VII открытый региональный конкурс
исследовательских и проектных работ школьников

«Высший пилотаж - Пенза» 2025

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа
с углубленным изучением информатики № 68 г. Пензы

«Применение метода определителей для решения систем уравнений с параметром»

Выполнил:
Потанин Михаил Алексеевич,
ученик 11А класса МБОУ СОШ
с углубленным изучением информатики
№ 68 г. Пензы

Научный руководитель:
Богомолова Ольга Петровна,
учитель математики

Пенза, 2025 г.

Содержание

1. Введение

Различные задачи с параметрами в настоящее время изучаются в школьном курсе математики и введены в ЕГЭ по математике. До сих пор их освоение вызывает затруднения в большей или меньшей степени у учащихся. Это объясняется и большим разнообразием типов и методов решения и сложностью самих задач. В данной работе рассматривается метод определителей, который позволяет упростить решение определенного вида задач с параметрами.

Новизна работы заключается в том, что данный метод не входит в стандартную программу изучения математики в средней школе, но его можно применять для решения определенного класса задач, которые изучаются по программе.

Гипотеза исследования: метод определителей существенно оптимизирует процесс решения линейных систем уравнений и систем уравнений с параметром, сводящимся к линейным.

Объект исследования: системы линейных уравнений с двумя переменными и системы уравнений, сводящиеся к ним.

Предмет исследования: метод определителей.

Цели работы:

1) исследовать конкретный тип задач с параметром: решение линейных систем уравнений с двумя неизвестными и систем, сводящимся к линейным системам, методом определителей;

2) показать, что метод определителей существенно упрощает решение таких задач и позволяет их алгоритмизировать.

Задачи работы:

1) изучить метод определителей;

2) рассмотреть варианты применения этого метода для решения линейных систем уравнений и систем уравнений, сводящимся к ним;

3) применить графическую интерпретацию для решения систем уравнений с параметром;

4) обобщить полученные знания и сформулировать алгоритм решения изучаемых систем уравнений методом определителей.

2. Теоретическая часть

Справочный материал (метод определителей)

2.1. Определение линейных систем двух уравнений с двумя переменными

Система вида $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, (1)

где $a_1^2+b_1^2\neq 0$ и $a_2^2+b_2^2\neq 0$ называется линейной системой двух уравнений с двумя неизвестными.

Линейная система (1) может либо иметь единственное решение, либо иметь бесконечно много решений, либо не иметь решений.

Основные методы решения системы (1) – метод подстановки, метод исключения неизвестного и метод определителей.

В дальнейшей нашей работе будет рассматриваться только один из методов решения системы (1) – это метод определителей.

2.2. Определение матриц системы и их определителей

Запишем таблицу, составленную из коэффициентов при неизвестных в системе (1).

$A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}$ - основная матрица системы; $B_x = \begin{pmatrix} c_1 b_1 \\ c_2 b_2 \end{pmatrix}$ - матрица системы по переменной *x*; $B_y = \begin{pmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{pmatrix}$ - матрица системы по переменной *y*.

Таблицы B_x и B_y составляются соответствующей заменой коэффициентов *a* и *b* на коэффициенты *c*.

Если матрица содержит *n* строк и *m* столбцов, то говорят, что она имеет размерность *n* x *m*. Если *n*=*m*, то матрица называется квадратной.

Число строк (а следовательно, и число столбцов квадратной матрицы) называется порядком матрицы.

Для квадратной матрицы вводится понятие определителя матрицы, обозначаемый символом det A, det Bx, det By. (детерминанты)

Определителем матрицы 2-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}$ называется число, вычисляемое по следующему правилу:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \;;\; \det B_x = \begin{vmatrix} c_1 b_1 \\ c_2 b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1 ;\; \det B_y = \begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

2.3. Количество решений системы уравнений в зависимости от различных условий

I). Для того, чтобы система имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$. В этом случае решение находится по формулам: $x = \dfrac{\det B_x}{\det A}$; $y = \dfrac{\det B_y}{\det A}$. Эти формулы называются формулами Крамера. (Крамер. Г. (1704-1752) – швейцарский математик).

(Если a_1, b_1, a_2, b_2 отличны от нуля, то условие $\det A \neq 0$ эквивалентно условию $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$).

