Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа №20

Решение кубических уравнений

Выполнил:
Щербаков Владислав Алексеевич
МБОУ СОШ №20, 9Б класс

Руководитель:
Мандрыченко Олег Борисович
учитель математики МБОУ СОШ №20

Пенза 2020

Содержание:

1. Введение.

Практически всё, что окружает человека так или иначе связано с математикой. А последние достижения в физике, технике и информационных технологиях не оставляют никакого сомнения, что и в будущем положение вещей останется прежним. Множество различных алгебраических и геометрических задач сводятся к какому-либо уравнению. Линейные уравнения мы знаем с самых ранних лет, с начальной школы. С квадратными знакомимся в 8 классе, а вот кубические уравнения решаем в старших классах, делаем это обычно графическим способом или методом разложения на множители. Отсутствие навыков решения уравнений высших степеней вызывает затруднение при подготовке к итоговой аттестации на профильном уровне.

Целью работы является изучение способов решения кубических уравнений.

Задачи исследования:

- найти различные методы и приёмы решения кубических уравнений;
- классифицировать исследуемые уравнения;
- оценить степень сложности каждого из них;
- познакомить одноклассников со способами решения уравнений.

Объектом исследования является кубическое уравнение.

Субъектом исследования являются способы решения кубических уравнений.

Гипотеза исследования основана на том, что существует связь между коэффициентами кубического уравнения и его корнями; при решении таких уравнений можно применять разнообразные способы.

В работе применялись аналитический и сравнительный методы исследования.

Актуальность и практическая значимость данной работы заключается в том, что появляется возможность определять наиболее эффективный способ решения кубического уравнения и правильно его применять.

2. Основная часть.

2.1.История.

Решение алгебраических уравнений с одни неизвестным представляет собой одну из труднейших и древнейших математических задач. Этими задачами занимались самые выдающиеся математики древности.

Первые упоминания об уравнениях и решении линейных уравнений появились с начала II тысячелетия до н.э. в Древнем Вавилоне.

В Древней Греции уравнения решались при помощи геометрической фигуры. Числа отождествлялись с длинами отрезков. Нахождение неизвестной величины означало построение искомого отрезка.

С VI века в средневековой Индии и Китае, в странах Арабского Востока появляются решения квадратных уравнений.

В развитии алгебры уравнений велика роль французского математика и юриста **Ф. Виета** (1540-1603). Особое значение имеет установление им зависимости между корнями и коэффициентами уравнений.

В XVI веке изучение алгебры началось в Западной Европе. Первым крупным достижением западноевропейских учёных было открытие формулы для решения кубических уравнений. Это было заслугой итальянских учёных алгебраистов **Никколо Тарталья** (1499-1557), **Джироламо Кардано** (1501- 1576) и **Л.Феррари** (1522-1565).

Французский математик **Этьен Безу** (1730-1783) сформулировал свою известную теорему о делении многочлена на линейный двучлен, позволяющий снизить степень алгебраических уравнений.

Английский математик **Уильям Джордж Горнер** (1786-1837). С его именем связана схема деления многочлена на двучлен.

В дальнейшем математики активно пытались найти формулы вычисления корней уравнений пятой и более степени. И только почти через три столетия впервые итальянский учёный **Паоло Руффини** (1765-1822), а затем норвежский математик **Нильс Хенрих Абель** (1802-1829) доказали, что не существует формулы, выражающей корни любого целого уравнения пятой степени через конечное число алгебраических операций над его коэффициентами. Поэтому в современной математике разработаны методы, позволяющие находить с любой степенью точности приближённые значения корней уравнений. Использование компьютеров значительно облегчат эту работу.

2.2. Азбука кубического уравнения.

Уравнение вида $p_n(x)=0$, где $p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ - многочлен степени n; $a_0,a_1,...,a_n$ - заданные действительные числа, $a_0\neq 0$ называют **алгебраическим уравнением *n*-й степени.**

При $n = 1$ уравнение – линейное, при $n = 2$ – квадратное уравнение.
Если $n > 2$, то уравнение $p_n(x) = 0$ называют **уравнением высшей степени.**

Решить уравнение- значит, найти все его корни или доказать , что уравнение не имеет корней.

