

Федеральное агентство по образованию РФ  
Муниципальное образовательное учреждение  
лицей современных технологий управления №2

# Физический и геометрический смысл дробных производных

**Выполнил:**

ученица 11 «В» класса

Герасимова

Анастасия Игоревна.

**Научный руководитель:**

преподаватель математики

МОУ ЛСТУ №2

Гейдарова

Людмила Руслановна

Пенза 2019.

## Оглавление

Введение. ....	3
1. Что такое дробная производная. ....	4
2. Геометрический смысл дробной производной. ....	5
3. Физический смысл дробной производной. ....	8
4. Практическая реализация. ....	12
Заключение. ....	14
Список литературы:.....	14
Приложение 1. Основные свойства и основные значения гамма-функции. ....	16
Приложение 2. Основные положения специальной теории относительности.....	17
Приложение 3. Справочный материал для работы с пакетом MAPLE-17. ....	18

## **Введение.**

Актуальность данной работы заключается в том, что многие физические процессы описываются при помощи дифференциальных уравнений, в том числе и дифференциальных уравнений с производными дробного порядка. В настоящее время существует большое число книг и статей по теории и приложениям дифференциальных уравнений с дробными производными, но интерес к объектам, описываемыми дробными дифференциальными уравнениями, не ослабевает до сих пор и, в первую очередь, это связано с их многочисленными приложениями в различных областях физики и математики. При моделировании динамических процессов дробной (или фрактальной) природы зачастую необходимо решать не только прямую, но и обратную задачу, т.е. нахождение исходной функции, дробная производная которой используется в данной модели. Таким образом, необходимо очень точно представлять себе, что же такое дробная производная и какие именно процессы она характеризует.

Цель данной работы – развитие практических навыков учащихся в области дифференциального и интегрального исчисления, а также в теории дробной фрактальной размерности.

Задача данной работы - познакомить учащихся старшего звена, уже владеющих навыками дифференцирования и интегрирования простейших функций и обладающих элементарными знаниями о специальной теории относительности с понятием дробных производных.

Методологическая основа работы – анализ научной литературы и практический метод.

При практической реализации вычислений дробных производных на ЭВМ использовался математический пакет MAPLE-17 автоматически вычисляющий интегралы и автоматически позволяющий работать с комплексными числами.

# 1. Что такое дробная производная.

Область математического анализа, называемая дробным исчислением и посвященная исследованию и применению производных и интегралов дробного (вещественного или комплексного) порядка, имеет давнюю историю и богатое содержание. Вопросы дробного исчисления имеют глубокую взаимосвязь с самыми разнообразными разделами математики: теорией функций, интегральных и дифференциальных уравнений и др.

Мысль об обобщении понятия дифференцирования  $\frac{d^p f(t)}{dt^p}$  на дробные значения  $p$  появилась практически одновременно с возникновением самого дифференциального исчисления. Первые шаги в этом направлении были сделаны Л. Эйлером, П. Лапласом и Ж. Фурье. Собственно историю дробного исчисления следует вести с работ Н. Х. Абеля и Ж. Лиувилля, появившихся в 30-е годы XIX в.

Рядом с работами Ж. Лиувилля по значимости следует поставить работы Б. Римана, который пришел к конструкции дробного интегрирования, служащей с тех пор одной из основных форм дробного интегрирования и названную его именем.

Дробные производные определяются различным образом. Наиболее часто встречается определение Римана – Лиувилля [4]

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_\alpha^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}$$

и определение, основанное на обобщении целочисленной производной степенной функции  $x^n$  [5]

$$\frac{d^n(x^k)}{dx^n} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} x^{k-n}$$

применение которого подробно рассматривается в пункте 4 Практическая реализация.

Здесь  $\Gamma(z)$  - это гамма-функция, математическая функция, введенная Леонардом Эйлером, а своим обозначением обязанная Лежандру.