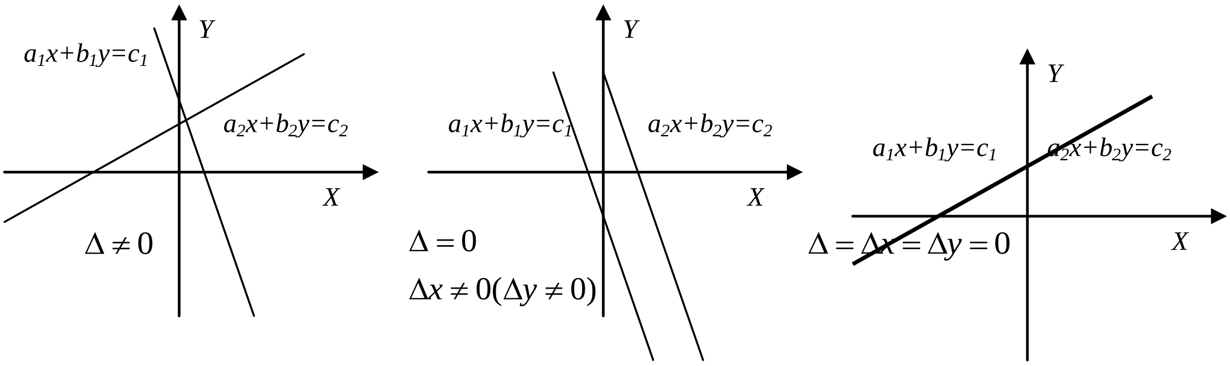
II). Для того чтобы система не имела решений, необходимо и достаточно, чтобы $\det A = 0$ и хотя бы один из определителей $\det B_x$ или $\det B_y$ был отличен от нуля.

(Если a_1, b_1, a_2, b_2 отличны от нуля, то условие $\det A = 0$, $\det B_x \neq 0$ ($\det A = 0, \det B_y \neq 0$) эквивалентно условию $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$).

III). Для того чтобы система имела бесконечно много решений, необходимо и достаточно, чтобы $\det A = \det B_x = \det B_y = 0$.

(Если a_1, b_1, a_2, b_2 отличны от нуля, то условие $\det A = \det B_x = \det B_y = 0$ эквивалентно условию $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ с учётом ограничений коэффициентов системы (1)).

Уравнения системы (1) можно истолковать как уравнения двух прямых на плоскости, а задачу решения системы – как задачу об отыскании точки пересечения этих прямых. Возможны три случая: 1) данные две прямые пересекаются; этот случай отвечает определённой системе; 2) данные две прямые параллельны; этот случай соответствует несовместной системе; 3) данные прямые совпадают; этот случай соответствует неопределённой системе: каждая точка «дважды заданной» прямой будет решением системы. [3, стр.180-181].



<u>Пример № 1</u> [3, стр. 181]

Вычислить следующие определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

<u>Решение:</u>

а) по определению имеем $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$=7·5 – 2·5 = 21 – 10 = 11;

б) по определению имеем $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha \cdot \sin\alpha - \cos\alpha \cdot (-\cos\alpha) =$

$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Ответ: а) 11; б) 1.

<u>Пример № 2</u>

Систему $\begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 10x + 7y = 3 \end{cases}$ решить с помощью определителей.

<u>Решение:</u>

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = 35 + 20 = 55;$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 49 + 6 = 55;$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 70 = -55;$

$x = \frac{55}{55} = 1; y = \frac{-55}{55} = 1.$

Ответ: x=1; y=-1.

3. Практическая часть

3.1. Решение линейных систем с параметром

Пример № 3 [1, стр. 103].

Найти все значения *a*, при которых система имеет единственное решение: $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ ax + y = -3 \end{cases}$

Решение:

Система имеет единственное решение, если $\det A \neq 0$, т.е. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2a \neq 0;$ $a \neq -\frac{3}{2}$

Ответ: система имеет единственное решение при $a \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}; +\infty)$.

Пример № 4 [1, стр. 103].

Найти все значения *a*, при которых система имеет бесконечно много решений: $\begin{cases} x + 2ay = 1 \\ (a-1)x + 4y = 2a - 3 \end{cases}$.

