Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
лицей № 21 города Кузнецка

Научно-исследовательская работа по математике на тему:

«Решение уравнений и их систем с помощью скалярного произведения векторов».

Выполнил:

обучающаяся 10 «А» класса МБОУ лицея №21
города Кузнецка
Рафикова Алина Ринатовна

Научный руководитель:

учитель математики МБОУ лицея № 21
города Кузнецка
Букарева Ольга Алексеевна

Кузнецк, 2021

Цель:

Ознакомиться с векторным методом и показать его эффективность при решении уравнений, систем уравнений.

Задачи:

1) Собрать материал, изучить литературу.
2) Рассмотреть ряд приемов решения нестандартных и конкурсных задач.
3) Научиться узнавать задачи, решаемые векторным методом.
4) Использовать знания программного материала о векторах, научиться переводить данные и требования задачи с языка алгебры на язык векторов, а именно: найти координаты векторов, их длины и скалярное произведение, выполнять преобразования векторных выражений, переводить полученные результаты с языка векторов на алгебраический язык.
5) Научиться исследовать полученное задание.

Методы:

1) Работа с первоисточниками.
2) Исследовательский.
3) Сравнительный анализ.
4) Самостоятельный поиск решения.
5) Поисковый.

План:

Введение

Известный немецкий математик Курант писал: «На протяжении двух с лишним тысячелетий обладание некоторыми, не слишком поверхностными, знаниями в области математики входило необходимой составной частью в интеллектуальный инвентарь каждого образованного человека». И среди этих знаний было умение решать уравнения.

Многие математические задачи допускают несколько вариантов решения. Часто первый избранный бывает далеко не самым удачным. Нахождение наиболее простых, оригинальных путей решения нередко является результатом кропотливой работы. Умение решать задачу различными способами является одним из признаков хорошей математической подготовки.

В своей работе я рассматриваю нестандартный способ решения уравнений и систем уравнений с помощью векторного метода, применение которого в большинстве школьных учебников не рассматривается. Однако векторы могут быть успешно применены не только в геометрии, но и при изучении некоторых вопросов школьной алгебры. Довольно большое число задач существенно упрощается по сравнению с решениями, выполненными традиционным путем, а в некоторых случаях, особенно, когда много переменных, только такой подход и приводит к успеху.

Актуальность: предлагаемый метод намного упрощает ход решения уравнений и их систем, так как решение алгебраическим способом бывает часто громоздкими и не увлекательным. Данный метод позволяет проявить при решении творческие способности и выявить внутриматематические связи.

Работа будет полезна при подготовке к олимпиадам, конкурсам и итоговой аттестации.

Гипотеза: при решении уравнений и систем уравнений можно использовать скалярное произведение векторов, и этот метод может облегчить решение, сделать его более доступным.

Объект исследования: уравнения и системы уравнений.

Предмет исследования: векторный метод в решении уравнений и систем уравнений.

Задача из конкурса «Московская математическая регата».

В газете «Математика» при подготовке к олимпиадам увидела такую задачу: «Известно, что $9x^2+16y^2+144z^2=169$. При каких значениях переменных x, y, z выражение $6x-4y+24z$ принимает наибольшее значение?». Идея решения этой задачи очень понравилась. Для этого рассматривают два вектора $\vec{m}(3x, 4y, 12z)$ и $\vec{n}(2; -1; 2)$ такие, что $\vec{m}\cdot\vec{n}=6x-4y+24z$. Тогда $|\vec{m}|=\sqrt{9x^2+16y^2+144z^2}=13$, $|\vec{n}|=\sqrt{4+1+4}=3$. Так как $\vec{m}\cdot\vec{n}\le|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|$, то $6x-4y+24z\le 39$. Если векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены, то $\vec{m}\cdot\vec{n}=|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|$. Наибольшее значение выражения $6x-4y+24z$ равно 39, при этом координаты этих векторов пропорциональны, то есть

$$\frac{3x}{2}=\frac{4y}{-1}=\frac{12z}{2}>0.$$

отсюда $x=4z,\ y=-\frac{3}{2}z,\ z>0$. Подставив выражения для x и y в данное равенство, получим: $$24z+6z+24z=39,\quad 54z=39,$$

$$z=\frac{13}{18},\quad x=\frac{26}{9},\quad y=-\frac{13}{12}.$$

Ответ: наибольшее значение выражения $6x-4y+24z=39$ при

$x=\frac{26}{9},\quad y=-\frac{13}{12},\quad z=\frac{13}{18}$.

Решение этой задачи натолкнуло на такую мысль, нельзя ли решать некоторые уравнения и их системы с использованием скалярного произведения сонаправленных векторов. Оказывается, можно, и причем, очень эффективно.

