Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

«Гимназия № 53»

Разностные уравнения для описания паутинной модели рынка

Выполнила Салитова Ангелина,

ученица 11 класса

Научный руководитель

Монахова Оксана Александровна

доцент кафедры «Математическое образование» ПГУ

Пенза, 2024

Оглавление

Введение

В работе рассматриваются некоторые вопросы, относящиеся к математической экономике. Известно, что математика позволяет экономистам формулировать и проверять гипотезы в отношении широкого круга экономических явлений. Описание многих их них без привлечения математического аппарата будет более сложным. Более того, противоречивая природа некоторых экономических явлений делает их исследование невозможным без использования математики. Значительная часть теоретико-экономических взаимосвязей нашла отражение в математических моделях. В представленной работе используются такие экономические понятия, как спрос, предложение, рыночное равновесие, модель рынка, ценовая политика.

Цель данной работы – провести математический анализ ценовой политики предприятия НПФ «КРУГ» (научно-производственная фирма «КРУГ») и дать рекомендации по установлению равновесной цены.

Задачи, поставленные и решённые в данной работе:

1) изучить понятие конечной разности функции;
2) познакомиться с некоторыми методами решений разностных уравнений;
3) рассмотреть математические модели некоторых основных экономических понятий: спроса и предложения;
4) изучить свойства спроса и предложения средствами математического анализа;
5) провести исследование ценовой политики предприятия НПФ «КРУГ» (научно-производственная фирма «КРУГ») с помощью описанных выше средств;
6) дать рекомендации для достижения рыночного равновесия.

Глава 1. Разностные уравнения

§ 1.1. Конечная разность функции

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на некотором множестве $M = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Допустим, область определения M удовлетворяет условиям

$$x_i = x_0 + ih,\ где\ i = 0, 1, 2, \ldots, h \in N.$$

Обозначим значения функции $f(x)$ в точке x_i множества M следующим образом

$$f(x_i) = f(x_0 + ih) = f_i.$$

Определение. Конечной разностью первого порядка функции $f(x)$ с шагом h в точке x_0 называется функция $\Delta_h f(x_0)$, удовлетворяющая равенству

$$\Delta_h f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Можно определить конечные разности функции $f(x)$ в точке x_0 и более высокого порядка. Например, конечная разность второго порядка

$$\Delta_h^2 f(x_0) = \Delta_h f(x_0 + h) - \Delta_h f(x_0)$$

или подробнее

$$\Delta_h^2 f(x_0) = f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0).$$

В общем виде конечная разность порядка k ($k \geq 1$) определяется равенствами

$$\Delta_h^k f(x_0) = \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f(x_0))$$

$$\Delta_h^0 f(x_0) = f(x_0)$$

Примеры:

1) $\Delta_1 a^x = (a-1)a^x$

2) $\Delta_1 \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)}$

§ 1.2 Разностные уравнения

Определение. Разностным уравнениям порядка k ($k \geq 1$) называется уравнение относительно искомой функции $f(x)$, содержащее конечные разности этой функции до порядка k включительно.

Примеры:

1) $\Delta_h f(x) = 2$ - разностное уравнение первого порядка.

2) $\Delta_h^2 f(x) - \Delta_h f(x) = 0$ - разностное уравнение второго порядка.

Используя определение конечной разности порядка *k*, обозначения веденные ранее, в общем виде разностное уравнение порядка *k* функции *f*(*x*) с постоянными коэффициентами запишется в виде:

$$f_{n+k} + C_1 f_{n+k-1} + C_2 f_{n+k-2} + \ldots + C_k f_n = a .$$

Если $a = 0$, то уравнение называется однородным, в противном случае неоднородным.

