения.

Для этого определим область значений функции $f_1(x) = \frac{|x(b_2-a_2)+a_2b_1|}{x^2-b_1x+a_2b_2}$.

Ищем все значения $A$, при которых уравнение $-\frac{x(b_2-a_2)+a_2b_1}{x^2-b_1x+a_2b_2} = \mathrm{A}$ имеет решения.

Считаем для определенности, что $b_2 > a_2$ и $x < \frac{-a_2b_1}{b_2-a_2}$

$$x(b_2-a_2)+a_2b_1 = -\mathrm{A}(x^2-b_1x+a_2b_2)$$

$$\mathrm{A}x^2 - (\mathrm{A}b_1 - b_2 + a_2)x + Aa_2b_2 + a_2b_1 = 0 \qquad (2)$$

$$D{=}(Ab_1 - b_2 + a_2)^2 - 4A(Aa_2b_2 + a_2b_1);\ \ D \ge 0$$

$D = (Ab_1)^2 + b_2^2 + a_2^2 - 2Ab_2b_1 + 2Aa_2b_1 - 2b_2a_2 - 4A^2a_2b_2 - 4Aa_2b_1 = ({b_1}^2 - 4a_2b_2)A^2 -$
$-2(b_2b_1 + a_2b_1)A + b_2^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 = ({b_1}^2 - 4a_2b_2)A^2 - 2b_1(b_2+a_2)A + (a_2-b_2)^2.$

$$({b_1}^2 - 4a_2b_2)A^2 - 2b_1(b_2+a_2)A + (a_2-b_2)^2 \ge 0$$

$D_1 = {b_1}^2(b_2+a_2)^2 - ({b_1}^2 - 4a_2b_2)(a_2-b_2)^2 = {b_1}^2(a_2+b_2)^2 - {b_1}^2(a_2-b_2)^2 + 4a_2b_2(a_2 -$
$-b22{=}4b12a2b2{+}4a2b2a2{-}b22{=}4a2b2(a2{-}b22{+}b12){=}4a2b2d2$,

где $d^2 = (a_2-b_2)^2 + {b_1}^2$. ($d$−длина фасада здания). Тогда $\mathrm{A}_{1,2} = \frac{b_1(b_2+a_2)\pm 2d\sqrt{a_2b_2}}{{b_1}^2-4a_2b_2}$.

Найдем в каких точках достигаются найденные значения.

Из уравнения (2) определим координату вершины параболы. В зависимости от значения $A$, получим точки экстремума функции $f_1(x)$.

$x_0 = \frac{Ab_1 - b_2 + a_2}{2A}$ или $x_0 = \frac{b_1}{2} - \frac{b_2 - a_2}{2A}$.

Вместо $A$ подставим найденное значение $A_1 = \frac{b_1(b_2+a_2) - 2d\sqrt{a_2 b_2}}{b_1{}^2 - 4a_2 b_2}$ .

$$x_0 = \frac{b_1}{2} - \frac{b_2 - a_2}{2A} = \frac{b_1}{2} - \frac{(b_2 - a_2)(b_1{}^2 - 4a_2 b_2)}{2(b_1(a_2+b_2) - 2d\sqrt{a_2 b_2})}.$$

Преобразуем знаменатель дроби:

$$(b_1(a_2 + b_2) - 2d\sqrt{a_2 b_2}) = \frac{(b_1(a_2+b_2) - 2d\sqrt{a_2 b_2})(b_1(a_2+b_2) + 2d\sqrt{a_2 b_2}}{b_1(a_2+b_2) + 2d\sqrt{a_2 b_2}} = \frac{b_1{}^2(a_2+b_2)^2 - 4d^2 a_2 b_2}{b_1(a_2+b_2) + 2d\sqrt{a_2 b_2}} =$$

$$\frac{(d^2 - (b_2 - a_2)^2)(a_2+b_2)^2 - 4d^2 a_2 b_2}{b_1(a_2+b_2) + 2d\sqrt{a_2 b_2}} = \frac{d^2(a_2+b_2)^2 - (b_2 - a_2)^2(a_2+b_2)^2 - 4d^2 a_2 b_2}{b_1(a_2+b_2) + 2d\sqrt{a_2 b_2}} = \frac{d^2(b_2 - a_2)^2 - (b_2 - a_2)^2(a_2+b_2)^2}{b_1(a_2+b_2) + 2d\sqrt{a_2 b_2}} =$$

$$\frac{(b_2 - a_2)^2\left(b_1^2 + (a_2 - b_2)^2 - (a_2+b_2)^2\right)}{b_1(a_2+b_2) + 2d\sqrt{a_2 b_2}} = \frac{(a_2 - b_2)^2(b_1{}^2 - 4a_2 b_2)}{b_1(a_2+b_2) + 2d\sqrt{a_2 b_2}}.$$

Вычислим абсциссу вершины параболы:

$$x_0 = \frac{b_1}{2} - \frac{(b_2 - a_2)(b_1{}^2 - 4a_2 b_2)(b_1(a_2+b_2) + 2d\sqrt{a_2 b_2})}{2(a_2 - b_2)^2\left(b_1{}^2 - 4a_2 b_2\right)} = \frac{b_1}{2} - \frac{b_1(a_2+b_2) + 2d\sqrt{a_2 b_2}}{2(b_2 - a_2)} =$$

$$= \frac{b_1(b_2 - a_2) - b_1(a_2+b_2) - 2d\sqrt{a_2 b_2}}{2(b_2 - a_2)} = \frac{-2a_2 b_1 - 2d\sqrt{a_2 b_2}}{2(b_2 - a_2)} = \frac{-a_2 b_1 - d\sqrt{a_2 b_2}}{b_2 - a_2}.$$

$x_1 = \frac{-a_2 b_1 - d\sqrt{a_2 b_2}}{b_2 - a_2}$ принадлежит промежутку (-∞;$\frac{-a_2 b_1}{b_2 - a_2}$).