Кубическое уравнение - алгебраическое уравнение третьей степени вида:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

Если $a = 1$, то уравнение называют приведенным кубическим уравнением

$$x^3+bx^2+cx+d=0$$

Число x будет **корнем кубического уравнения** тогда, когда после его подстановки уравнение становится верным равенством. У каждого кубического уравнения с действительными коэффициентами будет по крайней мере один **действительный корень**, два других или тоже действительные, или будут комплексно сопряженной парой.

Для кубических уравнений тоже существует дискриминант, как и для квадратных уравнений, с помощью которого различаются три случая существования корней кубического уравнения.

2.3. Двучленное кубическое уравнение.

Двучленное кубическое уравнение имеет вид $ax^3+b=0$.

Это уравнение приводится к виду $x^3+\frac{b}{a}=0$. Далее применяется формула суммы кубов:

$$\left(x+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)\left(x^2-x\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)=0.$$

Из первой скобки находим $x=-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, а квадратный трёхчлен $x^2-x\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ в области действительных чисел корней не имеет, т.к. $D=-3\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}<0$.

Задача 1. Найти действительные корни уравнения $8x^3-3=0$.

Решение: $8x^3=3,\quad x^3=\frac{3}{8},\quad x=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$. *Ответ:* $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

2.4. Разложение на множители.

1. *Вынесение общего множителя за скобку.*

Начнем с **простейшего** случая, когда свободный член $d = 0$. В этом случае, уравнение имеет вид $ax^3 + bx^2 + cx = 0$. Решается вынесением x за скобки. В скобках останется квадратный трехчлен, корни которого легко найти через дискриминант $x(ax^2 + bx + c) = 0$.

Задача 2. Найти действительные корни уравнения $3x^3 + 4x^2 + 2x = 0$.

Решение: $x(3x^2 + 4x + 2) = 0$, $x = 0$. Квадратный трехчлен $3x^2 + 4x + 2$ действительных корней не имеет, т.к. $D = 4 - 6 = -2 < 0$. *Ответ:* 0.

2. Применение формул сокращенного умножения.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

Задача 3. Решить уравнение $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$

Решение: Прибавим к обеим частям уравнения 2, получим:
$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 2$, $(x+1)^3 = 2$, $x + 1 = \sqrt[3]{2}$, $x = \sqrt[3]{2} - 1$. *Ответ:* $\sqrt[3]{2} - 1$.

3. Способ группировки.

Задача 4. Решить уравнение $x^3 + 3x^2 - x + 3 = 0$

Решение: $x^2(x-3) - (x-3) = 0$, $(x-3)(x-1)(x+1) = 0$,

$x = -1$; $x = 1$; $x = 3$. *Ответ:* -1; 1; 3.

2.5. Понижение степени уравнения.

Способ основан на применении теоремы Безу и правилах деления многочленов.

Теорема Безу утверждает, что остаток от деления многочлена *p(x)* на двучлен *(x – a)* равен *p(a)*.

Следствие из теоремы Безу: Если число *a* является корнем многочлена *p(x)*, то многочлен $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ делится без остатка на двучлен *(x – a)*.

Задача состоит в том, чтобы найти хотя бы один корень многочлена $x = a$, потом разделить многочлен на двучлен *(x – a)*. В результате получается многочлен, степень которого на единицу меньше, чем степень исходного.

Для нахождения корня кубического уравнения, имеющего вид $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, можно использовать следующие утверждения:

Если сумма всех коэффициентов многочлена равна нулю, то число 1 является корнем многочлена.

Если сумма коэффициентов многочлена при четных степенях равна сумме коэффициентов при нечетных степенях, то число -1 является корнем многочлена. Свободный член считается коэффициентом при четной степени.

Если уравнение имеет рациональный корень, то он может быть найден в виде $\frac{p}{q}$, *где p – целый делитель свободного члена,* q *– целый делитель старшего коэффициента.*

Деление может быть выполнено с помощью схемы Горнера, или обыкновенным уголком.

Схема Горнера. По теореме Безу многочлен может быть представлен в следующем виде:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = (x-a)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + p(a).$$

Коэффициенты $b_к$ находятся из таблицы:

a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + a \cdot b_0$	$b_2 = a_2 + a \cdot b_1$		$b_{n-1} = a_{n-1} + a \cdot b_{n-2}$	$p(a) = a_n + a \cdot b_{n-1}$

По следствию из теоремы Безу остаток равен 0 (*a* – корень), и получаем уравнение $b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} = 0$, степень которого на единицу меньше исходного.