§ 1.3 Решение однородных разностных уравнений

Рассмотрим уравнение

$$f_{n+k} + C_1 f_{n+k-1} + C_2 f_{n+k-2} + \ldots + C_k f_n = 0 . \qquad (1.1)$$

Найдем частное решение уравнения (1.1) в виде геометрической прогрессии. Будем искать ненулевое решение (1.1). Подставив $f_n = \lambda^n$ в уравнение (1.1), получим уравнение относительно λ:

$$\lambda^k + C_1\lambda^{k-1} + C_2\lambda^{k-2} + \ldots + C_k = 0 . \qquad (1.2)$$

Уравнение (1.2) называется характеристическим уравнением для уравнения (1.1). Это уравнение имеет не более *k* корней.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ - корни характеристического уравнения (2). Решением уравнения (1.1) является функция *f*, определяемая последовательностью значений

$$f_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n + \ldots + \alpha_n\lambda_2^n ,$$

где коэффициентами α_i являются произвольные действительные числа, определяемые начальными значениями функции.

§ 1.4. Неоднородные разностные уравнения

Рассмотрим уравнение (1.1) в случае, когда правая часть *a* не равна 0.

Для нахождения решения перепишем данное уравнение для членов последовательности с номером на единицу больше, чем в исходном уравнении.

$$f_{n+k+1} + C_1 f_{n+k} + C_2 f_{n+k-1} + \ldots + C_k f_{n+1} = a .$$

Далее вычтем соответствующие части исходного уравнения из полученного уравнения:

$$f_{n+k+1} + (C_1 - 1)f_{n+k} + (C_2 - C_1)f_{n+k-1} + \ldots + (C_k - C_{k-1})f_{n+1} - C_k f_n = a - a ,$$

при этом, правая часть станет равной нулю, то есть, мы получили однородное разностное уравнение, возможно более высокого порядка, чем исходное, о решении которого сказано выше.

Глава 2. Экономическая модель

§ 2.1. Основные экономические понятия

Как известно, две основные категории рыночных отношении - *спрос* и *предложение.* И то и другое зависит от многих факторов, среди которых главный - это *цена* товара. Обозначим цену товара p, объем спроса d, величину предложения s (от первых букв английских слов *price* - цена, *demand* - спрос, *supply* - предложение). При малых p имеем $d(p) - s(p) > 0$ (спрос превышает предложение), при больших p, наоборот, $d(p) - s(p) < 0$. Считая $d(p)$ *и* $s(p)$ непрерывными функциями, приходим к заключению, что существует такая цена p_0, для которой $d(p_0) = s(p_0)$, т.е. спрос равен предложению. Цена p_0 называется *равновесной,* спрос и предложение при этой цене также называются *равновесными.*

Установление равновесной цены - одна из главных задач рынка. Рассмотрим простую модель поиска равновесной цены - так называемую *паутинную модель.* Она объясняет феномен регулярно повторяющихся циклов изменения объемов продажи и цен.

