Муниципальное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа №9 г. Сердобска

Решение уравнений с двумя неизвестными

Выполнила: Митрофанова Ирина,

ученица 11 класса

МОУ СОШ №9, г. Сердобска

Руководитель:

Александрова С.В. , учитель математики

Сердобск
2021

Оглавление

Введение

В прошлом учебном году при подготовке к школьной олимпиаде и при написании исследовательской работы «Некоторые способы решения уравнений» мне встречались уравнения с двумя переменными, которые решались необычными способами, на уроках мы такие способы не изучали. Оказалось, что эти уравнения составляют целый класс уравнений и именуются диофантовыми. Я заинтересовалась этим и решила подробно изучить данный вопрос.В заданиях ЕГЭ встречаются такие интересные уравнения.

В своих работах Диофант не только выявил проблему решения неопределённых уравнений, но и дал некоторые общие методы их решения. Я считаю, что эти методы будут очень полезны для старшеклассников, которым предстоит сдавать экзамен по математике.

Актуальность темы: каждому выпускнику школы предстоит сдать экзамен по математике и решение уравнений – важная часть при подготовке и решении заданий различной сложности.

Цель: повысить уровень математической подготовки через углубление знаний о различных методах решения уравнений и проверить на практике эффективность использования этих способов.

Задачи:

-расширить свои знаний по математике;

- выявить необходимость появления неопределенных уравнений;
- рассмотреть некоторые методы решения неопределенных уравнений;
- показать практическое применение неопределенных уравнений.

Практическая значимость заключается в подборе и разборе серии заданий, позволяющих повысить уровень математической подготовки при решении уравнений. Представленные материалы могут быть использованы учащимися к подготовке ЕГЭ по математике.

1.История диофантовых уравнений

Диофантовы уравнения (по имени древнегреческого математика Диофанта), алгебраические уравнения или же системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, имеющие число неизвестных, превосходящее количество уравнений, и у которых разыскивается целые или рациональные решения. Понятие «Диофантовы уравнения » в современной математике расширенно: это уравнения, у которых разыскивается решения в алгебраических числах.

Диофант представляет одну из занимательных загадок в истории математики. Мы не знаем, кем был Диофант, точные года его жизни.

Но до наших времен дошла одна из эпиграмм Палатинской Антологии:

Прах Диофанта гробница покоит: дивись ей – и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругою он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец.
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил.
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе.
Тут и увидел предел жизни печальной своей.[1]

(Пер. С. Н. Боброва).

Эта задача сводится к составлению и решению простейшего линейного уравнения $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$

$$14x+7x+12x+420+42x+336=84x,$$
$$-9x=-756,$$
$$x=84.$$

Отсюда следует что, Диофант прожил 84 года.

За эти годы Диофант написал сочинения «Об измерении поверхностей» и «Об умножении», трактат «О многоугольных числах». Основным произведением Диофанта является «Арифметика» в 13 книгах.

Но к сожалению, из 13 книг, составлявших «Арифметику», до нас дошли лишь первые 6. Диофантовые уравнения имеют, как правило, много решений, поэтому их называют неопределенными уравнениями. Это, например уравнения: $6x+7y=12$; $x^2+y^2=z^2$; $x^3+3y^3=8z^2$

[1] Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. 1961

Также Диофант ввел особые символы для вычитания, сокращенные слова для отдельных определений и действий. Можно сделать вывод, что именно он был автором первого алгебраического языка.

2.Методы решения диофантовых уравнений

Греческий учёный предложил несколько способов решения таких уравнений, условно можно выделить следующие:

1. Метод прямого перебора.
2. Алгоритм Евклида.
3. Цепные дроби.
4. Метод разложения на множители.
5. Решение уравнений в целых числах , как квадратных относительно какой-либо переменной.
6. Метод остатков.
7. Метод бесконечного спуска.

Чтобы решать такие уравнения, нужно руководствоваться следующими правилами:

Правило 1. Если с не делится на d, то уравнение ах + ву = с не имеет решений в целых числах. Н.О.Д.(а, в) = d.

Правило 2. Чтобы найти решение уравнения ах + ву = с при взаимно-простых а и в, нужно сначала найти решение (X_o ; y_o) уравнения ах + ву = 1; числа CX_o , Cy_o составляют решение уравнения ах + ву = с.

2.1. Метод прямого перебора.

Способ перебора – применяется для решения простейших задач.
Этот метод предполагает генерацию множества возможных решений, вычисление целевой функции для каждого из решений и выбор решения, имеющего минимальное значение целевой функции.

Пример.

В клетке сидят кролики и фазаны. Всего у них 18 ног. Узнать сколько в клетке тех и других. Укажите все решения.

Решение:

Пусть x – количество кроликов, y – количество фазанов, тогда имеем уравнение $4x + 2y = 18$ или $2x + y = 9$.

Если $x = 1$, то $y = 7$.

Если $x = 2$, то $y = 5$.

Если $x = 3$, то $y = 3$.

Если $x = 4$, то $y = 1$.

При $x = 5$ получаем $2\cdot5 = 10 > 9$.

Ответ: (1;7), (2;5), (3;3), (4;1).

использование неравенств

Пример.

Решить в натуральных числах уравнение $5x + 8y + 39$.

Решение. Для уменьшения перебора вариантов рассмотрим неравенства:

$$\begin{cases} 5x = 39 - 8y \geq 0 \\ 8y = 39 - 5x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 4 \\ x \leq 7 \end{cases}$$

Проведем перебор по неизвестной y.