Аналогично, для $A_2 = \frac{b_1(a_2+b_2) + 2d\sqrt{a_2 b_2}}{b_1{}^2 - 4a_2 b_2}$, получим $x_2 = \frac{-a_2 b_1 + d\sqrt{a_2 b_2}}{b_2 - a_2}$, не принадлежащий рассматриваемому интервалу.

Если $x \geq \frac{-a_2 b_1}{b_2 - a_2}$, то $A$ принимает значения, равные $\frac{-b_1(a_2+b_2) \pm 2d\sqrt{a_2 b_2}}{b_1{}^2 - 4a_2 b_2}$. Наибольшее значение $\frac{-b_1(a_2+b_2) - 2d\sqrt{a_2 b_2}}{b_1{}^2 - 4a_2 b_2}$ на рассматриваемом интервале функция принимает в точке с координатами $\left(\frac{-a_2 b_1 + d\sqrt{a_2 b_2}}{b_2 - a_2}, 0\right)$. Наименьшее значения функции $f_1(x)$, равное 0 достигается в точке($\frac{-a_2 b_1}{b_2 - a_2}; 0$).

Проводим аналогичные рассуждения для случая $b_2 < a_2$.

В итоге получили:

Таблица 1. Исследование функции *$f_1(x)$*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $f_1(x)=\dfrac{\lvert x(b_2-a_2)+a_2b_1\rvert}{x^2-b_1x+a_2b_2}$ | | |
| $b_2>a_2$ | $\max\limits_{M} f_1(x)=f_1(x_1)=A_1$ <br> $M=(-\infty;\frac{-a_2b_1}{b_2-a_2})$, <br> $x_1=\frac{-a_2b_1-d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2}$, <br> $A_1=\dfrac{b_1(a_2+b_2)-2d\sqrt{a_2b_2}}{{b_1}^2-4a_2b_2}$ | $\min\limits_{M} f_1(x)=f_1(x_0)=0$, <br> $M=[\frac{-a_2b_1}{b_2-a_2};+\infty;)$, <br> $x_0=\frac{-a_2b_1}{b_2-a_2}$. | $\max\limits_{M} f_1(x)=f_1(x_2)=A_2,$ <br> $M=[\frac{-a_2b_1}{b_2-a_2};+\infty;)$, <br> $x_2=\frac{-a_2b_1+d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2}$, <br> $A_2=\dfrac{-b_1(a_2+b_2)-2d\sqrt{a_2b_2}}{{b_1}^2-4a_2b_2}$ |
| $b_2<a_2$ | $\max\limits_{M} f_1(x)=f_1(x_1)=A_2$ <br> $M=(-\infty;\frac{-a_2b_1}{b_2-a_2})$, <br> $x_2=\frac{-a_2b_1+d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2}$, <br> $A_2=\dfrac{-b_1(a_2+b_2)-2d\sqrt{a_2b_2}}{{b_1}^2-4a_2b_2}$. | $\min\limits_{M} f_1(x)=f_1(x_0)=0$, <br> $M=[\frac{-a_2b_1}{b_2-a_2};+\infty;)$, <br> $x_0=\frac{-a_2b_1}{b_2-a_2}$. | $\max\limits_{M} f_1(x)=f_1(x_2)=A_2,$ <br> $M=[\frac{-a_2b_1}{b_2-a_2};+\infty;)$, <br> $x_1=\frac{-a_2b_1-d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2}$, <br> $A_1=\dfrac{b_1(a_2+b_2)-2d\sqrt{a_2b_2}}{{b_1}^2-4a_2b_2}$ |

Таким образом, при $b_2>a_2$ из точки *X* с координатами ($\frac{-a_2b_1+d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2},0$) фасад усадьбы будет виден под наибольшим углом, тыльную сторону дома видно под наибольшим углом из точки с координатами ($\frac{-a_2b_1-d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2},0$). Для случая $b_2<a_2$: фасад усадьбы будет виден под наибольшим углом из точки с координатами ($\frac{-a_2b_1-d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2},0$), а тыльную сторону дома - ($\frac{-a_2b_1+d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2},0$).

Найдя критические точки $tg\alpha$, переходим к самому углу $\alpha=arctg\,x$. Вычисления для функции *$f_2(x)$*и *$f_3(x)$*достаточно громоздкие.

В программе «Математический конструктор» построили график всех рассматриваемых функций. Точные положения точек экстремума функции находим инструментом *Точка экстремума* меню *Графики*. Координаты точек *M* и *N* совпали с найденными значениями по формулам. На оси *Ox* нашли точку *X* с абсциссой, равной абсциссе точке *M,* и с помощью вкладки *Измерение* определили угол, под которым виден отрезок *AB* из точки *X*, а также тангенс этого угла. И это значение совпало с вычисленным аналитическим способом наибольшим значением функции (Рис.6).