Скалярное произведение векторов. Основные понятия.

При решении задач на скалярное произведение векторов необходимо помнить:

1) Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$$

В частности, скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2,$$

откуда $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$. Так как $|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})|\le 1$, то из определения получим:

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|, \qquad (1)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|. \qquad (2)$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то модуль скалярного произведения векторов равен произведению модулей этих векторов: $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. (3)

Если векторы сонаправлены, то из неравенства (2) получим:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|,$$

так как $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=1$, где $\angle(\vec{a},\vec{b})=0°$

2) Скалярное произведение двух векторов можно вычислять, зная координаты этих векторов. Пусть даны два вектора: $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$, тогда скалярное произведение этих векторов выражается формулой: $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляются по формулам:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2},$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

3) Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то координаты вектора $\vec{a}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{b}$: $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=k$, где $k\neq 0$.

Основная идея решения уравнений и их систем с помощью скалярного произведения двух ненулевых векторов.

Основная идея решения уравнений и их систем с помощью скалярного произведения двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ состоит в том, что мы должны доказать, что для данного уравнения или системы справедливо равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ (скалярное произведение векторов равно произведению их длин).

Как распознать уравнение или системы уравнений, которые можно решить векторным методом?

- Если уравнение или система содержит алгебраическое выражение вида $\sqrt{x^2+y^2}$ или $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ - то это длина некоторого вектора $\vec{a}(x;y)$ на плоскости или $\vec{a}(x;y;z)$ в пространстве. Возможны ситуации, когда $x^2+y^2+z^2=a$, то можно рассматривать вектор $\vec{b}(x;y;z)$, длина которого равна $\sqrt{a}$.
- Если уравнение или система содержит алгебраическое выражение вида $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$ или $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$, то его можно считать скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости или в пространстве.
- Если левую часть уравнения можно представить скалярным произведением некоторых векторов, а правую часть - произведением их длин.

Рассмотрим примеры.

I. Уравнения.

***Пример 1*. Решить уравнение с одним неизвестным:** $2\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=5$.

Решение.

Конечно, это уравнение можно решить традиционным способом (например, двойным возведением обеих частей уравнения в квадрат), я же на примере этого простого уравнения покажу алгоритм применения метода векторов.

Обозначу векторы: $\vec{a}\,(2;1)$ и $\vec{b}\,(\sqrt{x+1};\ \sqrt{4-x})$. Тогда $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

$|\vec{b}|=\sqrt{x+1+4-x}=\sqrt{5}$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\,\vec{b}=2\sqrt{x+1}+1\cdot\sqrt{4-x}=5$ (по условию) и $\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправленные, значит их одноимённые координаты пропорциональны:

$\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}} \quad\Rightarrow\quad 2\sqrt{x+1}=\sqrt{4-x}$, отсюда, после возведения в квадрат,

получаю: 4(x+1)=4-x, 4x+4=4- x, 5x=15, x=3. Сделав проверку, убеждаюсь, что x=3 – корень уравнения. Ответ: 3

***Пример 2*. Решить уравнение с двумя неизвестными:**

$$\sqrt{x}+\sqrt{2-y}\sqrt{3+2x}+\sqrt{6+y}\sqrt{6-3x}=9$$

Решение.

Обозначу векторы: $\vec{a}\,(1;\sqrt{2-y};\sqrt{6+y});\vec{b}(\sqrt{x};\sqrt{3+x};\sqrt{6-3x})$. Найду длины этих векторов: $|\vec{a}|=\sqrt{1+2-y+6+y}=\sqrt{9}=3;\quad |\vec{b}|=\sqrt{x+3+2x+6-3x}=\sqrt{9}=3$

Запишу скалярное произведение этих векторов:

$\vec{a}\,\vec{b}=1\cdot\sqrt{x}+\sqrt{2-y}\sqrt{3+2x}+\sqrt{6+y}\sqrt{6-3x}=9;\quad \vec{a}\,\vec{b}=\ |\vec{a}||\vec{b}|=9$

Векторы сонаправленные, значит их одноимённые координаты пропорциональны:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2-y}}{\sqrt{3+2x}}=\frac{\sqrt{6+y}}{\sqrt{6-3x}};$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{2-y}}{\sqrt{3+2x}}\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{6+y}}{\sqrt{6-3x}}\end{cases}\qquad \begin{cases}3+2x=x(2-y)\\ 6-3x=x(6+y)\end{cases}\qquad \begin{cases}xy=-3\\ 6-9x=xy\end{cases}\qquad \begin{cases}y=-3\\ x=1\end{cases}$$