Решение:

Поскольку $1^2 + 4a^2 \neq 0, (a-1)^2 + 4^2 \neq 0$ и $\det B_x = \begin{vmatrix} 1 & 2a \\ 2a-3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4a^2 + 6a$;

$\det B_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a-1 & 2a-3 \end{vmatrix} = a - 2; \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2a \\ a-1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2a^2 + 2a$, то

$\det A = 0$

1) $-2a^2 + 2a + 4 = 0$

$a_1 = 2; a_2 = -1$

2) $\det B_x = 0$

$-4a^2 + 6a + 4 = 0$

$a_1 = 2; a_2 = -\frac{1}{2}$

$\det B_y = 0$

3) $a - 2 = 0$

$a = 2$

4) учитывая условия $\det A = \det B_x = \det B_y = 0, a = 2$

* Этот пример аналогичен задаче: найти все значения *a*, при которых прямые $x + 2ay = 1$ и $(a-1)x + 4y = 2a - 3$ параллельны.

Ответ: при *a*=2 – система имеет бесконечно много решений.

Ответ:* при *a*=2 – прямые параллельны (не имеют общих точек).

Пример № 5 [1, стр.103].

Найти все значения параметра *a*, при которых система не имеет решений: $\begin{cases} a^2 x + (2-a)y = 4 + a^2 \\ ax + (2a-1)y = a^5 - 2 \end{cases}$

Решение:

$\det B_x = 0$

$$\det B_y = \begin{vmatrix} a^2 & 4+a^2 \\ a & a^5-2 \end{vmatrix} = a^7 - a^3 - 2a^2 - 4a \neq 0$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a^2 & 2-a \\ a & 2a-1 \end{vmatrix} = 2a^3 - 2a = 0$$

$a = 0$ или $a = \pm 1$

Ответ: система не имеет решений при $a = \pm 1$.

<u>Пример № 6</u> [1, стр. 101].

Для каждого a решить систему $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$

<u>*Решение:*</u>

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

$$\det B_x = \begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 1$$

$$\det B_y = \begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - a^2$$

1) $\det A \neq 0$ и система имеет единственное решение при $a \neq \pm 1$

$$x = \frac{a^3-1}{a^2-1} = \frac{a^2+a-1}{a+1}; y = \frac{a-a^2}{a^2-1} = \frac{-a}{a+1}$$

2) $\det A = \det B_x = \det B_y = 0$ и система имеет бесконечно много решений при $a = 1$, тогда $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ и $x = t$, $y = 1 - t$, где $t \in R$

3) $\det A = 0$ и $\det B_y \neq 0$ и система не имеет решений при $a = -1$

Ответ: при $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ - единственное решение:

$$x = \frac{a^2+a+1}{a+1}; y = \frac{-a}{a+1};$$

при $a = 1$ – бесконечно много решений: $x = t$, $y = 1 - t$, где $t \in R$;

при $a = -1$ – система не имеет решений.

<u>Пример № 7</u> [1,стр. 102].

Найти все значения a, при которых решения системы удовлетворяют условию $x < 0$ и $y < 0$: $\begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ 5x - ay = 2 \end{cases}$

<u>*Решение:*</u>

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -a \end{vmatrix} = -3a + 30, -3a + 30 \neq 0 (т.к. \det A \neq 0); a = 10$

$\det B_x = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -a \end{vmatrix} = -a + 12$

$\det B_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-a+12}{-3a+30} \\ y = \dfrac{1}{-3a+30} \end{cases}$$

$x < 0$, $y < 0$ – по условию.

$$\begin{cases} \dfrac{-a+12}{-3a+30} < 0 \\ \dfrac{1}{-3a+30} < 0 \end{cases}$$

* Данную задачу можно сформулировать иначе: найти все значения *a*, при которых прямые $3x$-$6y$=1 и $5x$-ay=2 пересекаются в III четверти.

1) $\dfrac{-a+12}{-3a+30} < 0$

1. $-a + 12 = 0$; $-3a + 30 = 0$

$a = 12$ $a = 10$

2.

$a \in (10;12)$

2) $\dfrac{1}{-3a+30} < 0$

1. $a = 10$

2.

$a \in (10;+\infty)$

3)

$a \in (10;12)$

Ответ: при $a \in (10;12)$ решения системы удовлетворяют условию $x < 0$ и $y < 0$.

**Ответ:* при $a \in (10;12)$ прямые пересекаются в III четверти.

Пример № 8 [3, стр. 182].