Также видим, что графики функции *$f_1(x)$* и *$f_3(x)$* имеют одну точку излома, из которой объект виден под нулевым углом (точнее говоря, не виден); функция принимает в ней минимальное значение. Замечаем, что при любых значениях координат точек *A* и *B,* прямая *AB* пересекает прямую в точке С.

Найдем длину отрезка $CX$: (Рис.5)

$$CX=CO+OX=AOctgACO+x=AOctgBAD+x = a_2\frac{b_1}{b_2-a_2}+\frac{-a_2b_1+d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2}=\frac{d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2}.$$

И если систему координат ввести иначе: начало совместить с точкой $C$ - пересечения прямых $AB$ и $l$,то абсцисса точки, из которой фасад здания виден под максимальным углом, равна $\frac{d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2}$, а максимальный угол видимости тыльной стороны наблюдается из точки с координатами $\left(\frac{-d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2};0\right)$.

*2.1.3 Геометрический метод*

Рассмотренная в 1 главе задача 5 не только объясняет, где находится точка наилучшего обзора, но и позволяет легко найти её местоположение, построив окружность, которая проходит через точки $A$ и $B$ и касается прямой.

Пусть $A$ и $B$—данные точки, $C$ —точка пересечения прямой $AB$ с данной прямой, $X$— искомая точка касания. По теореме о касательной и секущей имеем $\mathrm{CX}=\sqrt{CA\cdot CB}$. Отсюда вытекает следующий способ построения.

*Построение:*

Строим отрезок, равный среднему геометрическому известных отрезков $CB$ и $CA$: (Рис.7).

1. На прямой $AB$ от точки $B$ откладываем отрезок $BE$, равный $CA$. Получим отрезок $CE$.

2. На отрезке $CE$ как на диаметре построим окружность.

3. Через точку $B$ проведем прямую, перпендикулярную прямой $CE$. Эта прямая пересекает окружность с диаметром $CE$ в точках $H$ и $H_1$ .

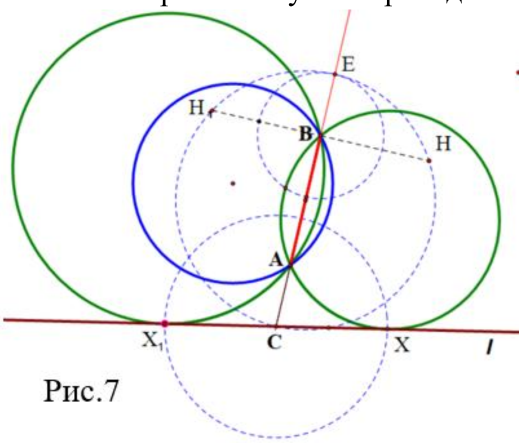


Рис.7

4. Построим окружность с центром в точке $C$ и радиусом $BH$.

5. $(C, BH)\cap l=\{X;X_1\}$ .

Пусть $CX$ — один из таких отрезков. Опишем окружность около треугольника $ABX$.

*Доказательство*: Докажем, что эта окружность — искомая. Действительно, по построению она проходит через точки $A$ и $B$ и, кроме того, $CX^2 = CA\cdot CB$.

Если $K$ — ещё одна общая точка данной прямой и построенной окружности, то $CX\cdot(CX\pm XK) = CA\cdot CB = CX^2$, поэтому точки $X$ и $K$ совпадают.

Следовательно, окружность, проходящая через точки $A$, $B$ и $X$, касается данной прямой. Аналогично для второго отрезка.

*Исследование:* Если точки $A$ и $B$ расположены по одну сторону от данной прямой и удалены от неё на разные расстояния, то задача имеет два решения, если на равные — одно решение. В остальных случаях решений нет.

Заметим, что если, как и во втором решении, $C$ — это точка, в которой прямая $BC$ пересекает «дорогу», то по теореме о квадрате касательной $CX = \sqrt{CA \cdot CB}$. По этой формуле легко выразить координату искомой точки на прямой через координаты точек $A$ и $B$.

Заметим, что $\angle ACO = \angle BAD$ (Рис.5). $CX = CO + OX = a_2 \frac{b_1}{b_2 - a_2} + x$, $CA = a_2 : sin\angle ACO = a_2 \frac{d}{b_2 - a_2}$, $CB = b_2 : sin\angle BCF = b_2 \frac{d}{b_2 - a_2}$.

$$(a_2 \frac{b_1}{b_2 - a_2} + x)^2 = a_2 \frac{d}{b_2 - a_2} \cdot b_2 \frac{d}{b_2 - a_2} \text{ или } x^2 - 2\frac{a_2 b_1}{b_2 - a_2}x + \left(\frac{a_2 b_1}{b_2 - a_2}\right)^2 - \frac{a_2 b_2 d^2}{(b_2 - a_2)^2} = 0$$

$$D = \left(\frac{a_2 b_1}{b_2 - a_2}\right)^2 - \left(\frac{a_2 b_1}{b_2 - a_2}\right)^2 + \frac{a_2 \cdot b_2 d^2}{(b_2 - a_2)^2} = \frac{a_2 \cdot b_2 d^2}{(b_2 - a_2)^2}; \qquad x_{1,2} = \frac{-a_2 b_1 \pm d\sqrt{a_2 b_2}}{b_2 - a_2}.$$

Видим, что вычислительный метод даёт для нахождения абсциссы точки $X$ такое же выражение (только более длинным путем).