§2.2. Описание паутинной модели рынка

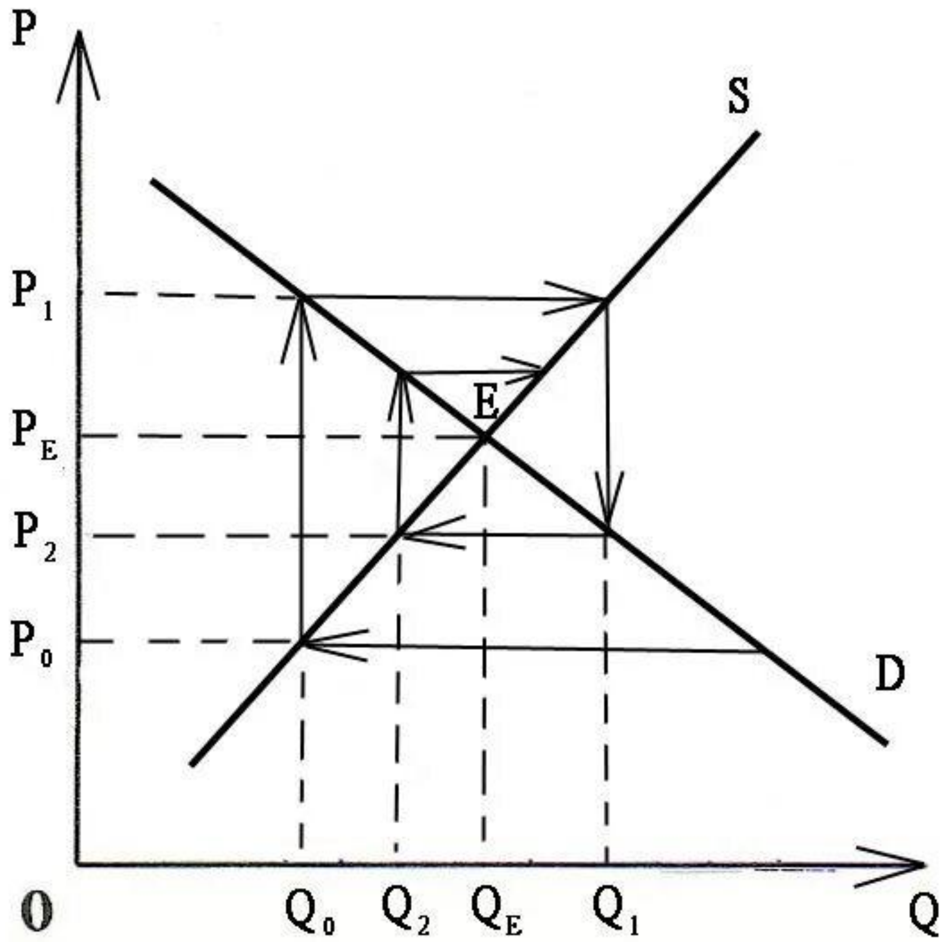
Паутинообразная модель относится к числу динамических, т.е. учитывающих фактор времени. Паутинообразная модель рассматривает процесс формирования равновесия в условиях, когда реакция участников сделок на изменяющиеся условия рынка растянута по времени.

Для примера рассмотрим процесс установления равновесной цены на продукцию предприятия. Предположим, предприятие ориентировалось на рыночную цену P_t , по которой продукция продавалась в предыдущем месяце. Естественно, ожидается сохранение сложившихся цен и определяется объем предлагаемой продукции (Q) на следующий месяц исходя из этих цен. Предположим далее, что рынок вышел из состояния равновесия. Спрос на продукцию снизился, и по цене P_t потребители уже не станут покупать столько продукции, сколько раньше. Чтобы реализовать предложенное количество товара, предприятие вынуждено снижать цену до P_1 , т.е. до уровня цены спроса на данное количество продукции. Но такая низкая цена вынудит предприятие уменьшить предложение. Предложение упадет до Q_1 , на рынке возникнет дефицит и, как следствие, повышение цен до P_2. Это в свою очередь вызовет расширение предложения, но не до исходного уровня Q_t, а до чуть меньших размеров Q_2. В дальнейшем процесс идет по той же схеме и в конечном итоге, описывая круги сужающейся спирали вокруг некоторой точки О, предприятие «нащупывает» равновесную цену.

В описанном варианте отклонение от равновесия с течением времени уменьшается, т.е. система стремится к положению равновесия. Но возможны и иные варианты, когда отклонение от равновесия возрастает и когда отклонения от равновесия стабильно держатся на одном уровне.

В графической интерпретации возможности достижения рыночного равновесия и его устойчивость определяются углами наклона линий спроса и предложения. При более крутой кривой предложения и более пологой спроса равновесие устойчиво; в противоположном варианте равновесие неустойчиво – модель «идет вразнос». И, наконец, регулярные колебания вокруг положения равновесия характерны для ситуации с одинаковым наклоном кривых спроса и предложения.