Исследовать систему $\begin{cases} (a-1)x + (2a-3)y = a+2 \\ (a+1)x + (a+3)y = 3a+1 \end{cases}$

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} a-1 & 2a-3 \\ a+1 & a+3 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 3 + 2a^2 + a + 3 = -a^2 + 3a$$

$$\det B_x = \begin{vmatrix} a+2 & 2a-3 \\ 3a+1 & a+3 \end{vmatrix} = a^2 + 5a + 6 - 6a^2 + 7a + 3 = -5a^2 + 12a + 9$$

$$\det B_y = \begin{vmatrix} a-1 & a+2 \\ a+2 & 3a+1 \end{vmatrix} = 3a^2 - 2a - 1 - a^2 - 3a - 2 = 2a^2 - 5a - 3$$

1) det$A$=0
   $-a^2 + 3a = 0$
   $a_1 = 0$ и $a_2 = 3$
2) detB_x=0
   $-5a^2 + 12a + 9 = 0$
   $a_1 = -0{,}6$ и $a_2 = 3$
3) detB_y=0
   $2a^2 + 5a - 3 = 0$
   $a_1 = -1/2$ и $a_2 = 3$

* Условие этой задачи можно сформулировать иначе. Найти все значения *а*, при которых прямые *(a-1)x+(2x-3)y=a+2* и *(a+1)x* + *(a-3)y* = *3a+1*:

а) не имеют общих точек;

б) совпадают;

в) пересекаются в одной точке.

Учитывая условия пункта 3.3., сформулируем ответ.
Ответ: а) при $a = 0$ – система не имеет решений;
б) при $a = 3$ – система имеет бесконечно много решений;
в) при $a \in (-\infty;0) \cup (0;3) \cup (3;+\infty)$ - система имеет единственное решение.
* И тогда *ответ* можно записать так:
а) при $a = 0$ – не имеют общих точек;
б) при $a = 3$ – прямые совпадают;
в) при $a \in (-\infty;0) \cup (0;3) \cup (3;+\infty)$ - прямые пересекаются в одной точке.

3.2. Решение линейных систем с модулем

Пример № 9 [1, стр. 105].

При всех значениях параметра *а* решить систему: $\begin{cases} |a|x - y = 1 \\ x + |a|y = a \end{cases}$

Решение:

1) Если $a = 0$, то $\begin{cases} 0x - y = 1 \\ x + 0y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$

2) Пусть $a > 0$, тогда исходная система равносильна системе $\begin{cases} ax - y = 1 \\ x + ay = a \end{cases}$

$$\det A=\begin{vmatrix}|a| & -1\\ 1 & |a|\end{vmatrix}=a^2+1,$$

$$\det B_x=\begin{vmatrix}1 & -1\\ a & |a|\end{vmatrix}=a+a=2a,$$

$$\det B_y=\begin{vmatrix}|a| & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}=a^2-1.$$

Система имеет единственное решение (т.к. $a2+1\neq 0$ ни при каких a) $x=\dfrac{2a}{a^2+1}; y=\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$

3) Пусть $a<0$, тогда исходная система равносильна системе $\begin{cases}-ax-y=1\\ x-ay=a\end{cases}$

$$\det A=\begin{vmatrix}-a & -1\\ 1 & -a\end{vmatrix}=a^2+1,$$

$$\det B_x=\begin{vmatrix}1 & -1\\ a & -a\end{vmatrix}=-a+a=0,$$

$$\det B_y=\begin{vmatrix}-a & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}=-a^2-1=-(a^2+1).$$

Единственное решение $x=\dfrac{0}{a^2+1}=0; y=\dfrac{-(a^2+1)}{a^2+1}=-1$

Ответ: при $a>0$ $x=\dfrac{2a}{a^2+1}; y=\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$

при $a\leq 0$ $x=0; y=-1$

<u>Пример № 10</u> [1, стр. 106].

При всех значениях параметра a решить систему:

$$\begin{cases}x+y=1\\ a|x|-y=1\end{cases}\Rightarrow x\geq 0\begin{cases}x+y=1\\ ax-y=1\end{cases}$$

<u>Решение:</u>

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a & -1\end{vmatrix}=-1-a,$$

$$\det B_x=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1-1=-2,$$

$$\det B_y=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a & 1\end{vmatrix}=1-a.$$

Единственное решение: $x=\dfrac{-2}{-1-a}=\dfrac{2}{a+1}; y=\dfrac{1-a}{-1-a}$ при $a\neq -1$ и

$\dfrac{2}{a+1}\geq 0\Rightarrow a\geq -1$ (при $a>-1$ $x=\dfrac{2}{a+1}; y=\dfrac{a-1}{a+1}$).