### *2.1.4 Метод производной*

Вычислим производную функции $f_1(x) = \frac{|x(b_2 - a_2) + a_2 b_1|}{x^2 - b_1 x + a_2 b_2}$ $(b_2 > a_2)$.

$$f_1(x) = \begin{cases} -\dfrac{x(b_2 - a_2) + a_2 b_1}{x^2 - b_1 x + a_2 b_2}, \text{если } x < \dfrac{-a_2 b_1}{b_2 - a_2}; \\ 0, \text{если } x = \dfrac{-a_2 b_1}{b_2 - a_2}; \\ \dfrac{x(b_2 - a_2) + a_2 b_1}{x^2 - b_1 x + a_2 b_2}, \quad \text{если } x > \dfrac{-a_2 b_1}{b_2 - a_2}. \end{cases}$$

$$(f_1(x))' = (\operatorname{tg} \alpha)' = -\frac{(b_2 - a_2)(x^2 - x b_1 + a_2 b_2) - (x(b_2 - a_2) + a_2 b_1)(2x - b_1)}{(x^2 - b_1 x + a_2 b_2)^2} =$$

$$= \frac{(b_2 - a_2)x^2 + 2a_2 b_1 x - a_2 b_2 (b_2 - a_2) - b_1^2 a_2}{(x^2 - b_1 x + a_2 b_2)^2}.$$

Получили:

$$(f_1(x))' = (tg\ \alpha)' = \begin{cases} \dfrac{(b_2 - a_2)x^2 + 2a_2 b_1 x - b_2^2 a_2 + a_2^2 b_2 - b_1^2 a_2}{(x^2 - x b_1 + a_2 b_2)^2}, \text{если } x < \dfrac{-a_2 b_1}{b_2 - a_2}; \\ \text{не существует}, \quad \text{если } x = \dfrac{-a_2 b_1}{b_2 - a_2}; \\ -\dfrac{(b_2 - a_2)x^2 + 2a_2 b_1 x - b_2^2 a_2 + a_2^2 b_2 - b_1^2 a_2}{(x^2 - b_1 x + a_2 b_2)^2}, \text{если } x > \dfrac{-a_2 b_1}{b_2 - a_2}. \end{cases}$$

Приравняем производную к нулю:

$$(b_2 - a_2)x^2 + 2a_2 b_1 x - b_2^2 a_2 + a_2^2 b_2 - b_1^2 a_2 = 0$$

$D_1 = (a_2 b_1)^2 + (b_2^2 a_2 - a_2^2 b_2 + b_1^2 a_2)(b_2 - a_2) = (a_2 b_1)^2 + b_2^3 a_2 - a_2^2 b_2^2 + b_1^2 b_2 a_2 - a_2^2 b_2^2 + a_2^3 b_2 - (a_2 b_1)^2 = a_2 b_2 (b_2^2 - 2a_2 b_2 + a_2^2 + b_1^2) = a_2 b_2 (b_1^2 + (b_2 - a_2)^2)$

Обозначим выражение $b_1^2 + (b_2 - a_2)^2$через $d^2$, где $d$-длина отрезка $AB$.

$D_1 = a_2 b_2 d^2$ *и* $x_{1,2} = \frac{-a_2 b_1 \pm d\sqrt{a_2 b_2}}{b_2 - a_2}$.

Получили:

Таблица 2. Исследование фунции $f_1(x)$ с помощью производной

| $x$ | $(-\infty;x_1)$ | $x_1$ | $(x_1;x_0)$ | $x_0$ | $(x_0;\ x_2)$ | $x_2$ | $(x_2;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{b_2 > a_2}$ | | $x_1 = \frac{-a_2 b_1 - d\sqrt{a_2 b}}{b_2 - a_2}$ | | $x_0 = \frac{-a_2 b_1}{b_2 - a_2}$ | | $x_2 = \frac{-a_2 b_1 + d\sqrt{a_2 b}}{b_2 - a_2}$ | |
| $f'(x)$ | + | 0 | — | *Не сущ.* | + | 0 | — |
| *f(x)* | $\nearrow$ | $\frac{b_1(a_2 + b_2) - 2d\sqrt{a_2 b_2}}{b_1{}^2 - 4a_2 b_2}$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | $\frac{-b_1(a_2 + b_2) - 2d\sqrt{a_2 b_2}}{b_1{}^2 - 4a_2 b_2}$ | $\searrow$ |
| | | *Max* | | | | *Max* | |
| $\boldsymbol{b_2 < a_2}$ | | $x_1 = \frac{-a_2 b_1 + d\sqrt{a_2 b}}{b_2 - a_2}$ | | $x_0 = \frac{-a_2 b_1}{b_2 - a_2}$ | | $x_2 = \frac{-a_2 b_1 - d\sqrt{a_2 b}}{b_2 - a_2}$ | |
| $f'(x)$ | + | *0* | — | *Не сущ.* | + | *0* | — |
| *f(x)* | $\nearrow$ | $\frac{-b_1(a_2 + b_2) - 2d\sqrt{a_2 b}}{b_1{}^2 - 4a_2 b_2}$ | $\searrow$ | *0* | $\nearrow$ | $\frac{b_1(a_2 + b_2) - 2d\sqrt{a_2 b}}{b_1{}^2 - 4a_2 b_2}$ | $\searrow$ |
| | | *Max* | | | | *Max* | |

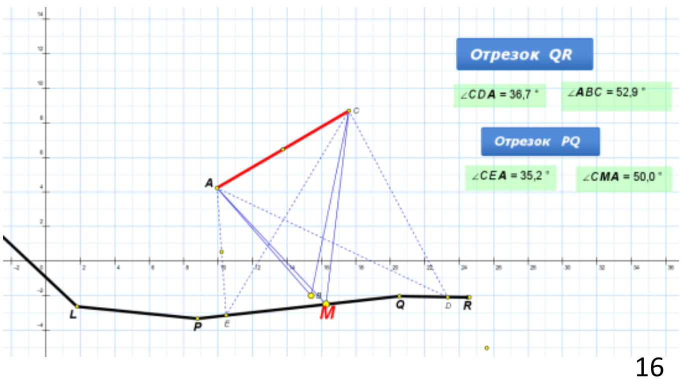
Получили тот же вывод, что и в п 2.1.2.