Эта модель применима почти во всех случаях, когда спрос зависит от текущих цен, а предложение реагирует с некоторым временным отставанием.



§ 2.3. Математическая трактовка паутиной модели

При помощи разностных уравнений можно дать трактовку процессов сходимости и расходимости в паутинных моделях рынка. Спрос и предложение задаются линейными функциями, но при этом спрос зависит от цены в данный момент времени, а предложение зависит от цены на предыдущем этапе, т.е

$$d_t = a + bp_t\ ,\ \ s_t = m + np_{t-1}\ , \tag{2.1}$$

где *a, b, m, n* - действительные числа. Таким образом, если $s_t = d_t$, то

$$a - m = -bp_t + np_{t-1} \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) представляет собой линейное разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами.

Перепишем уравнение для номера *t*+1

$$a - m = -bp_{t+1} + np_t\ . \tag{2.3}$$

Вычтем из уравнения (2.2) уравнение (2.3) получим однородное уравнение

$$-bp_{t+1} + (n + b)p_t - np_{t-1} = 0\,, \tag{2.4}$$

составим его характеристическое уравнение

$$b\lambda^2 - (n + b)\lambda + n = 0.$$

Найдем корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \dfrac{n}{b}$.

Общее решение этого уравнения (2.4) имеет вид:

$$p_t = \alpha_1(1)^t + \alpha_2\left(\frac{n}{b}\right)^t\ . \tag{2.5}$$

Найдем константы α_1, α_2 , из равенства (2.5) при *t* = 1 и *t* = 2 получим систему:

$$\begin{cases} p_1 = \alpha_1 + \alpha_2\left(\dfrac{n}{b}\right) \\ p_2 = \alpha_1 + \alpha_2\left(\dfrac{n}{b}\right)^2. \end{cases}.$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим

$$p_1 - p_2 = \alpha_2\left(\frac{n}{b} - \frac{n^2}{b^2}\right).$$

Выразим α_2 и учитывая уравнение (2.3) при *t* = 1 выразим α_1 :

$$\alpha_1 = \frac{a - m}{n - b}\,.$$

Окончательно получим

$$p_t = \alpha_2 \left(\frac{n}{b} \right)^t + \frac{a-m}{n-b} \ . \qquad (2.6)$$

Таким образом, из (2.6) вытекает, что динамика цен носит колебательный характер. При этом, если $|n| < |b|$, то последовательность цен $\{p_t\}$ будет сходиться к равновесному состоянию, если $|n| > |b|$, то с течением времени последовательность $\{p\}$ будет удаляться от равновесного состояния, если же $|n| = |b|$, то будут иметь место циклические колебания цены относительно равновесного состояния.

Глава 3. Решение задачи

§3.1. Нахождение функций спроса и предложения

В различных исследованиях приходится использовать формулы, составленные на основе эксперимента. Одним из способов получения таких формул является метод наименьших квадратов. Используем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + t\sum_{i=1}^{n} x_i, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = k\sum_{i=1}^{n} x_i + tn. \end{cases} \quad (3.1)$$

для нахождения функции $y = kx + t$.

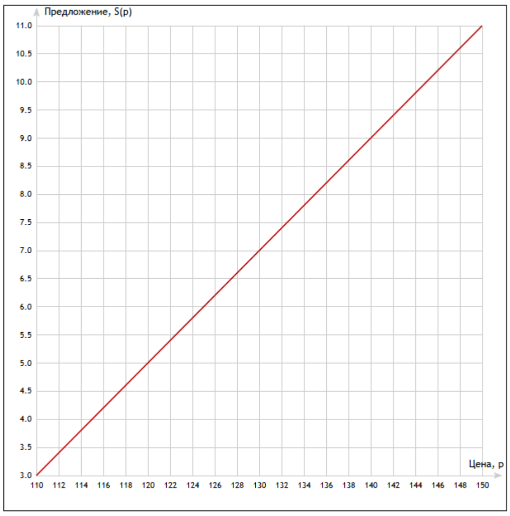
Составим таблицу для нахождения функции предложения:

Период	Предложение (кол-во единиц товара)	Цена (в тыс. руб. за единицу товара)	Цена в квадрате	Произведение
i	y_i	x_i	x_i^2	$y_i\, x_i$
январь	12	146	21316	1752
февраль	12	146	21316	1752
март	10	135	18225	1350
апрель	11	140	19600	1540
май	11	140	19600	1540
июнь	12	146	21316	1752
июль	12	146	21316	1752
август	11	140	19600	1540
сентябрь	11	140	19600	1540
октябрь	12	146	21316	1752
ноябрь	11	140	19600	1540
декабрь	9	135	18225	1215
$\sum$	134	1700	241030	19025

По формулам (3.1) составим систему

$$\begin{cases} 19025 = 241030k + 1700t, \\ 134 = 1700k + 12t \end{cases}$$

Таким образом, округлив решения, получим функцию предложения $S(p) = 0{,}2p - 19$.



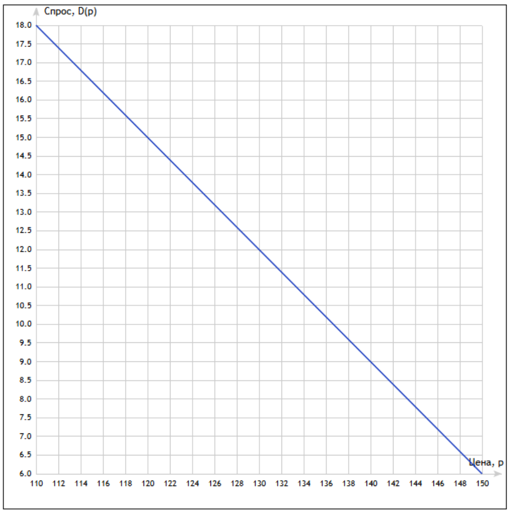
Аналогично поступим для нахождения функции спроса.

Период	Спрос (кол-во единиц товара)	Цена (в тыс. руб. за единицу товара)	Цена в квадрате	Произведение
i	y_i	x_i	x_i^2	$y_i\, x_i$
январь	7	146	21316	1022
февраль	7	146	21316	1022
март	10	135	18225	1350
апрель	9	140	19600	1260
май	9	140	19600	1260
июнь	6	146	21316	876
июль	7	146	21316	1022
август	10	140	19600	1400
сентябрь	10	140	19600	1400
октябрь	7	146	21316	1022
ноябрь	10	140	19600	1400
декабрь	9	135	18225	1215
$\sum$	101	1700	241030	14249

Из системы

$$\begin{cases} 14249 = 241030k + 1700t, \\ 101 = 1700k + 12t \end{cases}$$

получили функцию спроса $D(p)$= -0,3p + 51.



§3.2 Определение равновесной цены

Подставим получившиеся значения коэффициентов a = 51, b = -0,3, m = -19, n = 0,2 в уравнение (2.6): $p_t = \alpha_2\left(-\frac{0,2}{0,3}\right)^t + \frac{51+19}{0,2+0,3} = \alpha_2(-0,67)^t + 140$.

Найдем константу α_2 для t = 1, подставим значение p_1 = 146 в полученную формулу. Получим $\alpha_2 = -8,95$. Окончательно получим функцию цены от времени