Если $y = 1$, то $x = 6{,}2$ не является натуральным числом.

Если $y = 2$, то $x = 4{,}6$ не является натуральным числом.

Если $y = 3$, то $x = 3$.

Если $y = 4$, то $x = 1{,}4$ не является натуральным числом.

Ответ: (3; 3).

выделение целой части

Пример.

У осьминога 8 ног, а у морской звезды 5. Сколько в аквариуме тех и других, если всего у них 39 ног?

Решение.

Пусть x – количество осьминогов, y – количество морских звезд, тогда получаем уравнение $8x + 5y = 39$.

Выразим y из уравнения и выделим целую часть:

$$y = \frac{39-8x}{5} = 7 - x - x\frac{3x-4}{5}.$$

Отсюда следует, что разность 3x - 4 делится на 5.

Если 3x - 4 = 0, то x не является натуральным числом.

Если 3x - 4 = 5, то x = 3 и = 3.

Если 3x - 4 = 10, то x не является натуральным числом.

Если 3x - 4 = 15, то x не является натуральным числом.

Если 3x - 4 = 20, то x = 8, но8·8 = 64 >39.

Ответ: 3 и 3.

Замечание. В последнем примере использовано отношение делимости, при этом уравнение приводится к иному виду. В этом примере для уменьшения перебора вариантов можно было дополнительно использовать неравенства.

2.2.Алгоритм Евклида

Алгоритм Евклида – это алгоритм нахождения наибольшего общего делителя (НОД) пары целых чисел.

Наибольший общий делитель (НОД) – это число, которое делит без остатка два числа и делится само без остатка на любой другой делитель данных двух чисел. Проще говоря, это самое большое число, на которое можно без остатка разделить два числа, для которых ищется НОД.

$$ax+вy=c$$

Множество решений исходного уравнения лежит на множестве чисел

$$x=x_0+bn;\ y=y_0-an$$

$ax^2+by=c$, *сделав предварительно замену* $x^2=t$, *получим линейное уравнение* $at+by=c$.

Пример.

Решим уравнение5x+8y=29

Найдем НОД(5;8) по алгоритму Евклида.

$$8:5=5\times1+3(\text{ост.})$$

$$5:3=3\times1+2(\text{ост.})$$

$$3:2=2\times1+1(\text{ост.}) \text{ - НОД}$$

$$2:1=1\times2$$

Выразим 1 через 5 и 8:

1=3-2×1=3-(5-3×1) ×1=3-5-3+2×3-5=2× (8-5)-5=2×8-3×5

Т.е. 1=5×(-3)+8×2

Одно решение нашли x=-3, y=2

Находим решение по формулам

$x = cx + bt$ и $y = cy - at$ ($t \in Z$)

$x = 29 \times (-3) = 8t = -87 + 8t$; $y = 29 \times 2 - 5t = 58$

Ответ: $x = -87 + 8t$; $y = 58$

***Пример*.**

Решить уравнение в целых числах $407x - 2816y = 33$.

*1.*Используя алгоритм Евклида, найдем наибольший общий делитель чисел 407 и 2816:

$$2816 = 407 \cdot 6 + 374;$$
$$407 = 374 \cdot 1 + 33;$$
$$374 = 33 \cdot 11 + 11;$$

$33 = 11 \cdot 3$

Следовательно $(407, 2816) = 11$, причем 33 делится на 11

2. Разделим обе части первоначального уравнения на 11, получим уравнение $37x - 256y = 3$, причем $(37, 256) = 1$

3. С помощью алгоритма Евклида найдем линейное представление числа 1 через числа 37 и 256.

$256 = 37 \cdot 6 + 34;$

$37 = 34 \cdot 1 + 3;$

$34 = 3 \cdot 11 + 1.$

Выразим 1 из последнего равенства, затем последовательно поднимаясь по равенствам будем выражать 3; 34 и полученные выражения подставим в выражение для 1.

$1 = 34 - 3 \cdot 11 = 34 - (37 - 34 \cdot 1) \cdot 11 = 34 \cdot 12 - 37 \cdot 11 = (256 - 37 \cdot 6) \cdot 12 - 37 \cdot 11 = -83 \cdot 37 - 256 \cdot (-12)$

Таким образом, $37 \cdot (-83) - 256 \cdot (-12) = 1$, следовательно пара чисел $x_0 = -83$ и $y_0 = -12$ есть решение уравнения $37x - 256y = 3$.

4.Запишем общую формулу решений первоначального уравнения

$x = -83 + bt = -83 \cdot 3 - 256t = -249 - 256t$

$y = -12 - at = -12 \cdot 3 - 37t = -36 - 37t$

где t – любое целое число

Ответ: t – любое целое число

2.3.Применение цепных дробей

Цепная дробь (или непрерывная дробь) – это математическое выражение

вида $[a_0;a_1;a_2;a_3\ldots] = a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}}$, ***$a_0$ есть целое число и все остальные a_n натуральные числа (то есть неотрицательные целые). Любое вещественное число можно представить в виде цепной дроби (конечной или бесконечной). Число представляется конечной цепной дробью тогда и только тогда, когда оно рационально. Для рациональных чисел может быть использован алгоритм Евклида для быстрого получения разложения в цепную дробь.***[2]

Пример.