Нет решений: $\det A=-1-a=0\Rightarrow a=-1.$

Бесконечного множества решений нет, т.к. $\det B_x = -2$. $x<0 \begin{cases} x+y=1 \\ -ax-y=1 \end{cases}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a & -1 \end{vmatrix} = -1+a,$$

$$\det B_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1=-2,$$

$$\det B_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a & 1 \end{vmatrix} = 1+a.$$

Единственное решение: $x=\dfrac{-2}{a-1}; y=\dfrac{a+1}{a-1}$ при $\dfrac{-2}{a-1}<0 \Rightarrow a-1>0, a>1$

Бесконечного множества решений нет, т.к. $\det B_x = -2 \neq 0$

Ответ: при $a \in (-\infty; -1]$ - нет решений;

при $a \in (-1;1]$ - $x=\dfrac{2}{a+1}; y=\dfrac{a-1}{a+1};$

при $a \in (1;+\infty)$ - $x_1=\dfrac{2}{a+1}; y_1=\dfrac{a-1}{a+1};$

$$x_2=\frac{2}{-a+1}; y_2=\frac{a+1}{a-1};$$

3.3. Решение систем уравнений с двумя переменными с параметром, сводящихся к линейным системам с двумя переменными

<u>Пример № 11</u> [7, № 1234].

Решить систему уравнений для всех a $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=a \end{cases}$

<u>Решение:</u>

Пусть $\begin{cases} \sqrt{x}=m \\ \sqrt{y}=n \end{cases}, \begin{cases} m\geq 0 \\ n \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} m-n=1 \\ n+m=a \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1=2\neq 0,$$

$$\det B_m = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1+a,$$

$$\det B_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a-1.$$

$$\begin{cases} m=\dfrac{1+a}{2} \\ n=\dfrac{a-1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1+a}{2}\geq 0 \\ \dfrac{a-1}{2}\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1+a}{2}=\sqrt{x} \\ \dfrac{a-1}{2}\geq\sqrt{y} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{(1+a)^2}{4} \\ y=\dfrac{(a-1)^2}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq -1 \\ a \geq 1 \end{cases}$$

$a \in [1;+\infty)$

Ответ: 1) при $a \geq 1$ $x = \dfrac{(a+1)^2}{4}; y = \dfrac{(a-1)^2}{4}$;

2) при $a < 1$ – нет решений.

<u>Пример № 12</u> [4, стр. 175].

Найти множество значений a, при которых система не имеет решений:

$$\begin{cases} 3 \cdot 5^{y^2} + 2|x| = 21 - a \\ 5^{1+y^2} - 3|x| = 11a + 16 \end{cases}$$

<u>Решение:</u>

Пусть $\begin{cases} |x| = u \\ 5^{y^2} = v \end{cases}, \begin{cases} u \geq 0 \\ v \geq 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3v + 2u = 21 - a \\ 5v - 3u = 11a + 16 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 10 = -19,$$

$$\det B_v = \begin{vmatrix} 21 - a & 2 \\ 11a + 16 & -3 \end{vmatrix} = -61 + 3a - 22a - 32 = -95 - 19a,$$

$$\det B_u = \begin{vmatrix} 3 & 21 - a \\ 5 & 11a + 16 \end{vmatrix} = 33a + 48 - 105 + 5a = 38a - 57.$$

$$\begin{cases} v = \dfrac{-95 - 19a}{-19} \\ u = \dfrac{38a - 57}{-19} \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{-95 - 19a}{-19} \geq 1, (1) \\ \dfrac{38a - 57}{-19} \geq 0, (2) \end{cases}$$

(1) $\dfrac{-95 - 19a}{-19} - 1 \geq 0$

$\dfrac{76 + 19a}{19} \geq 0$

$4 + a \geq 0$

$a \geq -4$

(2) $\dfrac{38a - 57}{-19} \geq 0$

$-2a + 3 \geq 0$

$-2a \geq -3$

$a \leq 3/2$

$$\begin{cases} a \geq -4 \\ a \leq 3/2 \end{cases}$$

при $a \in [-4; 3/2]$ - единственное решение, значит при $a \in [-\infty; -4] \cup (3/2; +\infty)$ - система не имеет решений.

Ответ: при $a \in [-\infty; -4] \cup (3/2; +\infty)$ - система не имеет решений.

<u>Пример № 13</u> [8, стр. 310, №12].