Нахождение значения функции в точках экстремума представлено в приложении Б.

## 2.2 Определение положения точки и максимального угла обозримости объекта при движении наблюдателя по траектории, являющейся ломанной или произвольной кривой

Используя геометрический метод, найдем оптимальную точку обзора в случае движения наблюдателя по ломанной. При данном расположение ломанной и отрезка *AB* точка, из которой отрезок виден под наибольшим углом может находиться либо на отрезке *PQ,* либо – *QR.* Строим окружность, проходящую через точки *AB* и касающуюся прямой *QR*. Точка касания - это точка *B,* но она лежит на продолжении отрезка *QR*. Точка касания окружности, проходящей через точки *A* и *B*, и прямой *PQ* является внутренней точкой отрезка *PQ.*

Все построения появляются при нажатии кнопки «Отрезок» (Рис.8)



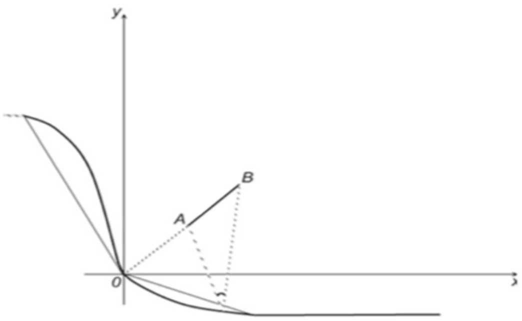






Рис.8

Рис.9

Если наблюдатель движется по плоской линии (Рис.9), которая не является графиком некоторой функции, то приближенно траекторию движения заменяем отрезками ломанной. При увеличении числа ломанных, получаем более точное решение задачи.

### 2.3 Определение положения точки и максимального угла обзора объекта при движении наблюдателя по траектории, заданной непрерывной функцией *y=f(x)*

Если обзор объекта ведется из точек графика какой-либо функции, то задачу можно сформулировать следующим образом:

Рис.10

Пусть материальная точка (автобус) движется по плоской непрерывной кривой, заданной функцией *y=f(x)*. Определим, в какой точке кривой угол обзора отрезка *AB* наибольший и определим его величину.

Пусть для определенности точки имеют координаты: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, произвольная точка кривой $X(x_1, f(x_1))$.

Тогда функцию cosα, монотонно зависящую от α выразим с помощью скалярного произведения: $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = |\overrightarrow{XA}| \cdot |\overrightarrow{XB}| cos\alpha$ (п.2.1).

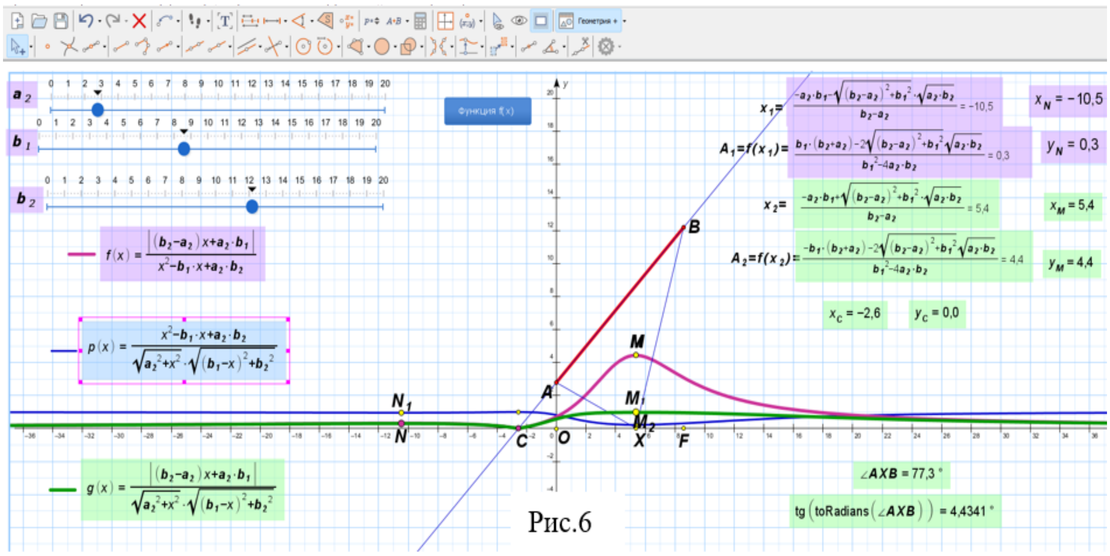



Рис.6

$$cos\alpha = g(x) = \frac{f^2(x) + x^2 - (x_1 + x_2)x - f(x)(y_1 + y_2) + x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - y_1)^2}\sqrt{(x - x_2)^2 + (f(x) - y_2)^2}}$$

С целью наглядности введем обозначения:

h(x)= $f^2(x) + x^2 - (x_1 + x_2)x - f(x)(y_1 + y_2) + x_1x_2 + y_1y_2$;

u(x)= $(x - x_1)^2 + (f(x) - y_1)^2$

v(x)= $(x - x_2)^2 + (f(x) - y_2)^2$.