Деление уголком осуществляется аналогично делению «в столбик» натуральных чисел.

Задача 5. Решить уравнение $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$.

Решение: Сумма коэффициентов уравнения равна 0. Следовательно *x = 1* – корень.

1-й способ. Применим схему Горнера.

Корень	Коэффициенты многочлена			
a	1	- 7	14	- 8
1	1	-7 + 1 · 1 = - 6	14 + 1 · (-6) = 8	-8 + 1 · 8 = 0

$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = (x-1)(x^2 - 6x + 8)$ или $x^2 - 6x + 8 = 0$. Корни *x = 2* и *x = 4*.

2-й способ. Деление уголком.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 7x^2 + 14x - 8 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 - x^2} & x^2 - 6x + 8 \\ \quad -6x^2 + 14x & \\ \quad \underline{-6x^2 + 6x} & \\ \qquad 8x - 8 & \\ \qquad \underline{8x - 8} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

или

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$x = 2, \quad x = 4.$

Ответ: 1; 2; 4.

Задача 6. Решить уравнение $2x^3 - 5x^2 - 2x + 2 = 0$.

Решение: Коэффициенты уравнения – целые числа, поэтому можно попытаться подобрать рациональный корень. Делители свободного члена: $\pm1; \pm2$. Делители старшего коэффициента: $\pm1; \pm2$. Следовательно, корни надо искать среди чисел $\pm\frac{1}{2}; \pm1; \pm2$.

Простой подстановкой убеждаемся, что $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Следовательно, $x = \frac{1}{2}$ - корень.

Применим схему Горнера:

a	2	-5	-2	2
$\frac{1}{2}$	2	-5 + 0,5·2 = -4	-5 + 0,5·(-4) = -4	2 + 0,5·(-4) = 0

$2x^3-5x^2-2x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-4x-4\right)$ Следовательно $\left(2x^2-4x-4\right)=0$

$D=12$, корни иррациональные: $x=1+\sqrt{3}$ и $x=1-\sqrt{3}$. *Ответ:* $0,5;1\pm\sqrt{3}$.

Вывод: При решении кубических уравнений с помощью деления многочленов или схемы Горнера удаётся понизить степень уравнения – свести его к решению уравнений 1-й и 2-й степени.

2.6. Симметрические или возвратные уравнения.

Уравнение вида $ax^3+bx^2+cx+d=0$ называется возвратным или симметрическим, если его коэффициенты, стоящие на симметричных относительно середины позициях, равны. Левую часть уравнения можно разложить на множители:
$ax^3+bx^2+cx+d=a(x^3+1)+b(x^2+x)=a(x+1)(x^2-x+1)+bx(x+1)=(x+1)(ax^2+x(b-a)+a)$.
Такое уравнение обязательно имеет корень *x = -1*. Корни квадратного уравнения $ax^2+x(b-a)+a=0$ легко находятся через дискриминант.

Задача 7. Решить уравнение $5x^3-8x^2-8x+5=0$.
Решение. Данное уравнение – возвратное, так как симметричные коэффициенты равны. Следовательно, его можно разложить на множители: $5x^3-8x^2-8x+5=5(x^3+1)-8x(x+1)$. Продолжим
$5(x+1)(x^2-x+1)-8x(x+1)=(x+1)(5x^2-5x+5-8x)=(x-1)(5x^2-13x+5)$. Дискриминант квадратного уравнения равен 69. Следовательно, уравнение имеет три корня:

$x=-1; x=\frac{13\pm\sqrt{69}}{10}$.

Ответ: $-1;\frac{13\pm\sqrt{69}}{10}$.

Задача 8. Решить уравнение $x^3+2x^2+2x+1=0$**.**
Решение. Так как это возвратное уравнение, оно обязательно имеет корень *x = -1*. Применим схему Горнера для решения этого уравнения.

a	1	2	2	1
-1	1	2 + (-1)·1 = 1	2 + (-1)·1 = 1	21+ (-1)·1 = 0

$x^3+2x^2+2x+1=(x+1)(x^2+x+1)$**.** Квадратное уравнение $x^2+x+1=0$ корней не имеет.
Ответ: -1.