При этом оригинальное определение Эйлера (1730 г.) имело следующий вид:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 (-\ln x)^{z-1} dx,$$

из которого непосредственно вытекает одно из основных свойств гамма-функции:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Для данной функции также справедлива формула дополнения Эйлера

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

формула умножения Гаусса

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-nz} \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \Gamma(nz)$$

и частный ее случай, полученный Лежандром для  $n = 2$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2z).$$

Основные свойства и значения гамма-функции приведены в Приложении 1. В рамках данной работы наиболее ценными будут следующие значения гамма-функции, являющиеся объектом подробных изысканий Эйлера, Гаусса и Лежандра:

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$

$$\Gamma(2) = 1! = 1$$

$$\Gamma(3) = 2! = 2$$

$$\Gamma(4) = 3! = 6$$

$$\Gamma(5) = 4! = 24$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!} \sqrt{\pi} = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!} \sqrt{\pi}$$

## 2. Геометрический смысл дробной производной.

В классической геометрии нет промежуточных объектов между точкой ( $n = 0$ ) и отрезком прямой ( $n = 1$ ), между отрезком прямой и квадратом ( $n = 2$ ) и так далее.

Целые показатели размерности бывают только у неподвижных пространств. Это предельный идеальный случай, который мы можем представить себе только теоретически, ведь реальное пространство – время без движения не существует.

Зачастую дробные показатели размерности считают противоестественными. Такой взгляд стал возможным лишь из-за того, что показатели размерности в большинстве физических процессов мало отличаются от целых чисел ввиду малых скоростей движения реальных физических объектов.

Дробные степени в показателях размерностей возникают также при описании фрактальных (разномасштабных, подобных целому) сред. В фрактальной среде, в отличие от сплошной среды, случайно блуждающая частица удаляется от места старта медленнее, так как не все направления движения становятся для нее доступными. Замедление диффузии в фрактальных средах настолько существенно, что физические величины начинают изменяться медленнее первой производной и учесть этот эффект можно только в интегрально – дифференциальном уравнении, содержащем производную по времени дробного порядка.

Будем исходить из того, что пространство и время – это диалектические противоположности. Диалектическое единство пространства и времени образует материю. Чем больше в материи пространства, тем меньше в ней времени, и наоборот. Одномерная материя образована одномерным пространством и одномерным временем; двумерная материя образована двумерным пространством и двумерным временем и т. д. Стоит отметить, что многомерность времени никак не проявляется, если рассматриваются процессы, происходящие в пространстве одного какого-либо измерения. Многомерность времени проявляется при сравнении процессов, происходящих в пространствах различной размерности.

Многомерность времени вытекает из закона сохранения материи, основанном на всем предшествующем опыте физики и утверждающем, что количество материи не изменяется при любых пространственно-временных преобразованиях. Никому еще не удалось дать определение понятиям «пространство» и «время», а вот дать определение понятию «материя» мы уже можем: материя – это физическая величина, равная произведению количества содержащегося в ней пространства на количество содержащегося в ней же времени:

$$M^n = S^n \cdot T^n = const \quad (1)$$

Примем за геометрическую модель не искривленного одномерного пространства прямую линию. В этом случае примером одномерного искривленного пространства переменной кривизны может служить, например, гипербола. Важно, что такое пространство не может существовать вне бесконечного не искривленного пространства – плоскости.

Поверхность шара – это уже модель двумерного равномерно искривленного замкнутого пространства, и такое пространство может существовать только в абсолютном ньютоновом трехмерном не искривленном пространстве.

Выделим из трехмерного пространства  $x, y, z$  (рис.1) элементарное количество (квант) пространства  $\Delta S^3 = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$  (рис.1,a), которому соответствует элементарное количество

времени  $\Delta T^3 = \Delta t_x \cdot \Delta t_y \cdot \Delta t_z$ . Тогда количество трехмерной материи в трехмерном кванте материи:

$$\Delta M^3 = \Delta S^3 \cdot \Delta T^3$$

Прибегнем к мысленному эксперименту. Начнем двигать  $\Delta S^3$  вдоль оси  $x$ . При некоторой  $V < c$  (рис.1,в) размер  $\Delta x$  сократится, согласно специальной теории относительности (о ней более подробно в пункте 3 Физический смысл дробной производной) в  $K_{СТО} = (1 - V^2 / c^2)^{1/2}$  число раз. Размер  $\Delta t_x$ , напротив, увеличится в такое же число раз:  $\Delta t'_x = \Delta t_x / K_{СТО}$ . Количество трехмерной материи из-за сокращения коэффициентов  $K_{СТО}$  в уравнении материи (1.1) не изменится и останется равным его количеству в неподвижном кванте материи:

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t_x \Delta t_y \cdot \Delta t_z = \Delta x' \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t'_x \cdot \Delta t_y \cdot \Delta t_z = \Delta M^3$$

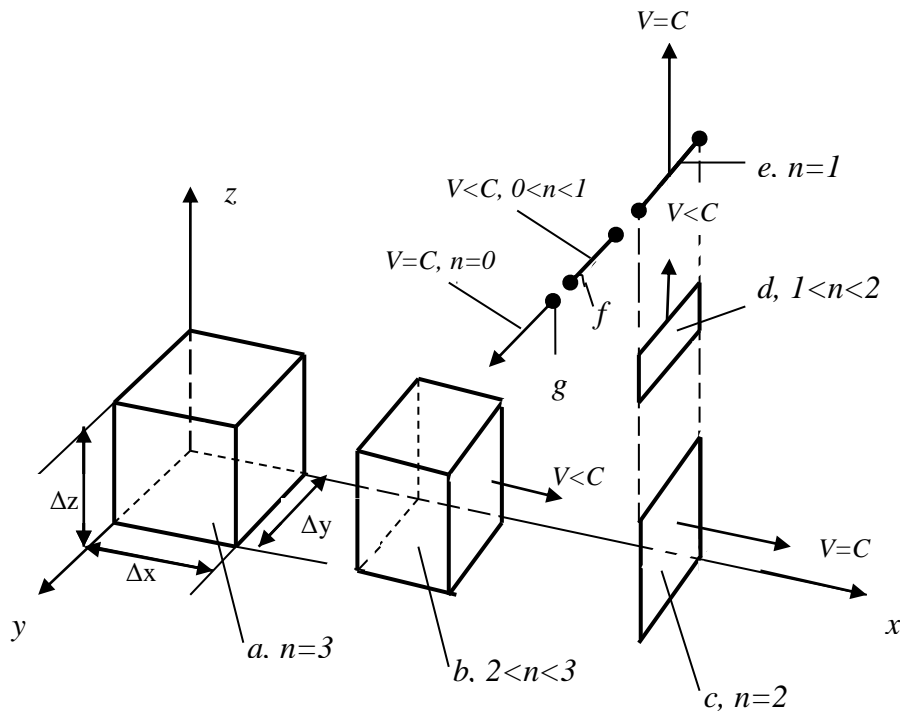


Рис.1 Геометрические модели многомерных пространств

При  $V = c$  (рис.1,с) элементарное трехмерное пространство превратится в двумерное. С позиций нестандартного анализа, полученное нами двумерное пространство имеет бесконечно малую, но постоянную толщину. При достижении  $V = c$  в кванте трехмерного пространства совершается фазовый пространственно-временной переход, сущность которого состоит в том, что в полученном двумерном пространстве как бы срабатывает «запорное устройство» и

последующее уменьшение скорости движения не возвращает трехмерный квант в первоначальное состояние, двумерная пленка остается двумерной пленкой.

Ничтожная, с точки зрения неподвижного наблюдателя, толщина пленки двумерного пространства обеспечивает соблюдение закона сохранения материи и одинаковое протекание процессов в пространствах различного числа измерений.

Несмотря на то, что коэффициенты  $K_{СТО}$  в уравнениях материи сокращаются, мы не имеем права продолжать мысленный эксперимент. Во-первых, мы исчерпали все возможности одномерного времени, а во-вторых, мы достигли предельной скорости.

Геометрическая сущность дробной производной состоит в том, что дробная производная показывает, во сколько раз количественно уменьшается движущаяся физическая величина по сравнению с неподвижной. Например, при  $n = \Gamma_{(3/2)} / \Gamma_{(z)} = 1/2$  отрезок, движущийся со скоростью  $V/c \approx 0,55$  уменьшается в размерах в 2 раза.

### 3. Физический смысл дробной производной.

Физический смысл дробной производной состоит в том, что дробная производная показывает, во сколько раз движущаяся физическая величина качественно отличается от неподвижной. Отрезок из рассмотренного примера уже не отрезок, но еще не точка. Отрезком он был при  $n = \Gamma_{(3/2)} / \Gamma_{(z)} = 1$ , а точкой он станет при  $n = \Gamma_{(3/2)} / \Gamma_{(z)} = \infty$ , то есть при  $V/c = \infty$ .