Получим: $g(x) = \frac{h(x)}{\sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)}}$.

Экстремумы функции находим из условия: $g'(x) = 0$

$$g'(x) = \frac{h'(x)\sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)} - h(x)(\frac{u'(x)\sqrt{v(x)}}{2\sqrt{u(x)}} + \frac{v'(x)\sqrt{u(x)}}{2\sqrt{v(x)}}}{u(x)v(x)} \quad \text{или} \quad 2uvh' - vhu' - uhv' = 0 \qquad (3)$$

К примеру, решение задачи об наилучшем обзоре из точек параболы приведено на

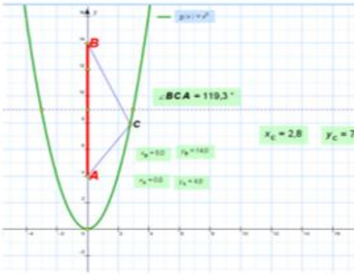


Рис. 11

Рис.11

*y*=$x^2$. *A(0,4); B(0;14).*

Уравнение 3 будет иметь вид:

*h(x)*= $x^4$ +$x^2 - 18x^2$+ *56;*

*u(x)*= $(x^2 - 4)^2$*;* .

*v(x)*= $(x^2 - 14)^2$

$$2(x^2 - 4)^2(x^2 - 14)^2(4x^3 - 17x^2) - (x^2 - 14)^2(x^4 + x^2 - 18x^2 + 56)\,(2x(x^2 - 4)^2) -$$
$$- (x^2 - 4)^2\,(x^4 + x^2 - 18x^2 + 56)\,(2x(x^2 - 14)^2) = 0$$

Вычислили с помощью компьютерных алгебраических систем приближенные значения абсцисс точек $x_1 \approx -2{,}79529$ и $x_2 \approx 2{,}79529$, в которых функция принимает наибольшее значение.

Эти значения совпали со значениями, вычисленными с помощью возможностей динамической программы «Математический конструктор».

Решение задачи об определении положения точки обзора и максимального угла, используя вычислительные методы, показано на карте местности усадьбы Архиповых (Пензенская область, Бессоновский район, село Проказна).

Например, искомая точка расположена на расстоянии 6,1см (на карте местности) от точки пересечения дороги и прямой, вдоль которой расположена церковь Архангела Михаила. Используя масштаб, определяем расстояние. Оно равно 73,2 м (Приложение С).

**Анализ полученных результатов и выводы**

Смоделирована задача о наилучшем обзоре неподвижного объекта наблюдателем, который находится в произвольной точке прямой.

Предложены аналитические и геометрические способы решения задачи, приведено их сравнение.

Рассмотрены решения задачи, когда наблюдение за объектом осуществляется из произвольной точки ломаной линии, графика определенной непрерывной функции и произвольно заданной кривой. Если кривая не является графиком некоторой функции, то для решения задачи предложен приближенный метод, основанный на разбиении траектории на отрезки ломанных.

Решена частная задача для квадратичной функции на основе представленной теории.

В приложении проиллюстрировано определение положения точки обзора и максимального угла на карте местности усадьбы Архиповых Пензенской области.

Задачи на выбор наилучшего варианта рассматриваемой ситуации – это уже настоящие исследовательские задачи, очень близкие по смыслу к задачам с параметром.

Трудность таких задач заключается в том, что не всегда есть готовые методы решения и задача может потребовать собственного подхода. Успех в решении задач подобного типа заключается в систематическом тренинге.

**Список источников:**

1. Актершев С.П. Задачи на максимум и минимум. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. − 192 с.
2. Васильева Н. Б. и Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые. – М.: Изд-во МЦНМО, 2020. − 128с.
3. Зетель С. И. Задачи на максимум и минимум. – М.: Гостехиздат, 1948. − 32 с.
4. Мерзляк А.Г., Номировский Д.А. и др / под ред. Подольского В.Е. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Учебник. Углубленный уровень. – М.: Просвещение, 2024. − 480с.
5. Хансбергер Р. Математические изюминки. – М.: Наука 1992. − 176. с

*Задача 4*. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок $AB$ виден под данным углом $\alpha$.

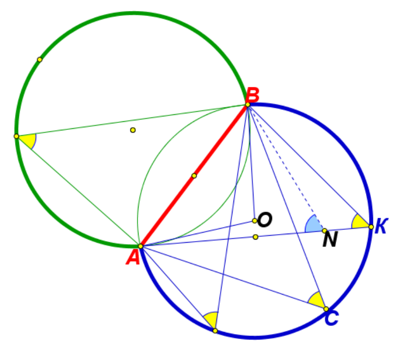



Рис.12

*Решение*

Ясно, что искомое множество симметрично относительно прямой $AB$, то достаточно рассмотреть точки по одну сторону от прямой. Достаточно построить равнобедренный треугольник $AOB$ с углом при вершине, равным $2\alpha$ и описать окружность с центром в точке $O$ и радиусом $OA$ (Рис.12).

Пусть точка $C$ произвольная точка дуги $AB$, которая лежит в одной полуплоскости с точкой $O$. Тогда угол $ACB = \alpha$. Из всех точек дуги $ACB$ (отличных от $A$ и $B$) отрезок $AB$ виден под данным углом по теореме о вписанных углах.