2.7. Метод неопределённых коэффициентов.

Методом неопределённых коэффициентов называют метод, применяемый для отыскания коэффициентов выражений, вид которых заранее известен. Суть метода состоит в том, что заранее предполагается вид множителей – многочленов, на которые разлагается данный многочлен. Метод опирается на следующие утверждения:

- *два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной;*
- *любой многочлен третьей степени разлагается в произведение линейного и квадратного множителей.*

Последнее утверждение следует из того, что хотя бы один корень у кубического уравнения всегда есть. Действительно, если x – очень большое положительное число, то кубический член намного больше остальных, поэтому значение многочлена положительное; когда x – очень большое по модулю отрицательное число, значение многочлена отрицательное. Таким образом, кубический многочлен принимает и положительные, и отрицательные значения, а значит (по теореме о промежуточном значении), где-то он обращается в ноль.

Задача 9. Решить уравнение $x^3-5x^2+7x-3=0$. Будем искать многочлены $x-a$ и bx^2+cx+d.

Решение:

$$x^3-5x^2+7x-3=(x-a)(bx^2+cx+d)=bx^3-abx^2+cx^2-acx+dx-ad=$$
$$=bx^3-x^2(ab-c)-x(ac-d)-ad.$$

Приравниваем коэффициенты при равных степенях и получаем систему:

$$\begin{cases} b=1 \\ ab-c=5 \\ ac-d=-7 \\ ad=3 \end{cases} \begin{cases} b=1 \\ a-c=5 \\ ac-d=-7 \\ ad=3 \end{cases} \begin{cases} b=1 \\ c=a-5 \\ d=3/a \\ a(a-5)-3/a=-7 \end{cases} \begin{cases} b=1 \\ a_1=3; a_2=1 \\ c_1=-2; c_2=-4 \\ d_1=1; d_2=3 \end{cases}.$$

Т.е. $x^3-5x^2+7x-3=(x-3)(x^2-2x+1)$ и $x=3; x=1$ или

$x^3-5x^2+7x-3=(x-1)(x^2-4x+3)$ и опять $x=3; x=1$. *Ответ:* $x=3; x=1$.

2.8. Теорема Виета для кубических уравнений.

Из школьного курса математики нам известна данная теорема для квадратного уравнения. Но её принцип используют и для решения кубического уравнения.

Рассмотрим уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Разложим левую часть на возможные множители $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ и разделим на $a\neq 0$.

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3);$$

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2)(x-x_3);$$

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=x^3-x_1x^2-x_2x^2+x_1x_2x-x_3x^2+x_1x_3x-x_1x_2x_3;$$

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=x^3-(x_1x^2+x_2x^2+x_3x^2)+(x_1x_2x+x_1x_3x+x_2x_3x)-x_1x_2x_3;$$

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3.$$

Теперь, применяя метод неопределённых коэффициентов, можно записать систему равенств:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{2a}, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}. \end{cases}$$ **Это и есть условие теоремы Виета для кубического уравнения.**

Задача 10. Решить уравнение $x^3+x^2-4x-4=0$.

Решение: Применяя теорему Виета, получим систему:

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-1 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-4, \\ x_1x_2x_3=4 \end{cases}$ решая которую найдём корни уравнения $\begin{cases} x_1=-2, \\ x_2=2, \\ x_3=-1. \end{cases}$ *Ответ: -2; -1; 1.*

Для приведённого кубического уравнения $x^3+px^2+qx+h=0$ справедливы следующие формулы:

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-p, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=q, \\ x_1x_2x_3=-h. \end{cases}$ аналогичные формулам для приведённого квадратного уравнения.

Вывод: данный способ достаточно лёгок для понимания, так как теорема Виета знакома из школьного курса для квадратных уравнений, но, чтобы находить корни кубического уравнения с помощью данной теоремы, необходимо обладать хорошими вычислительными навыками.

2.9. Метод замены.

Суть метода заключается в том, что в итоге замены некоторого выражения, входящего в уравнение и содержащего переменную, в исходном уравнении понижается степень, т.е. уравнение сводится к простейшему.

Задача 11. Решить уравнение $x^3-5x+2\sqrt{3}=0$.

Решение: Замена $x=t\sqrt{3}$.