Решите в целых числах уравнение 25x-18y+1=0.

Найдем НОД чисел 25 и 18 с помощью цепных дробей, то есть используем один из вариантов алгоритма Евклида.

Преобразуем неправильную дробь $\frac{25}{18}$, последовательно выделяя целые части неправильных дробей:

$$\frac{25}{18}=1+\frac{7}{18}=1+\frac{1}{\frac{18}{7}}=1+\frac{1}{2+\frac{4}{7}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{7}{4}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}},$$

где $1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}$ называется целой дробью.

Числа 1, 2, 1, 1, выделенные в этом выражении, являются последовательными частными алгоритма Евклида для нахождения наибольшего общего делителя пары чисел 25 и18. Отбросим дробь $\frac{1}{3}$ и преобразуем получившуюся цепную дробь в обыкновенную:

$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}-1+\frac{2}{5}-\frac{7}{5}.$$

Вычтем полученную дробь из начальной дроби $\frac{25}{18}$:

$$\frac{25}{18}-\frac{7}{5}=\frac{125-126}{18\cdot 5}=\frac{-1}{18\cdot 5}$$

Приведем ее к общему знаменателю: 25 · 5 –18 · 7 + 1 = 0.

Получили частное решение исходного уравнения x= 5, y= 7.

Общее решение исходного уравнения: x= 5 + 18t; y= 7 + 25t, t Є Z.

Ответ: x= 5+18t; y= 7+25t.

[2] М.Б. Балк, Г.Д. Балк. Математика после уроков. М, «Просвещение», 1971.

2.4.Метод разложения на множители

Разложение многочленов на множители – это тождественное преобразование, в результате которого многочлен преобразуется в произведение нескольких сомножителей – многочленов или одночленов.

Существует несколько способов разложения многочленов на множители.

- ***Вынесение множителя за скобку;***
- ***Использование формул сокращённого умножения;***
- ***Способ группировки;***
- ***Предварительное преобразование.***

Пример.

Рассмотрим случай, когда в уравнениях можно применить формулу разности квадратов или другой способ разложения на множители.

Решить уравнение в целых числах:

$$y^3 - x^3 = 91.$$

Решение. Используя формулы сокращенного умножения, разложим правую часть уравнения на множители

$$(y - x)(y\ 2 + xy + x\ 2\ ) = 91.$$

1. Выпишем все делители числа 91: ±1; ±7; ±13; ±91.
2. Проведем исследование. Заметим, что для любых целых x и y число

$$y^2 + xy + x^2 \ge y^2 - 2|y| \cdot |x| + x^2 = (|y| - |x|)^2 \ge 0,$$

следовательно, оба сомножителя в левой части уравнения должны быть положительными. Тогда уравнение $(y-x)(y^2+xy+x^2\ ) = 91$ равносильно совокупности систем уравнений:

1)$\begin{cases} y - x = 1, \\ y^2 + xy + x^2 = 91. \end{cases}$ 3)$\begin{cases} y - x = 91, \\ y^2 + xy + x^2 = 1. \end{cases}$

2)$\begin{cases} y - x = 7, \\ y^2 + xy + x^2 = 13. \end{cases}$ 4)$\begin{cases} y - x = 13, \\ y^2 + xy + x^2 = 7. \end{cases}$

Решив системы, получим: первая система имеет решения (5; 6), (−6; −5); третья (−3; 4), (−4; 3); вторая и четвертая решений в целых числах не имеют.

Ответ: (5; 6); (−6; −5); (−3; 4); (−4; 3).

способ группировки

Пример.

Решить в целых числах уравнение xy + 3x - y = 6 .

Решение. Запишем уравнение в виде

x(y + 3) - (y + 3) = 3 или (x -1)(y + 3) = 3.

Так как 3 =1·3 = 3·1= -1·(-3) = -3·(-1), то рассмотрим четыре системы

Из каждой системы получаем решения.

1)$\begin{cases} x-1=1 \\ y+3=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-1=3 \\ y+3=1 \end{cases}$

3)$\begin{cases} x-1=-1 \\ y+3=-3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-1=-3 \\ y+3=-1 \end{cases}$

Ответ: (4;- 2); (-2;-4); (2;0); (0;- 6).

2.5.Решение уравнений в целых числах как квадратных относительно какой-либо переменной.

- ***Выделение целой части;***
- ***Использование дискриминанта;***
- ***Решение уравнений в целых числах, как квадратных, относительно какой-либо переменной.***

выделение целой части

Пример.

Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению
3xy +14x +17y + 71 = 0 .

Решение. Выразим из данного уравнения y через x: $y=-\frac{14x+71}{3x+17}$.

При этом следует отметить, что величина 3x+17 ≠ 0 (так как x – целое число). Выделим из дроби в правой части этого равенства правильную алгебраическую дробь (у которой степень числителя меньше степени знаменателя):

$$y=-\frac{4(3x+17)+2x+3}{3x+17}=-4-\frac{2x+3}{3x+17}.$$

Умножим обе части последнего равенства на 3:

$3y=-12-\frac{6x+9}{3x+17}=-12-2+\frac{25}{3x+17}$ или $3\text{y}+14=\frac{25}{3x+17}$

Поскольку числа 3y и 14 – целые, то 3x +17 должно быть делителем числа 25:

$3x+17=\pm1;\pm5;\pm25$ – всего 6 возможностей. Отсюда для x получаем три возможных значения: –4, –6, –14 (в остальных трех случаях x не является целым). Соответствующие значения y равны –3, –13, –5.