Обратно, пусть точка $N$ такова, что $\angle ANB = \alpha$. Преположим, что при этом точки $N$ и $C$ лежат по одну сторону от прямой $AB$. Докажем, что точка $N$ лежит на первой из построенных дуг. Допустим, что это не так. Если точка $N$ расположена внутри окружности, то продолжив отрезок $AN$ за точку $N$, получим точку $K$ пересечения луча $AN$ с окружностью. Тогда $\angle AKB = \angle ACB = \angle ANB$, что невозможно, т.к. $ANB$ — внешний угол треугольника $BKN$, а тогда $\angle ANB = \angle AKB + \angle KBN > \angle AKB$.

Аналогично для случая, когда точка $N$ лежит вне окружности.

Рассуждения для точек, лежащих на второй дуге, симметричной первой относительно прямой $AB$, аналогичные.

Таким образом, мы доказали, что из каждой точки построенных дуг (кроме $A$ и $B$) отрезок $AB$ виден под углом $\alpha$, и обратно, если из какой-то точки отрезок $AB$ виден под углом $\alpha$, то эта точка лежит на одной из построенных дуг.

Ответ: Дуги двух равных окружностей с общей хордой (без концов этой хорды).

Рассмотрим функцию: $f_1(x)=\frac{|x(b_2-a_2)+a_2b_1|}{x^2-b_1x+a_2b_2}$ и найдем ее значения в точках

$x_1$=$\frac{-a_2b_1-d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2}$ и $x_2$=$\frac{-a_2b_1+d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2}$

Пусть $b_2>a_2$ и $x_2$=$\frac{-a_2b_1+d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2}$, $x_2\in[\frac{-a_2b_1}{b_2-a_2};+\infty;)$.

Тогда $f(x)=\frac{-a_2b_1+d\sqrt{a_2b_2}+a_2b_1}{\left(\frac{-a_2b_1+d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2}\right)^2-b_1\left(\frac{-a_2b_1+d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2}\right)+a_2b_2}=$

$$=\frac{d\sqrt{a_2b_2}(b_2-a_2)^2}{(a_2b_1)^2-2da_2b_1\sqrt{a_2b_2}+d^2a_2b_2-b_1(b_2-a_2)(-a_2b_1+d\sqrt{a_2b_2})+(b_2-a_2)^2a_2b_2}=$$

$$\frac{d\sqrt{a_2b_2}(b_2-a_2)^2}{(a_2b_1)^2-2da_2b_1\sqrt{a_2b_2}+d^2a_2b_2+a_2{b_1}^2b_2-(a_2b_1)^2-db_1b_2\sqrt{a_2b_2}+da_2b_1\sqrt{a_2b_2}+(b_2-a_2)^2a_2b_2}=$$

$$\frac{d\sqrt{a_2b_2}(b_2-a_2)^2}{-db_1\sqrt{a_2b_2}(a_2+b_2)+a_2b_2\left(d^2+{b_1}^2+(b_2-a_2)^2\right)}=\frac{d\sqrt{a_2b_2}(b_2-a_2)^2}{d\sqrt{a_2b_2}(-b_1(a_2+b_2)+2\sqrt{a_2b_2}d)}=\frac{(b_2-a_2)^2}{(-b_1(a_2+b_2)+2\sqrt{a_2b_2}d)}=$$

$$=\frac{(b_2-a_2)^2(a_2b_1(a_2+b_2)+2\sqrt{a_2b_2}d)}{(-b_1(a_2+b_2)+2\sqrt{a_2b_2}d)(b_1(a_2+b_2)+2\sqrt{a_2b_2}d)}=\frac{(b_2-a_2)^2(a_2b_1(a_2+b_2)+2\sqrt{a_2b_2}d)}{-{b_1}^2(a_2+b_2)^2+4a_2b_2d^2}=$$

$$\frac{(b_2-a_2)^2(a_2b_1(a_2+b_2)+2\sqrt{a_2b_2}d)}{-{b_1}^2(a_2+b_2)^2+4a_2b_2{b_1}^2+4a_2b_2(b_2-a_2)^2}=\frac{(b_2-a_2)^2(a_2b_1(a_2+b_2)+2\sqrt{a_2b_2}d)}{-{b_1}^2(b_2-a_2)^2+4a_2b_2(b_2-a_2)^2}=\frac{a_2b_1(a_2+b_2)+2d\sqrt{a_2b_2}}{-{b_1}^2+4a_2b_2}=$$

$$\frac{-a_2b_1(a_2+b_2)-2d\sqrt{a_2b_2}}{{b_1}^2-4a_2b_2}$$

Если $x_1$=$\frac{-a_2b_1-d\sqrt{a_2b_2}}{b_2-a_2}$, то получим $f(x)=\frac{a_2b_1(a_2+b_2)-2d\sqrt{a_2b_2}}{{b_1}^2-4a_2b_2}$