$(t\sqrt{3})^3-5t\sqrt{3}+2\sqrt{3}=0$ или $3\sqrt{3}t^3-5t\sqrt{3}+2\sqrt{3}=0$ или $3t^3-5t+2=0$.

В результате получили уравнение с целыми коэффициентами, которое можно решить, например, группировкой: $3t^3-3t-2t+2=0$, $3t(t^2-1)-2(t-1)=0$, $(t-1)(3t^2+3t-2)=0$.

$t-1=0$ или $3t^2+3t-2=0$; $t=1$, $t=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{6}$.

Возврат: $x=\sqrt{3}$, $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{6}\cdot\sqrt{3}=\dfrac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{11}}{2}$.

Ответ: $\sqrt{3}$; $\dfrac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{11}}{2}$.

Неполные кубические уравнения решаются подстановкой $x=t+\dfrac{1}{t}$.

Задача 12. Решить неполное кубическое уравнение $3x^3 - 9x - 10 = 0$.

Решение: Замена $x = t + \frac{1}{t}$.

$$3\left(t + \frac{1}{t}\right)^3 - 9\left(t + \frac{1}{t}\right) - 10 = 0$$

$$3\left(t^3 + 3t^2 \cdot \frac{1}{t} + 3t \cdot \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}\right) - 9\left(t + \frac{1}{t}\right) - 10 = 0$$

$$3\left(t^3 + 3t + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^3}\right) - 9\left(t + \frac{1}{t}\right) - 10 = 0$$

$$3\left(t^3 + \frac{1}{t^3}\right) + 9\left(t + \frac{1}{t}\right) - 9\left(t + \frac{1}{t}\right) - 10 = 0 \mid \cdot t^3$$

$$3t^6 - 10t^3 + 3 = 0$$

Ещё одна замена $t^3 = a$.

$3a^2 - 10a + 3 = 0$; $a = 3, a = \frac{1}{3}$.

Возврат: $t^3 = 3$ или $t^3 = \frac{1}{3}$. Тогда $t = \sqrt[3]{3}, t = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Следовательно $x = \sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. *Ответ:* $\sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

При решении многих уравнений трудно угадать, какую новую переменную надо ввести, чтобы упростить уравнение. Поэтому для некоторых видов уравнений вводится стандартная замена.

1. Если свободный член равен 1, то используется замена $x = \frac{1}{a}$.

2. Подстановка $x = y - \frac{b}{3a}$ приводит к неполному уравнению вида $y^3 - c = 0$.

Задача 13. Решить уравнение $21x^3 + x^2 - 5x - 1 = 0$.

Решение: Замена $x = \frac{1}{a}$. $\frac{21}{a^3} + \frac{1}{a^2} - \frac{5}{a} - 1 = 0 \mid \cdot a^3$; $a^3 + 5a^2 - a - 21 = 0$.

Проверяя делители свободного члена, находим $p(-3) = 0$. Следовательно $a = -3$ - корень.

Применим схему Горнера:

Корень	1	5	-1	-21
-3	1	5 + (-3)·1 = 2	-1 + (-3)·2 = -7	-21 + (-3)(-7) = 0

$a^3 + 5a^2 - a - 21 = (a+3)(a^2 + 2a - 7) = 0$. Корни $a_1 = -3; a_2 = -1 + 2\sqrt{2}; a_3 = -1 - 2\sqrt{2}$.

Возврат: $x_1 = -\frac{1}{3}; x_2 = \frac{1+2\sqrt{2}}{7}; x_3 = \frac{1-2\sqrt{2}}{7}$. *Ответ:* $-\frac{1}{3}; \frac{1+2\sqrt{2}}{7}; \frac{1-2\sqrt{2}}{7}$.

Задача 14. Решить уравнение $x^3 + 3x^2 + 3x - 9 = 0$.

Решение: $a = 1; b = 3; c = 3; d = -9$.

Замена $x = y - \frac{b}{3a}$. Тогда $x = y - \frac{3}{3 \cdot 1} = y - 1$ и уравнение примет вид:

$(y-1)^3+3(y-1)^2+3(y-1)-9=0$.

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получаем уравнение

$y^3-10=0$ или $y=\sqrt[3]{10}$. При возврате находим $x=\sqrt[3]{10}-1$. *Ответ:* $\sqrt[3]{10}-1$.

2.10. Формула Кардано.