Замечание. В данном примере суть выделения целой части состоит в избавлении переменной x из числителя. В решении был использован прием домножения обеих частей равенства на коэффициент при x в знаменателе. Этот прием домножения также удобно использовать при решении уравнений методом разложения на множители.

Ответ: (-4;- 3); (-6;-13); (-14;- 5)

использование дискриминанта (неотрицательность)

Пример.
Решить в целых числах уравнение $3(x^2+xy+y^2)=x+8y$

Решение. Рассмотрим уравнение, как квадратное относительно x:

$3x^2+(3y-1)x+3y^2-8y=0$

Найдем дискриминант уравнения $D=-27y^2+90+1$.Данное уравнение имеет корни, если $D\geq0$, т.е. $27y^2+90+1\geq0$.Так как $y\in Z$, то получаем $0\leq y\leq3$. Перебирая эти значения, получим, что исходное уравнение в целых числах имеет решения (0;0) и (1;1).

Ответ: (0;0); (1;1)

Пример.
Решить уравнение в целых числах: $5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0$
Решение: Рассмотрим уравнение относительно x:
$5x^2+(8y-2)x+5y^2+2y+2=0$
$D=(8y-2)^2-4\cdot5(5y^2+2y+2)=64y^2-32y+4=-100y^2-40y-40=-36(y^2+2y+1)$
$=36(y+1)^2$
Для того, чтобы уравнение имело решения, необходимо, чтобы D= 0.
$-36(y+1)^2=0$. Это возможно при y = -1, тогда x = 1.
Ответ: (1;-1)

использование дискриминанта
(полный квадрат)

Пример.
Решить в целых числах уравнение $x^2-xy+y^2=x+y$

Решение. Рассмотрим уравнение, как квадратное относительно x:

$$x^2-(y+1)x+y^2-y = 0$$

Его дискриминант $D = -3y^2 + 6y + 1 = t^2$ должен быть квадратом некоторого целого числа t.

Получаем новое уравнение:

$$3y^2 + 6y + 1 + t^2 = 0;\ 3(y-1)^2 + t^2 = 4.$$

Из последнего уравнения следует, что $t^2 \leq 4$ т.е. $|t| \leq 2$.

1. Если $t^2 = 0$, то уравнение $3(y-1)^2 = 4$ не имеет целого решения y.

2. Если $t^2 = 1$, то уравнение $3(y-1)^2 = 3$ имеет целые решения $y_1 = 2$ и $y_1 = 0$. При y = 2 получаем квадратное уравнение $x^2-3x+2=0$ с корнями x =1 или x= 2. При y = 0 получаем квадратное уравнение $x^2-x=0$ с корнями x = 0 или x =1.3.

3.Если $t^2=4$, то уравнение $3(y-1)^2=0$ имеет одно целое решение y =1. При y =1 получаем квадратное уравнение $x^2-2x=0$ с корнями x = 0 или x = 2 .

Ответ: (1;2); (2;2); (0;0);(1;0), (0;1); (2;1)

Метод оценки

использование известных неравенств

Пример.
Решить в натуральных числах уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}.$$

Решение. Пусть для определенности $x \leq y$. Проведем перебор для первых значений неизвестной x.
1. Если x = 1, то получаем неверное равенство
$1 + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, так как $1 + \frac{1}{y} > 1$ при любых натуральных y.
2. Если x = 2, то получаем неверное равенство $\frac{1}{2} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, так как $\frac{1}{2} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$ при любых натуральных y.
3. Если x = 3, то получаем $\frac{1}{3} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{6}$, y=6.
4. Если x = 4, то получаем $\frac{1}{4} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{4}$, y=4.
5. Если x = 5, то получаем $\frac{1}{5} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{y} = \frac{3}{10}$, y=$\frac{3}{10} \notin$ N

Пусть $x \geq 6$. По условию $y \geq x$, следовательно, $y \geq 6$. Тогда $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{6}, \frac{1}{y} \leq \frac{1}{6}$, а значит, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$. Таким образом, при $x \geq 6$ и $y \geq x$ исходное уравнение решений не имеет.

Заметим, что в уравнении $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ неизвестные x и y равноправны, поэтому снимая условие $y \geq x$, имеем еще одно решение (6;3). Кроме того, можно сделать вывод, что при $x \geq 6$ и $y \geq 6$ исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: (4;4); (6;3); (3;6).

2.6. Метод остатков

Этот метод основан на исследовании возможных остатков левой и правой частей уравнения от деления на некоторое фиксированное натуральное число.

Замечание. Говоря строго математическим языком, для решения уравнения в данном случае применяется теория сравнений.

Пример. Решить уравнение в целых числах $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$.

Перепишем исходное уравнение в виде $(x + y)^3 = 7(x^2y + xy^2) + 4$. Так как кубы целых чисел при делении на 7 дают остатки 0, 1 и 6, но не 4, то уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: целочисленных решений нет.

Пример

Решить в целых числах уравнение $3x - 4y = 1$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $3x = 4y + 1$. Поскольку левая часть уравнения делится на 3, то должна делиться на 3 и правая часть. Рассмотрим три случая.