Найти все значения a, при которых сумма $\alpha_1^2+\alpha_2^2$, где $x=\alpha_1$ и $y=\alpha_2$ - решение системы $\begin{cases}3x-y=2-a\\ x+2y=a+1\end{cases}$, будет наименьшей.

Решение:

$$\det A=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6+1=7,$$

$$\det B_x=\begin{vmatrix}2-a & -1\\ a+1 & 2\end{vmatrix}=4-2a+a+1=-a+5,$$

$$\det B_y=\begin{vmatrix}3 & 2-a\\ 1 & a+1\end{vmatrix}=3a+3-2+a=4a+1.$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{-a+5}{7}\\ y=\dfrac{4a+1}{7}\end{cases};\quad \begin{cases}\alpha_1=\dfrac{-a+5}{7}\\ \alpha_2=\dfrac{4a+1}{7}\end{cases}$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2=\left(\frac{-a+5}{7}\right)^2+\left(\frac{4a+1}{7}\right)^2=\frac{17a^2-2a+26}{49}$$

Введём новое обозначение:

$$f(a)=\frac{17a^2-2a+26}{49}$$

$$f(a)=\frac{17}{49}a^2-\frac{2}{49}a+\frac{26}{49}$$

Функция *f(a)* - квадратичная функция; график - парабола, ветви которой направлены вверх, т.к. коэффициент при a^2 равен $\frac{17}{49}>0$.

Чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо и достаточно, определить первую координату вершины параболы: $a_0=-\dfrac{-\frac{2}{49}}{2\cdot\frac{17}{49}}=\dfrac{1}{17}$

Ответ: при $a=\dfrac{1}{17}$ сумма $\alpha_1^2+\alpha_2^2$ будет наименьший.

Пример № 14. [4, стр. 205 № 40].

Найти x^2+y^2, если $\begin{cases}|2x-2|+2^{\sqrt{y-2}}=2-a\\ 2^{1+\sqrt{y-2}}-|x-1|=3a-1\end{cases}$

Решение:

Пусть $\begin{cases}2^{\sqrt{y-2}}=m\\ |x-1|=n\end{cases}$, $\begin{cases}m\ge 1\\ n\ge 0\end{cases}$

$$\begin{cases}2n+m=2-a\\ 2m-n=3a-1\end{cases}\qquad \begin{cases}m+2n=2-a\\ 2m-n=3a-1\end{cases}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-4=-5$$

$$\det B_x=\begin{vmatrix}2-a & 2\\ 3a-1 & -1\end{vmatrix}=-2+a-6a+2=-5a$$

$$\det B_y=\begin{vmatrix}1 & 2-a\\ 2 & 3a-1\end{vmatrix}=3a-1-4+2a=5a-5$$

$$\begin{cases}m=\dfrac{-5a}{-5}\\ n=\dfrac{5a-5}{-5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=a\\ n=-a+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a\ge 1\\ 1-a\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\ge 1\\ a\le 1\end{cases}\Leftrightarrow a=1$$

Итак, $\begin{cases}m=1\\ n=0\end{cases}$

$$\begin{cases}2^{\sqrt{y-2}}=1\\ |x-1|=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$$

$$x^2+y^2=1+4=5$$

Ответ: $x^2+y^2=5$

<u>Пример № 15</u> [4, стр. 206, № 44].

При каких значениях a система уравнений $\begin{cases}6\cdot 2^{x^2}+2=4a-\sin y\\ 5\sin y+10=a+2^{3+x^2}\end{cases}$ не совместна

<u>Решение:</u>

Пусть $\begin{cases}2^{x^2}=t\\ \sin y=m\end{cases}$, $\begin{cases}t\ge 1\\ -1\le m\le 1\end{cases}$

$$\begin{cases}6t+2=4a-m\\ 5m+10=a+8t\end{cases}\qquad\begin{cases}6t+m=4a-2\\ -8t+5m=a-10\end{cases}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}6 & 1\\ -8 & 5\end{vmatrix}=30+8=38$$

$$\det B_t=\begin{vmatrix}4a-2 & 1\\ a-10 & 5\end{vmatrix}=20a-a+10-10=19a$$

$$\det B_m=\begin{vmatrix}6 & 4a-2\\ -8 & a-10\end{vmatrix}=6a-60+32a-16=38a-76$$

$$\begin{cases}t=\dfrac{19a}{38}\\ m=\dfrac{38a-76}{38}\end{cases}\qquad\begin{cases}t=\dfrac{a}{2}\\ m=a-2\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{a}{2}\ge 1\\ -1\le a-2\le 1\end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 2 \\ 1 \leq a \leq 3 \end{cases}$$

$a \in [2;3]$ - при таких a система имеет единственное решение. Значит, система не совместна (не имеет решения) при $a \in (-\infty;2) \cup (3;+\infty)$.