Специальная теория относительности (СТО) — теория, описывающая движение, законы механики и пространственно-временные отношения при произвольных скоростях движения, меньших скорости света в вакууме, в том числе близких к скорости света (в рамках специальной теории относительности классическая механика Ньютона является приближением низких скоростей). Основные положения СТО приведены в Приложении 2.

Фактически СТО описывает геометрию четырехмерного пространства-времени.

В рамках СТО система отсчёта представляет собой некоторое материальное тело, выбираемое в качестве начала этой системы, способ определения положения объектов относительно начала системы отсчёта и способ измерения времени. Обычно различают системы отсчёта и системы координат. Добавление процедуры измерения времени к системе координат «превращает» её в систему отсчёта.

Событием называется любой физический процесс, который может быть локализован в пространстве, и имеющий при этом очень малую длительность. Другими словами, событие полностью характеризуется координатами  $(x, y, z)$  и моментом времени  $t$ , т.е. элементом



материи. Примерами событий являются: вспышка света, положение материальной точки в данный момент времени и т. п.

Инерциальная система отсчёта (ИСО) — такая система, относительно которой объект, не подверженный внешним воздействиям, движется равномерно и прямолинейно. Постулируется, что ИСО существуют, и любая система отсчёта, движущаяся относительно данной инерциальной системы равномерно и прямолинейно, также является ИСО.

Помимо этого существуют еще 3 основных постулата СТО:

Постулат 1 (принцип относительности Эйнштейна). Законы природы одинаковы во всех системах координат, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга. Это означает, что форма зависимости физических законов от пространственно-временных координат должна быть одинаковой во всех ИСО, то есть законы инвариантны относительно переходов между ИСО. Принцип относительности устанавливает равноправие всех ИСО.

Постулат 2 (принцип постоянства скорости света). Скорость света в вакууме одинакова во всех системах координат, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга[8].

Принцип постоянства скорости света противоречит классической механике, а конкретно — закону сложения скоростей. При выводе последнего используется только принцип относительности Галилея и неявное допущение одинаковости времени во всех ИСО. Таким образом, из справедливости второго постулата следует, что время должно быть относительным — неодинаковым в разных ИСО.

Постулат 3 (постулат причинности): любое событие может оказывать влияние только на события, происходящие позже него и не может оказывать влияние на события, произошедшие раньше него. Из постулата причинности и независимости скорости света от выбора системы отсчёта следует, что скорость любого сигнала не может превышать скорость света.

Преобразованиями Лоренца в физике, в частности, в СТО, называются преобразования, которым подвергаются пространственно-временные координаты  $(x, y, z, t)$  каждого события при переходе от одной инерциальной системы отсчета (ИСО) к другой. Аналогично, преобразованиям Лоренца при таком переходе подвергаются координаты любого вектора 4-хмерного пространства.

Если ИСО  $K'$  движется относительно ИСО  $K$  с постоянной скоростью  $v$  вдоль оси  $x$ , а начала пространственных координат совпадают в начальный момент времени в обеих системах, то преобразования Лоренца (прямые) имеют вид:

$$x' = \frac{x - V \cdot t}{\left(1 - W \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t' = \frac{t - W \cdot x \cdot \frac{V}{c^2}}{\left(1 - W \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad (2)$$

где  $c$  — скорость света, величины со штрихами измерены в системе  $K'$ , без штрихов — в системе  $K$ .

При  $W = 1$  формулы (2) дают преобразования Лоренца и специальную теорию относительности. При  $W = 0$  формулы (2) дают преобразования Галилея и механику Ньютона.

Из (1) следует, что

$$dx \cdot dt = 1,$$

что позволяет нам завершить полную геометризацию физики:

$$\frac{d^n f^m}{dt^n} = f^{n+m} \quad (3)$$

$$\int_t f^m \cdot dt^n = f^{m-n} \quad (4)$$

$$\frac{d^n f^m}{dx^n} = f^{m-n} \quad (5)$$

$$\int_x f^m \cdot dx^n = f^{m+n} \quad (6),$$

В формулах (3) - (6)  $f^n$  и  $f^m$  - физические величины, имеющие размерность  $n$  и  $m$  в абсолютной системе измерения физических величин.