1. Если $y = 3m$, где $m \in Z$, то $4y + 1 = 12m + 1$ не делится на 3.
2. Если $y = 3m + 1$, то $4y + 1 = 4(3m + 1) + 1 = 12m + 5$ не делится на 3.
3. Если $y = 3m + 2$, то $4y + 1 = 4(3m + 2) + 1 = 12m + 9$ делится на 3, поэтому $3x = 12m + 9$, $x = 4m + 3$.

Ответ: $x = 4m + 3$, $y = 3m + 2$, где $m \in Z$.

2.7. Метод бесконечного спуска

Метод бесконечного спуска — метод доказательства от противного, основанный на том, что множество натуральных чисел вполне упорядочено.

Пример

Решить в целых числах уравнение 5x - 7y = 3.

Решение. Выразим из уравнения то неизвестное, коэффициент при котором меньше по модулю:

$$x = \frac{7y + 3}{5} = y + \frac{2y + 3}{5}$$

Дробь$\frac{2y+3}{5}$ должна быть равна целому числу. Положим , $\frac{2y+3}{5} = z,$ где z – целое число. Тогда 2y + 3 = 5z. Из последнего уравнения выразим то неизвестное, коэффициент при котором меньше по модулю, и проделаем аналогичные преобразования:

$$y = \frac{5z - 3}{2} = 3z - \frac{z + 3}{2}$$

Дробь $\frac{z+3}{2}$ должна быть целым числом.

Обозначим $\frac{z+3}{2} = t,$ где t – целое число.

Отсюда z = 2t - 3. Последовательно возвращаемся к неизвестным x и y:

y = 3(2t - 3) - t = 5t - 9,

x = y + z = 5t - 9 + 2t - 3 = 7t -12.

Ответ: x = 7t -12, y = 5t - 9, где t ЄZ.

Заключение

Математика, как и любая другая наука не стоит на месте, вместе с развитием общества меняются и взгляды людей, возникают новые мысли и идеи. И XX век не стал в этом смысле исключением. Появление компьютеров внесло свои корректировки в способы решения уравнений и значительно их облегчило. Но компьютер не всегда может быть под рукой (экзамен, контрольная), поэтому знание хотя бы самых главных способов решения уравнений необходимо знать.

В данной работе были представлены далеко не все способы решения уравнений. Я надеюсь, что моя работа может послужить неплохим справочным материалом при решении тех или иных уравнений.

В заключении хотелось бы отметить, что я не ставила себе цели показать все виды уравнений, а излагала лишь имеющийся у меня материал.

Вывод: Я исследовала различные методы для решения уравнений, чтобы развивать потребность в нахождении рациональных способов их решения. Я смогла подтвердить гипотезу о том, что при решении уравнений существуют различные способы, позволяющие формировать более осознанный подход к процессу выполнения решения.

В процессе работы, была создана система нестандартных приемов решения уравнений и разработан банк заданий, на основе которого проведена успешная апробация этих приемов.

Данный материал можно рекомендовать для внеклассных и факультативных занятий по математике, также для работы на уроках и при подготовки к ЕГЭ. Данным материалом могут воспользоваться и те, кто любит математику и хочет знать о математике больше.

Я постараюсь продолжить работу над этой темой дальше, чтобы находить и совершенствовать навыки интересных, нестандартных и оптимальных способов решения.

4.Список использованных источников и литературы

1) https://www.litmir.me/br/?b=279531&p=17
2) http://diofant.na.by/
3) www.a-elita.net/userfiles/File/.../Integer%20solutions_2012_10.pdf
4) http://math4school.ru/uravnenija_v_celih_chislah.html
5) Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. 1961
6) https://monster-evo.ru/bystro/kratkaya-biografiya-diofanta-referat-diofant-diofantovy-uravneniya-pust/
7) Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. 1961
8) М.Б. Балк, Г.Д. Балк. Математика после уроков. М, «Просвещение», 1971.

Приложение:

Метод прямого перебора

1)В загоне находятся одноглавые сороконожки и трехглавые змеи. Всего у них 298 ног и 26 голов. Сколько ног у трехглавых змей?
Решение:

- Пусть x количество сороконожек, а y количество трехглавых змей, тогда голов всего 3y+x=26.
- Обозначим за z количество ног у одного змея, тогда yz+40x=298.
- Получим систему уравнений: $\begin{cases} 3y + x = 26 \\ yz + 40x = 298 \end{cases}$

Решив систему, мы получили, что у трехглавых змей 14 ног.
Ответ: у трехглавых змей 14 ног.

2) Имеются контейнеры двух видов: по 130 кг и 160 кг. Сколько был контейнеров первого и сколько второго вида, если вместе они весят 3 тонны? Укажите все решения.
Решение.
Обозначим количество контейнеров первого вида через x, второго – через y.
Получаем уравнение 130x +160y = 3000 или 13x +16y = 300.
Далее имеем
13x +13y + 3y = 13·23 +1, 3y -1 = 13(23 - x - y).
Отсюда следует, что разность 3y -1 делится на 13.
Если 3y -1 = 0, то y не является натуральным числом.
Если 3y -1 = 13, то y не является натуральным числом.
Если 3y -1 = 26, то y = 9 и x = 12.
Если 3y -1 = 39, то y не является натуральным числом.
Если 3y -1 = 52, то y не является натуральным числом.
Если 3y -1 = 65, то y = 22, но 16 ·22 = 352 >300.
Ответ: 12 контейнеров по 130 кг и 9 по 160 кг.
3)Решить в натуральных числах уравнение 5x+8y=39.
Решение. Для уменьшения перебора вариантов рассмотрим неравенства:

$$\begin{cases} 5x = 39 - 8y \geq 0 \\ 8y = 39 - 5x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 4 \\ x \leq 7 \end{cases}$$

Проведем перебор по неизвестной y.
Если y = 1, то x = 6,2 не является натуральным числом.
Если y = 2, то x = 4,6 не является натуральным числом.
Если y = 3, то x = 3.
Если y = 4, то x = 1,4 не является натуральным числом.