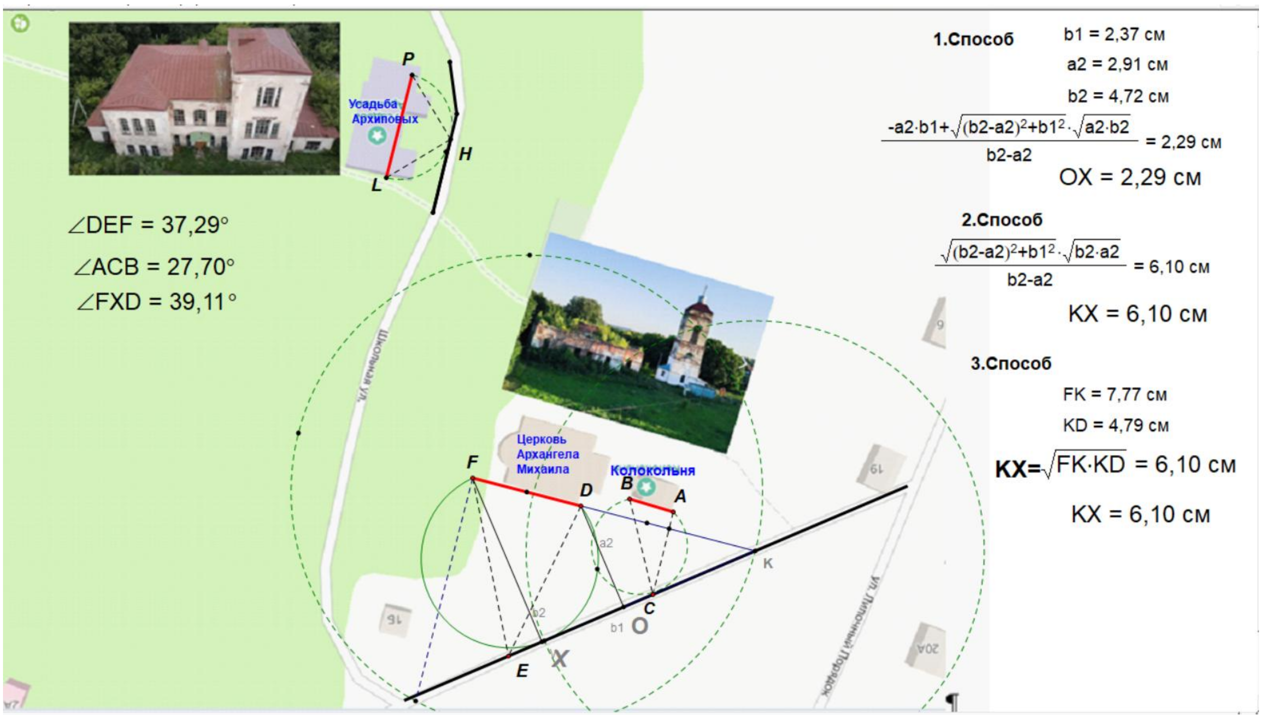
Приложение С Точка обзора

Имея карту местности с дорогой и с усадьбой, то положение точки на обочине дороги для наилучшего обозрения церкви Архангела Михаила можно найти следующим образом:

1. Из точки $D$ опустить перпендикуляр $DO$ на прямую. От точки О на расстоянии, равном $\frac{-a_2 b_1+\sqrt{(b_2-a_2)^2+b_1^2}\cdot d\sqrt{a_2 b_2}}{b_2-a_2}$, строим точку $X$.

2. Найти точку пересечения дороги и прямой $AB$ и от нее отложить отрезок, равный отрезку $\frac{\sqrt{(b_2-a_2)^2+b_1^2}\cdot d\sqrt{a_2 b_2}}{b_2-a_2}=KX.$

3. Построить окружность, проходящую через $A$ и $B$ и касающуюся прямой. Это классическая задача на построение циркулем и линейкой рассмотрена выше.




Используя масштаб карты, получим, что расстояние от точки $K$ до $X$ на карте равно 6,1см, на местности *73,2 м*. Угол наибольшего обзора церкви равен $39{,}11^0$.

Расстояние от точки К до точки наилучшего обзора колокольни на карте равно 3,6 см, на местности *43.2* м. Угол наилучшего обзора колокольни равен $31{,}25^0$.

Точка наилучшего обзора усадебного дома Архиповых находится на расстоянии 20,8м от пересечения дорог. На карте расстояние от пересечения дорог до точки Н равно 1,73 см. Угол *PHL* равен $88^0$.

**РЕЦЕНЗИЯ**
**на научно-исследовательскую работу**
**Краснова Павла Максимовича**
**( секция Математика)**
**«Оптимальный выбор точки»**

Научно-исследовательская работа посвящена актуальной проблеме – определению положения (определенной точки) на линии, из которой неподвижный объект виден под максимальным углом, а также величины этого угла.

Основной целью представленной работы было знакомство с некоторыми методами решения задач на оптимизацию и нахождение наиболее рационального способа для конкретного примера.

Новизна исследования состоит в том, что различными методами определены координаты точки на прямой, графике определенной непрерывной функции и на произвольно заданной кривой, из которой неподвижный объект виден под максимальным углом, а также значение этого угла.

Практическое значение работы состоит в возможности применения ее результатов в вопросах наилучшей наблюдаемости объекта в военном деле, строительстве, в организации охраны, проблемах размещения смотровых площадок.

Рекомендации: продолжить работу над исследованием с целью дальнейшего обобщения задачи. В частности, рассмотреть движение точки по окружности и линии второго порядка; в качестве наблюдаемого объекта рассмотреть различные виды треугольников, четырехугольников, параллелепипед.

Считаю, что исследовательская работа «Оптимальный выбор точки» может быть представлена для участия в научно-практической конференции.

Рецензент:

Учитель математики Ю.Шиф. Животкова Ю.В.