Очевидно, что при преобразованиях Лоренца события, одновременные в одной системе отсчёта, не являются одновременными в другой (относительность одновременности). Кроме того, у движущегося тела сокращается продольный размер по сравнению с тем, какой оно имеет в сопутствующей ему системе отсчёта (лоренцево сокращение), а ход движущихся часов замедляется, если наблюдать их из «неподвижной» системы отсчёта (релятивистское замедление времени).

Однако (2) – это формулы линейной динамики. В теории же многомерных пространств обычно применяется нелинейная динамика, в которой релятивистский корень  $K_{CTO} = \left(1 - W \cdot V^2 / c^2\right)^{1/2}$  заменяется коэффициентом теории многомерных пространств

$$K_{TMI} = n = \frac{\Gamma_{(3/2)}}{\Gamma_{(z)}},$$

а линейная динамика (2) заменяется нелинейной динамикой с дробными производными:

$$\frac{d^n}{dt^n} x^k = \frac{\Gamma_{(k+1)}}{\Gamma_{(k-n+1)}} x^{k-n} \quad (7)$$

описанной выше в пункте 1 Что такое дробная производная и подробно рассмотренной в пункте 4 Практическая реализация.

Рассмотрим гамма-функцию для вещественного аргумента при  $z > 0$  (рис. 2). Сначала строим функцию  $\Gamma_{(z)}$ , а затем по формуле красного смещения  $z$  строим шкалу относительных скоростей

$$\frac{V}{c} = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$$

Здесь мы просто придаем переменной  $z$  конкретный физический смысл:  $z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda}$ , называемый параметром красного смещения, и равный относительному увеличению длины волны принимаемого электромагнитного сигнала.

Теперь строим функцию  $\frac{\Gamma_{(z)}}{\Gamma_{(3/2)}}$ . В отличие от  $\Gamma_{(z)}$ , график функции  $\frac{\Gamma_{(z)}}{\Gamma_{(3/2)}}$  несколько вытянут по оси ординат, а минимум его совмещен с прямой  $\Gamma_{(z)}=1$ .

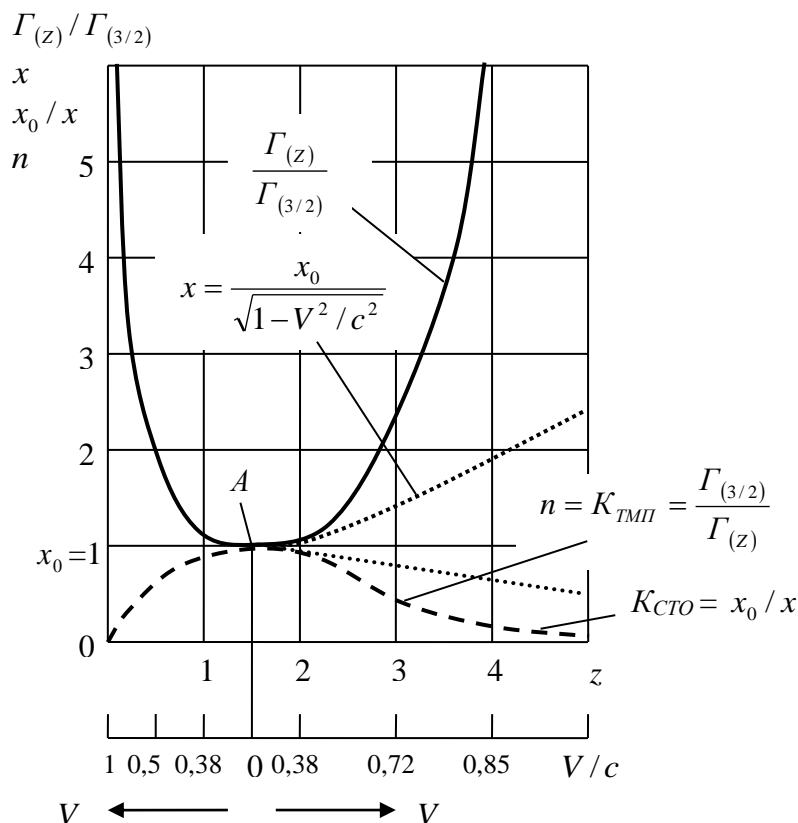


Рис. 2 Физический смысл дробной производной

Построим на том же графике кривую  $x = \frac{x_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ .

Сразу же заметим, что эта релятивистская формула – это формула линейной динамики. Кроме того, что она весьма приближенно описывает процесс сокращения линейных размеров микрочастиц, она содержит в знаменателе скорость света, что вызвало необоснованное запрещение сверхсветовых скоростей. Гамма-функция выгодно отличается от релятивистского корня еще и тем, что она определена на всей числовой оси и даже на всей комплексной плоскости.

При  $z < 2,2$  или, что то же самое, при  $V/c < 0,53$  ошибки от применения релятивистского корня не превышают 11%, но при  $V/c > 0,91$  релятивистская формула занижает фактическое сокращение размеров уже в 10 раз.

Заметим, что формула дробной производной (7) есть всего лишь одна из формул полностью геометризированной физики (3) - (6), а именно – это формула (5), если под  $n$  понимать не только целые, но и дробные числа.

## 4. Практическая реализация.

Рассмотрим ряд конкретных примеров.

Пример 1. Пусть  $f(x) = x^k$ .

Тогда первая производная данной функции  $f'(x) = \frac{d}{dx} x^k = kx^{k-1}$ , продолжая находить следующие производные от которой получаем  $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} x^k = \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}$ .

Заменяя факториалы гамма-функциями получаем, что  $\frac{d^n}{dx^n} x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} x^{k-n}$ .

Тогда половинная производная

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-1/2+1)} x^{1-1/2} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = 2\pi^{-1/2} x^{1/2} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

Повторяя данную операцию еще раз, получаем

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} 2\pi^{-1/2} x^{1/2} = 2\pi^{-1/2} \frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1/2-1/2+1)} x^{1/2-1/2} = 2\pi^{-1/2} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1)} x^0 = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1$$

Данный результат является обоснованным, поскольку

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \left( \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x \right) = \frac{d}{dx} x = 1$$

Пример 2. Пусть  $f(x) = \sin(ax + b)$ .

Поскольку  $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \sin(ax + b) = a^n \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{2}n\right)$ , то, полагая  $n = 1/2$ , получаем

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \sin(ax + b) = \sqrt{a} \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{4}\right)$$

Тогда  $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \left( \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \sin(ax + b) \right) = \sqrt{a} \sqrt{a} \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = a \cos(ax + b) = f'(x)$ .

В общем случае для получения значений дробных производных можно воспользоваться, формулой, приведенной в работе [2] и, например, математическим пакетом Maple-17, позволяющим работать с комплексными числами:

$$\frac{d^{1+\varepsilon}}{dx^{1+\varepsilon}} f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (ik)^{1+\varepsilon} \cdot e^{ikx} \cdot f_k dk$$

где  $f_k$  - Фурье-образ функции  $f(x)$ , для которых существует указанный интеграл, а  $\varepsilon$  - любое неотрицательное число. В Приложении 3 приводится справочный материал, касающийся работы со встроенными процедурами вычисления Фурье-образа в пакете Maple-17.

Пример 3. Пусть  $f(x) = \sin ax$ . Тогда, в результате использования пакета Maple-17, получаем

$$\frac{d^{1+\varepsilon}}{dx^{1+\varepsilon}} \sin ax = \frac{a}{2} \left( (ai)^\varepsilon \cdot e^{iax} + (-ai)^\varepsilon \cdot e^{-iax} \right)$$

Данная запись является достаточно непривычной, поскольку также содержит комплексные числа. Однако, используя формулы Коши, при  $\varepsilon = 0$  мы приходим к обычной производной от  $\sin ax$ , т.е.  $f'(x) = a \cos ax$ . Если положить  $\varepsilon = 1$ , то приходим к выражению для второй производной от  $\sin ax$ , то есть  $f''(x) = -a^2 \sin ax$ . Легко проверить, что при любых целых  $\varepsilon = 1, 2, 3, 4, \dots$  будут получаться обычные производные соответствующего порядка.