Ответ: (3; 3).

4)Найти множество всех пар натуральных чисел, которые являются решениями уравнения:

$$49x + 51y = 602.$$

Решение. Выразим из уравнения переменную x через y, $x = \frac{602-51y}{49}$, так как x и y – натуральные числа, то $x = \frac{602-51y}{49} \geq 1$, $602 - 51y \geq 49$, $51y \leq 553$, $1 \leq 1043/51$. Полный перебор вариантов показывает, что натуральными решениями уравнения являются x = 5, y = 7.

Ответ: (5; 7).

5)В клетке сидят куры и кролики. Всего у них 20 лап. Сколько там может быть кур, а сколько - кроликов?

Решение:

Пусть у нас будет x кур и y кроликов. Составим уравнение: 2x+4y=20.

Сократим обе части уравнения на два: x+2y=10.

Следовательно, x=10-2y, где x и y - это целые положительные числа.

Ответ: Число кроликов и куриц: (1; 8), (2; 6), (3; 4), (4; 2), (5; 0)

.

6) У одной продавщицы были только пяти- и двухрублевые монетки. Сколькими способами она может набрать 57 рублей сдачи?

Решение:

Пусть у нас будет x двухрублевых и y пятирублевых монеток. Составим уравнение: 2x+5y=57.

Преобразуем уравнение: 2(x+2y)+y=57. Пусть z=x+2y. Тогда 2z+y=57.

Следовательно, y=57-2z, x=z-2y=z-2(57-2z) ⇒ x=5z-114.

Обратите внимание, переменная z не может быть меньше 23 (иначе x, число двухрублевых монеток, будет отрицательным) и больше 28 (иначе y, число пятирублевых монеток, будет отрицательным). Все значения от 23 до 28 нам подходят.

Ответ: Шестью способами.

Алгоритм Евклида

1)Рассмотрим уравнение 13x - 36y = 2.

1)36/13=2 (10 в остатке). Исходное уравнение можно переписать следующим образом: 13x-13*2y-10y=2. Преобразуем его: 13(x-2y)-10y=2. Введем новую переменную z=x-2y. Теперь мы получили уравнение: 13z-10y=2.

2)13/10=1 (3 в остатке). Исходное уравнение 13z-10y=2 можно переписать следующим образом:10z-10y+3z=2. Преобразуем его: 10(z-y)+3z=2. Введем

новую переменную m=z-y. Теперь мы получили уравнение: 10m+3z=2.
3)10/3=3 (1 в остатке). Исходное уравнение 10m+3z=2 можно переписать следующим образом:3*3m+3z+1m=2. Преобразуем его: 3(3m+z)+1m=2. Введем новую переменную n=3m+z. Теперьмы получили уравнение: 3n+1m=2.

Мы получили уравнение с коэффициентом единица!
m=2-3n, причем n может быть любым числом. Однако нам нужно найти x и y. Проведем замену переменных в обратном порядке. Помните, мы должны выразить x и y через n, которое может быть любым числом.

y=z-m; z=n-3m, m=2-3n ⇒ z=n-3*(2-3n), y=n-3*(2-3n)-(2-3n)=13n-8; y=13n-8

x=2y+z ⇒ x=2(13n-8)+(n-3*(2-3n))=36n-22; x=36n-22

Пусть n=1. Тогда y=5, x=14. 13 * (14)-36 * 5=2

Пусть n=5. Тогда y=57, x=158. 13 * (158)-36 * (57)=2

Применение цепных дробей

1)Решить в целых числах уравнение 127x - 52y + 1= 0

Решение. Преобразуем отношение коэффициентов при неизвестных. Прежде всего, выделим целую часть неправильной дроби $\frac{127}{52}$;

$$\frac{127}{52} = 2 + \frac{23}{52}$$

Правильную дробь $\frac{23}{52}$ заменим равной ей дробью$\frac{1}{\frac{52}{23}}$.

Тогда получим $\frac{127}{52} = 2 + \frac{1}{\frac{52}{23}}$. Проделаем такие же преобразования с полученной в знаменателе неправильной дробью $\frac{52}{23}$.

Теперь исходная дробь примет вид:

$$\frac{127}{52} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{23}{6}}}$$

Повторяя те же рассуждения для дроби $\frac{23}{6}$, получим:

$$\frac{127}{52} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{6}{5}}}}.$$

Выделяя целую часть неправильной дроби $\frac{6}{5}$, придем к окончательному результату:

$$\frac{127}{52} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}.$$

Мы получили выражение, которое называется конечной цепной или непрерывной дробью. Отбросив последнее звено этой цепной дроби – одну пятую, превратим получающуюся при этом новую цепную дробь в простую и вычтем ее из исходной дроби$\frac{127}{52}$:

$$2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{4}} = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9},$$

$$\frac{127}{52} - \frac{22}{9} = \frac{1143 - 1144}{52 \cdot 9} = -\frac{1}{59 \cdot 9}.$$

Приведем полученное выражение к общему знаменателю и отбросим его, тогда $127 \cdot 9 - 52 \cdot 22 + 1 = 0$.