Ответ: при $a \in (-\infty;2) \cup (3;+\infty)$ - система не совместна.

4. Вывод

Таким образом, на основе рассмотренных примеров можно сказать, что задача такого типа не представляют особой трудности для учащихся, если в достаточной степени овладеть методом определителей. Этот метод позволяет существенно оптимизировать процесс решения систем уравнений с параметром.

Итак, можно выделить основные этапы решения (алгоритм):

1.1) привести систему к стандартному виду (1);

1.2) при необходимости сделать замену переменных и свести систему двух уравнений к линейной;

2) найти три определителя: $\det A, \det B_x, \det B_y$;

3) выделить случаи, когда система имеет бесконечно много решений, единственное решение или не совместна;

4.1) найти значения неизвестных;

4.2) при необходимости перейти к начальным переменным и найти их значения;

5) оценить значения параметра;

6) сформулировать ответ.

5. Задачи для самостоятельного решения

В Приложении 1 представлены задачи для самостоятельного решения.

6. Список литературы

1. Родионов Е.М. Справочник абитуриента (задачи с параметром). М.: МЦ «Аспект»,1992
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: «Наука», 1977.
3. Зайцев В.В., Рыжков В.В., Сканави М.И. Элементарная математика. Повторительный курс /Под ред. Рыжкова В.В. М.: «Наука», 1974./
4. Крамор В.С., Лунгу К.Н., Лунгу А.К. Математика: Типовые примеры на вступительных экзаменах. Пособие для старшекласников и абитуриентов. М.: АРКТИ, 2000.
5. Будак А.Б., Щедрин Б.М. Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы. М.: Издат. Отдел УНЦ ДО МГУ, 1997.
6. Галицкий М.Л. и др. Углубленное изучение алгебры и математического анализа. М.: Просвещение, 1997.
7. Литвиненко В.И., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. Учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. институтов. 2-ое изд. М.: Просвещение, 1991.
8. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И., М.: Наука, 1988.
9. Баврин И.И., Матросов В.Л. Общий курс высшей математики. М.: Просвещение, 1995.
10. http://nashol.com/knigi-po-matematike/ Книги по математике.

Рецензия

на научно-практическую работу **Потанина Михаила**, ученика 11«А» класса МБОУ СОШ с углубленным изучением информатики №68 **«Применение метода определителей для решения систем уравнений с параметром»**

Научное направление работы. Работа написана на актуальную тему и представляет собой учебное исследование, целями которого является изучение конкретного типа задач с параметром: решение линейных систем уравнений с двумя неизвестными и систем, сводящимся к линейным системам, методом определителей; а так же показать, что метод определителей существенно упрощает решение таких задач и позволяет их алгоритмизировать.

Научная новизна. Новизна работы заключается в том, что метод определителей не входит в школьную программу изучения математики, но его можно применять для решения определенного класса задач, которые изучаются по программе и представлены на экзамене.

Оценка достоверности результатов. Использованы методы научных исследований: теоретическое познание, наблюдение, системный подход, сравнительный анализ, аналитическая оценка.

Теоретическая значимость рецензируемой работы заключается в том, что на основе изученной научной литературы автор представил алгоритм решения данного вида задач с параметрами.

Практическая значимость определяется возможностью использования результатов исследования для оптимизации решения систем уравнений с двумя переменными с параметром методом определителей.

Формальная характеристика исследования. Стиль изложения лаконичен, содержание последовательно и структурно выдержано. Работа содержит предметный материал, соответствующий школьной программе.

Данная работа адресована учащимся, как основной школы, так и учащимся старших классов, может быть использована на факультативных занятиях, курсах по выбору, элективных курсах, в том числе и в профильных классах.

Общее заключение. Считаю, что рецензируемая работа имеет научно-практическую значимость и может быть представлена на научно-практическую конференцию «Высший Пилотаж 2025».

Рецензент

учитель математики высшей категории,

МБОУ СОШ с углубленным

изучением информатики № 68______________________**О.П.Богомолова**