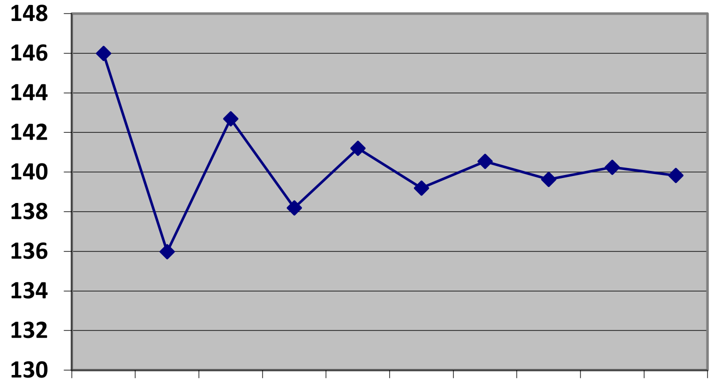
$p_t = -8,95(-0,67)^t + 140$, где t $\in\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Вывод: из полученной зависимости цены от времени вытекает, что динамика цен носит колебательный характер. Последовательность цен будет сходиться к равновесному состоянию: равновесная цена 140 руб. При этом, изменяя цену согласно выведенной формуле, предприятие со временем получит стабильное равновесие между спросом и предложением.

Зависимость цены от времени согласно выведенной формуле приведена в таблице.

Месяцы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Цены	145,99	135,98	142,69	138,19	141,20	139,19	140,54	139,63	140,24	139,83

График цены



Заключение

Рынок представляет собой особую систему взаимоотношений между покупателями и продавцами. Состояние рыночной экономики, уровень и механизм ее развития описываются при помощи таких базовых понятий, как спрос и предложение. Экономический анализ рыночной конъюнктуры через изучение модели спроса и предложения является универсальным инструментом исследования самых разнообразных задач, как на микро - так и макроуровне.

В работе дано математическое описание паутиной модели рынка, проведен анализ ценовой политики предприятия, даны рекомендации для достижения рыночного равновесия и, как следствие, увеличения прибыли. В исследованиях использованы понятия и методы теории разностных уравнений.

Список литературы

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей.- М., 1967.
2. Грязнова А. Г., Юданова А. Ю. Микроэкономика. Теория и российская практика. – М., 2011.
3. Солодовников А. С., Бабайцева В. А., Браилов А. В., Шандра И. Г. Математика в экономике. – М., 2010.
4. Станковская И.К., Стрелец И.А. Маркетинговое управление. Полный курс МВА. Изд. 4-е, стер – М., 2007.
5. Чепурин М.М., Кисилева Е.А. Курс экономической теории. – М., 2012.
6. . Шипачев, В. С. Высшая математика: учеб. для студентов вузов/ В. С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2010. - 479 с.

Рецензия
на учебно-исследовательскую работу
ученицы 11 класса МБОУ «Гимназия №53» г. Пензы
Салитовой Ангелины Артемовны
«Разностные уравнения для описания паутинной модели рынка»

На практике простейшие разностные уравнения возникают при исследовании величин, значения которых меняются через равные временные интервалы. Например, величина банковского вклада меняется при начислении процентов за определенный фиксированный промежуток времени. В теории разностные уравнения связаны с рекуррентными последовательностями значений дискретных функций.

В представленной работе с помощью разностных уравнений построена математическая интерпретация классической паутинообразной модели рынка. Использование разностных уравнений в данной модели помогает отразить временное запаздывание предложения по отношению к спросу. Это запаздывание возникает в связи с тем, что новое предложение формируется на основе данных о предшествующем спросе на товар. Паутинообразная модель имеет дискретный характер и точнее отражает поведение рынка, чем непрерывные модели, что создает ей преимущество перед другими экономическими моделями. В ходе проведенного исследования автором получены конкретные рекомендации по осуществлению ценовой политики для установления рыночного равновесия.

При выполнении работы Салитова А.А. освоила различные методы решения разностных уравнений, а также большое количество специальных экономических терминов. В докладе приведен пример использования изложенных понятий для анализа работы одной из фирм.

Работа имеет хорошую логическую структуру, строгую обоснованность, научно-практическую направленность. Оформлена в соответствии с предъявляемыми требованиями.

Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук
доцент кафедры «Математическое образование» ПГУ Монахова О.А.