Из сопоставления полученного равенства с уравнением $127x - 52y + 1 = 0$ следует, что $x = 9$, $y = 22$ будет решением этого уравнения, и согласно теореме все его решения будут содержаться в формулах $x = 9 + 52t$,

$y = 22 + 127t$, где $t \in Z$.

Ответ: $x = 9 + 52t$, $y = 22 + 127t$, где $t \in Z$.

Метод разложения на множители

1)Решить в целых числах уравнение $2x^3 + xy - 7 = 0$

Решение. Приведем данное уравнение к виду $x(2x^2 + y) = 7$.

Так как 7 =1· 7 = 7·1= -1·(-7) = -7 ·(-1), то рассмотрим четыре системы уравнений:

1) $\begin{cases} x = 1 \\ 2x^2 + y = 7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 7 \\ 2x^2 + y = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = -1 \\ 2x^2 + y = -7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = -7 \\ 2x^2 + y = -1 \end{cases}$

Из каждой системы получаем решения.

Ответ: (1;5); (-1;- 9);(7;-97); (-7;- 99).

2)Найти все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55.

Решение. Запишем условие задачи в виде уравнения n^2-k^2=55 или

(n-k)(n+k)=55. Так как n + k > 0 , то n - k >0 , причем n + k > n - k .

Поскольку 55 = 1· 55 = 5·11, то возможны два случая

$\begin{cases} n - k = 1 \\ n + k = 55 \end{cases}$ или $\begin{cases} n - k = 5 \\ n + k = 11 \end{cases}$

Решая эти уравнения, получим два ответа: n = 28, k = 27 и n = 8, k = 3.

Ответ: (28;27); (8;3).

3)Найти все целочисленные решения уравнения:

x + y = xy.

Решение. Проведем цепочку одинаковых преобразований:

$$x + y = xy \Leftrightarrow x + y - xy = 0 \Leftrightarrow x(1 - y) + y = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(1 - y) + (y - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = -1.$$

Поскольку −1 можно представить в виде произведения двух целых чисел с учетом порядка двумя способами (−1 = 1 · (−1) = (−1) · 1), получаем две системы:

$\begin{cases} x - 1 = 1, \\ 1 - y = -1, \end{cases}$ или $\begin{cases} x - 1 = -1, \\ 1 - y = 1. \end{cases}$

Решением первой системы является пара (2; 2), а второй (0; 0).

Ответ: (2; 2), (0; 0).

4)Решить в целых числах уравнение x^2-3xy+$2y^2$=11.

Решение.

Решим уравнение x^2-3xy+$2y^2$=0 относительно неизвестной x : $x_1 = y$ и $x_2 = 2y$

Тогда получаем (x - y)(x - 2y) =11.

Так как $11 = 1\cdot 11 = 11\cdot 1 = -1\cdot(-11) = -11\cdot(-1)$, то рассмотрим четыре системы уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x - 2y = 11, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 11, \\ x - 2y = 1, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = -1, \\ x - 2y = -11, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = -11, \\ x - 2y = -1. \end{cases}$

Из каждой системы получаем решения.

Ответ: (21;10); (-9;-10);(-21;-10); (9;10).

Метод остатков

1) Решить в целых числах уравнение $3^m + 7 = 2^n$.

Решение

1. Если m <0, то уравнение не имеет решений в целых числах.

Действительно, $0 < 3^m < 1$, тогда правая часть уравнения $3^m = 2^n - 7$ является целым числом при $n \geq 0$ (что невозможно) или правая часть уравнения $7 = 2^n - 3^m$ меньше 7 при $n < 0$.

2. Пусть m = 0, тогда из уравнения $2^n = 8$ получаем n = 3.

3. Теперь считаем, что m > 0. Так как уравнение содержит степень с основанием 3, то имеет смысл рассмотреть остатки при делении на 3. Левая часть исходного уравнения при делении на 3 имеет остаток 1.

Выясним, когда правая часть 2^n имеет остаток 1. Легко показать, что при четном n = 2k выражение.

$$2^{2k} = 4^k = (3+1)^k = 3^k + 3^{k-1} + \ldots + 3 + 1 = 3t + 1$$

имеет остаток 1. При нечетном n = 2k +1 выражение

$$2^{2k+1} = 2\cdot 4^k = 2(3t+1) = 6t + 2$$

имеет остаток 2.

Итак, n = 2k . Тогда уравнение запишем в виде $3^m = 2^{2k} - 7 = 4^k - 7$. Правая часть последнего уравнения имеет остаток 1 при делении на 4 (число –7 попадает в множество-класс остатков, содержащее 1).

Выясним, когда левая часть 3^n имеет остаток 1. Легко показать, что при четном m = 2 p выражение

$$3^{2p} = 9^p = (8+1)^p = 8^k + 8^{k-1} + \ldots 8 + 1 = 8s + 1$$

имеет остаток 1. При нечетном m = 2 p +1выражение

$$3^{2p+1} = 3\cdot 9^p = 3(8+1) + 24s + 3$$

имеет остаток 3.