Пример 4. Пусть  $f(x) = \cos ax$ . Тогда, в результате использования пакета Maple-17, получаем

$$\frac{d^{1+\varepsilon}}{dx^{1+\varepsilon}} \cos ax = \frac{ia}{2} \left( (ai)^\varepsilon \cdot e^{iax} - (-ai)^\varepsilon \cdot e^{-iax} \right)$$

Отсюда также, как и в примере 3, будет следовать, что при всех целых  $\varepsilon = 1, 2, \dots$  мы получим правильные выражения для соответствующих производных от  $\cos ax$ .

Вычисление дробных производных от более сложных функций, например, таких как  $f(x) = e^{-x^2}$  приводится в работе [2] и в пакете Maple-17 осуществляется с помощью функции

параболического цилиндра  $CylinderD(a, x)$ , изучение которой затруднительно в рамках школьного курса.

## **Заключение.**

Развитие, исследование и применение производных и интегралов произвольного, а не только целочисленного порядка, обусловлено широким ее применением в задачах физики, химии, биологии, теории управления, механики, в том числе в теории упругости.

Важнейшим приложением теории фракталов к механике являются дифференциальные операторы дробного (фрактального) порядка в линейной теории вязкоупругости<sup>1</sup>.

В физике, механике, биологии и других областях часто встречаются среды и системы, которые хорошо интерпретируются как фракталы. Примерами фракталов (или фрактальных сред) могут служить пористые среды и дробное броуновское движение. Фрактальные структуры являются следствием многих процессов и явлений, например, таких как диффузия, агрегирование, разрушение, динамический хаос, растворение и др.<sup>2</sup>. Во многих работах рассматривается применение теории фракталов в моделировании биологических систем и фильтрации нефти и газа в пластах<sup>3</sup>. Отмечено, что пористые вещества ведут себя как системы с фрактальной структурой.

Дифференциальные уравнения с дробными производными используются при описании процессов, обладающих эффектом "памяти", причём дробное исчисление в теории таких систем приобретает основополагающее значение, сопоставимое с классическим анализом применительно к механике сплошных сред<sup>4</sup>.

## **Список литературы:**

1. Боброва И.А., Бугримов А.Л. Кузнецов В.С. О применении дробных производных в физических моделях. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. – 2017, № 3.

---

<sup>1</sup> Сургуладзе Т. А. О некоторых применениях операторов дробного порядка в вязкоупругости. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. М., 2002. – 174 с.

<sup>2</sup> Головизнин В. М, Киселев В. П., Короткин И. А., Юрков Ю. И. Некоторые особенности вычислительных алгоритмов для уравнений дробной диффузии. Препринт № ИБРАЭ - 2001-14. Институт проблем безопасности развития атомной энергетики РАН, 2002. 26 с.

<sup>3</sup> Летников А. В., Черных В. А. Основы дробного исчисления. М: НЕФ- ТЕГАЗ, 2011. 429 с.

<sup>4</sup> Огородников Е. Н., Радченко В. П., Яшагин Н. С. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1(22). С. 255–268.

2. Гладков С.О., Богданова С.Б. К вопросу о дробном дифференцировании. // Вестник Самарского университета. Естественно-научная серия. Том 24, №3, 2018.
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Ижевск.: РХД, 2002. 665 с.
4. Риман Б. Опыт обобщения действий интегрирования и дифференцирования // Риман Б. Сочинения / пер с нем. под ред. В.Л. Гончарова, М.; Л.: Государственное издательство теоретико-технической литературы, 1948. С. 262–275.
5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск, 1987.
6. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 272 с. — 5-9 221-0 440-3 экз. Архивировано 20 июля 2013 года. Архивная копия от 20 июля 2013 см. на Wayback Machine.
7. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика. – 1992 – Т. 20, № 3.