В случае, когда кубическое уравнение не имеет рациональных корней, применяется формула Кардано, которая была открыта в 16 веке итальянским математиком Джироламо Кардано.

По этой формуле можно найти все корни кубического уравнения.

Чтобы применить формулу Кардано, кубическое уравнение вначале приводят к виду $x^3+ax^2+bx+c=0$, разделив на старший коэффициент, если он отличен от единицы, где a, b, c - действительные числа. Затем с помощью ряда замен его приводят к виду

$$y^3+py+q=0, \quad \text{где } p=b-\frac{a^3}{3}, \; q=c+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}.$$

Решение этого уравнения имеет вид $y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}$, где $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$.

Это и есть **формула Кардано**.

Вопрос о характере корней уравнения зависит от знака выражения $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$:

- если $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$, то уравнение имеет три различных корня, один из которых действительный, а два комплексно сопряжённые;
- если $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$, то все три корня действительные, два из них равны;
- если $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, то все три корня действительные и различные.

Хотелось бы привести пример, показывающий применение формулы Кардано, когда никакие другие способы решения кубических уравнений не работают. Но в настоящий момент у меня не хватает для этого знаний. Поэтому я планирую продолжить исследование способов решения уравнений высших степеней в старших классах.

3. Заключение.

Теория уравнений занимает ведущее место в математике, имея большое практическое значение. Ведь решение любой задачи так или иначе сводится к решению уравнений. И в серьёзных практических задачах это всегда уравнения высших степеней.

Изучение таких уравнений, сравнение различных способов их решения позволяет сделать вывод: в каждом из методов решения есть свои плюсы и минусы. Очень часто эти способы дополняют друг друга. При этом каждый служит для решения собственных задач.

В работе нашла подтверждение гипотеза о существовании связи между коэффициентами кубического уравнения и его корнями. Исследованы различные методы решения кубических уравнений. Не все они удобны для решения, но каждый, как минимум, вызывает интерес своей математической красотой.

Я намерен продолжать работу в изучении способов решения уравнений высших степеней.

4. Литература и источники.

1. Алгебра и начала анализа, 10-11классы. Алимов Ш.А. Колягин Ю.М.Москва. Просвещение, 2014г.

2. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А. и др. Математика. Областные олимпиады. 8-11 классы. – М.: Просвещение, 2010. 239 с.

3. Гасанов, И. Р. О корнях кубического уравнения. Молодой ученый. — 2018. — № 39 (225).

4. Мерздяк А.Г. Алгебраический тренажёр: Пособие для школьников и абитуриентов. – М: Илекса, 2001 г.

5. Кушнир И. Шедевры школьной математики. Кн.1. – Киев: Астарта, 1995. – 575 с.

Интернет-ресурсы:

kvant.mccme.ru – архив номеров журнала «Квант».

http://wikipedia.org – Электронная энциклопедия «Википедия».

pvg.mk.ru – олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Рецензия.

Содержание работы ученика 9Б класса МБОУ СОШ №20 Щербакова Владислава полностью соответствует избранной теме: «Решение кубических уравнений». В работе тема раскрыта полностью, проведена большая исследовательская работа по изучению и обобщению способов и методов решения кубических уравнений, видна хорошая математическая подготовка учащегося.

Грамотно обоснованы причины и актуальность выбора темы. В частности, обращено внимание, что отсутствие навыков решения уравнений высших степеней вызывает затруднения при подготовке к итоговой аттестации на профильном уровне.

В работе рассмотрено большое количество задач, решаемых различными способами. Некоторые рассмотренные задачи имеют прикладной характер.

Отмечено, что знание этих способов определяет их значимость в решении олимпиадных задач.

При проведении работы применялись аналитический и сравнительный методы исследования поставленной задачи.

Признавая необходимость практической значимости задач, содержащих кубические уравнения, можно сделать вывод об актуальности данной работы.

Рецензент:	Мандрыченко Олег Борисович
Место работы:	МБОУ СОШ №20
Должность:	Учитель математики, высшая квалификационная категория
Научная степень:	-----------------------------
Домашний адрес:	г.Пенза, ул. Калинина, д.9, кв. 78
Телефон:	8 927 364 19 84

Подпись: ______________________________ /О.Б. Мандрыченко/

Директор МБОУ СОШ №20 ______________________________ /О.А. Лысова/

Место печати.