Итак, m = 2 p . Тогда уравнение можно записать в виде

$$2^{2k} - 3^{2p} = 7 \text{ или } (2^k - 3^p)(2^k + 3^p) + 7$$

Так как $2^k + 3^p > 2^k - 3^p$ и $2^k + 3^p > 0$, то имеем единственный случай

$$\begin{cases} 2k + 3p = 7, \\ 2k - 3p = 1. \end{cases}$$

Отсюда получаем $k = 2$, $p = 1$ и $m = 2$,$n = 4$.

Ответ: $m = 2$, $n = 4$ или $m = 0$, $n = 3$

Метод бесконечного спуска

1)Решить в целых числах уравнение $79y - 23x = 1$.

Решение.

Проведем деление с остатком $79 = 23\cdot 3 + 10$ и перепишем исходное уравнение в виде

$$23x = 79y - 1 = 69y + 10y - 1,$$

$$23x - 69y = 10y - 1.$$

Левая часть последнего уравнения делится нацело на 23, поэтому и правая часть должна делиться на 23. Имеем $10y - 1 = 23t$, где $t \in Z$.

Для полученного нового уравнения повторим процедуру уменьшения коэффициентов.

$$10y = 23t + 1 = (2\cdot 10 + 3)t + 1;$$

$$10y - 20t = 3t + 1; \ 3t + 1 = 10u, \text{ где } u \in Z.$$

Проведем еще раз процедуру уменьшения коэффициентов.

$$3t + 1 = 10u = (3\cdot 3 + 1)u; \ 3t - 9u = u - 1;$$

$$u - 1 = 3n, \ n \in Z.$$

Выразим x и y через n. Так как $u = 3n + 1$, то

$$3t = 10u - 1 = 10(3n + 1) - 1 = 30n + 9;$$

$$t = 10n + 3.$$

$$10y = 23t + 1 = 23(10n + 3) + 1 = 230n + 70;$$

$$y = 23n + 7.$$

$$23x = 79y - 1 = 79(23n + 7) - 1 = 79\cdot 23n + 552;$$

$$x = 79n + 24.$$

Ответ: $x = 79n + 24$; $y = 23n + 7$, где $n \in Z$.

2)Решить в целых числах уравнение $147x - 25y = 14$.
Решение.
Числа 147 и –25 взаимно просты, следовательно, уравнение разрешимо в Z .
Найдем одно частное решение:

$$147 = (-25)\cdot(-5)+22,$$
$$- 25 = 22 \cdot(-2)+19,$$
$$22 =19 \cdot 1+33,$$
$$19 = 3\cdot 6+1.$$
$$1=19 - 3\cdot 6=19-6\cdot(22-19)=7\cdot 19-6\cdot 22=7\cdot(-25-22\cdot(-2))-6\cdot 22=7\cdot(-25)+8\cdot 22=$$
$$=7\cdot(-25)+8\cdot(147+5\cdot(-25))=8\cdot 147+47\cdot(-25)$$

Итак, $1=147\cdot 8+(-25)\cdot 47$. Следовательно, $14 =147 \cdot 112-25\cdot 658$.

Значит, пара чисел (112; 658) образует частное решение данного уравнения.
Следовательно, общее решение

$$\begin{cases} x = 112 + 25t \\ y = 658 + 147t, \end{cases}$$ где $t \in Z$.

3)Решить в целых числах уравнение $2x^2-5y^2=7$.
Решение.
Так как $2x^2$– четное число, а 7 – нечетное, то $5y^2$ должно быть нечетным, т.е. y – нечетное. Пусть $y = 2z +1$,где $z \in Z$, тогда данное уравнение можно переписать в виде $x^2-10z^2-10z=6$.
Отсюда видно, что x должно быть четным. Пусть $x = 2m$, тогда последнее уравнение примет вид $2m^2- 5 z (z+ 1)= 3$,что невозможно, так как число $z(z +1)$ - четно, а разность двух четных чисел не может быть равна нечетному числу. Таким образом, данное уравнение не имеет решений в целых числах.
Ответ: нет решений.
4)Решить в целых числах уравнение $2x^2-5y^2=z^2$
Решение. Запишем уравнение в виде $2x^2- z^2=5y^2$
Отсюда следует, что левая часть последнего уравнения кратна 5. Рассмотрим остатки при делении выражения $2x^2- z^2$ на 5.

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1
$2x^2$	0	2	3	3	2

Из таблицы видно, что для разрешимости в целых числах исходного уравнения числа x и z должны быть кратны 5.
Предположим, что $x = 5x_1$,$z =5z_1$,тогда исходное уравнение (после сокращения на 5) примет вид $10x_1^2-y^2=5z_1^2$

Отсюда следует, что значения y кратны 5,т.е. $y=5y_1$. Последнее уравнение (после сокращения на 5) примет тот же вид $2x_1^2-5y_1^2=z_1^2$,что и исходное уравнение.
Из приведенных рассуждений следует, что числа x, y и z должны быть кратными 5, далее числа x_1 , y_1 , z_1, т.е. $\frac{x}{5}, \frac{y}{5}, \frac{z}{5}$ также кратны 5. Итак, оказалось, что числа, удовлетворяющие исходному уравнению, должны делиться на 5, и сколько бы раз не делили эти числа, будем получать новые числа, которые также делятся на 5 и удовлетворяют уравнению. Единственное число, обладающее этим свойством, есть нуль. Следовательно, уравнение $2x^2-5y^2=z^2$ имеет единственное решение в целых числах (0;0;0).
Ответ: (0;0;0).