## Приложение 1. Основные свойства и основные значения гамма-функции.

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2, \Gamma(4) = 6, \Gamma(5) = 24, \\ \Gamma(6) = 120, \Gamma(7) = 720, \dots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}, \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{105\sqrt{\pi}}{16},$$

$$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{945\sqrt{\pi}}{32}, \Gamma\left(\frac{13}{2}\right) = \frac{10395\sqrt{\pi}}{64}, \Gamma\left(\frac{15}{2}\right) = \frac{135135\sqrt{\pi}}{128}, \dots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!} \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!} \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}, \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}, \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{8\sqrt{\pi}}{15}, \Gamma\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{16\sqrt{\pi}}{105},$$

$$\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{32\sqrt{\pi}}{945}, \Gamma\left(-\frac{11}{2}\right) = \frac{64\sqrt{\pi}}{10395}, \Gamma\left(-\frac{13}{2}\right) = -\frac{128\sqrt{\pi}}{135135}, \dots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = (-1)^n \pi, \quad n \in \mathbb{N}$$



# Приложение 2. Основные положения специальной теории относительности.

## ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ СПЕЦИАЛЬНАЯ (СТО)

**НЕЗАВИСИМОСТЬ СКОРОСТИ СВЕТА ОТ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЗЕМЛИ**

**ОПЫТ МАЙКЕЛЬСОНА 1881 Г.**

**ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

В СОСТОЯНИИ ПОКОЯ

**ЛЮБОЙ ПРОЦЕСС ПРОТЕКАЕТ ОДИНАКОВО И РАВНОМЕРНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ**

И РАВНОМЕРНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

**ПРОСТРАНСТВО X, Y, Z**

ВВЕРХ Z > 0    НАЗАД X < 0

ВПРАВО Y > 0    ВЛЕВО Y < 0

ВПЕРЕД X > 0    ВНИЗ Z < 0

↑ ВРЕМЯ

**ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ X, Y, Z, t**

ПРОШЛОЕ t < 0    БУДУЩЕЕ t > 0

↑ ВРЕМЯ

→ ОТ ГАЛЛЕЯ К ЭЙНШТЕЙНУ

**ИНТЕРВАЛ ИНВАРИАНТЕН**

СОБЫТИЕ B

СОБЫТИЕ A

**ОДНОВРЕМЕННОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНА**

СОБЫТИЕ A    СОБЫТИЕ B

ЛУЧ СВЕТА

$t'_2 - t'_1 = \gamma \frac{y}{c^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

**ЛОРЕНЦЕВО СОКРАЩЕНИЕ**

**СВЕТОВОЙ КОНУС**

БУДУЩЕЕ

ПРОШЛОЕ

ЗДЕСЬ И СЕЙЧАС

ТАКОМЫЙ?

ПРОСТРАНСТВО

**ЗАМЕДЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ**

**ПОЯВЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

И ≠ 0    E ≠ 0    И ≠ 0    B ≠ 0

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

**ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА**

УДАЛЯЮЩИЙСЯ    НЕПОДВИЖНЫЙ    ПРИБЛИЖАЮЩИЙСЯ    НАБЛЮДАТЕЛЬ

**E = mc<sup>2</sup>**

## Приложение 3. Справочный материал для работы с пакетом MAPLE-17.

Прямое преобразование Фурье преобразует функцию времени  $f(t)$  в функцию частот и заключается в вычислении следующей интегральной функции:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Он реализуется следующей функцией пакета интегральных преобразований `inttrans`:

```
fourier(expr, t, w)
```

Здесь `expr` — выражение (уравнение или множество), `t` — переменная, от которой зависит `expr`, и `w` — переменная, относительно которой записывается результирующая функция. Обратное преобразование Фурье задается вычислением интеграла:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Он фактически переводит представление сигнала из частотной области во временную. Примеры применения преобразования Фурье представлены ниже:

```
> fourier(sin(t), t, w);
```

```
-I pi Dirac(w - 1) + I pi Dirac(w + 1)
```

```
> invfourier(%, w, t);
```

```
 $\frac{-1}{2} I (e^{It} - e^{-It})$ 
```

```
> simplify(%);
```

```
sin(t)
```

```
> fourier(1-exp(-a*t), t, w);
```

```
 $2 \pi \text{Dirac}(w) - \text{fourier}(e^{-a t}, t, w)$ 
```

```
> invfourier(%, w, t);
```

```
 $1 - e^{-a t}$ 
```

Обратите внимание на то, что даже в простом первом примере применение обратного преобразования Фурье вслед за прямым не привело к буквальному восстановлению исходной функции `sin(t)`. Потребовалась команда `simplify`, чтобы перевести результат в виде представления синуса через экспоненциальные функции к обычному виду `sin(t)`.