Проверкой убеждаюсь, что (1; - 3) – решение уравнения. Ответ: (1; - 3)

Пример 3 **. Решить уравнение:**

$$2\sqrt{1-2x} - x\sqrt{2x+9} = \sqrt{10(x^2+4)}$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 1-2x \geq 0; \\ 2x+9 \geq 0. \end{cases}$

$4,5 \leq x \leq 0,5$ или $x \in [-4,5 ; 0,5]$

Если попробовать возвести в квадрат, то приду к виду:

$4(1-2x) + x^2(2x+9) - 10(x^2+4) = 4x\sqrt{1-2x} \cdot \sqrt{2x+9}$,

$$2x^3 - x^2 - 8x - 36 = 4x\sqrt{1-2x} \cdot \sqrt{2x+9}.$$

Возводя еще раз я приду к многочлену, где будет и x^6, и x^5 и т.д.

То есть явно задача намного усложнилась.Попробую использовать векторный метод.

Введу векторы $\vec{a}(\sqrt{1-2x}; \sqrt{2x+9})$, $\vec{b}(2;-x)$

Найду их скалярное произведение:

$\vec{a}\,\vec{b} = 2\sqrt{1-2x} - x\sqrt{2x+9} = \sqrt{10(x^2+4)}$ (по условию)

Найду длины $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и их произведение.

$|\vec{a}| = \sqrt{1-2x+2x+9} = \sqrt{10}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2^2+(-x)^2} = \sqrt{4+x^2}$;

$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{4+x^2} = \sqrt{10(x^2+4)}$.

Получила: $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, то есть векторы сонаправленные, значит их одноимённые координаты пропорциональны:

$\dfrac{\sqrt{1-2x}}{2} = \dfrac{\sqrt{2x+9}}{-x} \Rightarrow x^2(1-2x) = 4(2x+9)$,

$2x^3 - x^2 + 8x + 36 = 0$. Первый корень найду подбором: $x = -2$.

Далее по схеме Горнера:

	2	-1	8	36
-2	2	-5	18	0

уравнение $2x^2 - 5x + 18 = 0$ не имеет решений, т.к. $D < 0$. $x = -2$ удовлетворяет ОДЗ

Ответ: -2

***Пример 4*. Решить уравнение:** $x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$

Решение.

ОДЗ: $-1 \leq x \leq 3$.

Рассмотрю векторы $\vec{a}(\sqrt{1+x}; \sqrt{3-x})$ и $\vec{b}(x;1)$.

Найду их длины: $|\vec{a}| = \sqrt{1+x+3-x} = \sqrt{4} = 2$; $|\vec{b}| = \sqrt{x^2+1^2} = \sqrt{x^2+1}$

Скалярное произведение векторов: $\vec{a}\,\vec{b} = x\sqrt{1+x} + 1\sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$ (по условию), в то же время $|\vec{a}|\,|\vec{b}| = 2\sqrt{x^2+1}$. Векторы сонаправленные, значит их одноимённые координаты пропорциональны:

$\frac{\sqrt{1+x}}{x} = \frac{\sqrt{3-x}}{1}$, при $x>0$ получаю: $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$. Замечаю, что

$x = 1$ корень этого уравнения. Далее по схеме Горнера:

	1	-3	1	1
1	1	-2	-1	0

Квадратное уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0$ имеет два корня: $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Но $x = 1 - \sqrt{2}$ не удовлетворяет условию $x>0$. Проверкой убеждаюсь, что $x=1$, и $x = 1+\sqrt{2}$ являются корнями данного уравнения. Ответ: 1; $1+\sqrt{2}$

Пример 5 **. Решить уравнение:** $\sqrt{x^2-2x+2} + \sqrt{x^2-10x+29} = 5$

<u>Решение.</u>

Преобразую подкоренные выражения:

$\sqrt{x^2-2x+1+1} + \sqrt{x^2-10x+25+4} = 5$, или: $\sqrt{(x-1)^2+1^2} + \sqrt{(x-5)^2+2^2} = 5$.

Так как под каждым корнем сумма квадратов, то естественно предположить, что первый корень – длина вектора $\vec{a}$ (x-1; 1), второй корень- длина вектора $\vec{b}$ (5-x;2). Намеренно координаты вектора $\vec{b}$ беру не (x-5;2), а (5-x;2). Известно, что $(x-5)^2 = (5-x)^2$, но для нахождения суммы векторов мне выгодно взять вектор $\vec{b}$ (5-x;2). Тогда в левой части данного уравнения имею: $|\vec{a}| + |\vec{b}| = 5$ (по условию). А сейчас сложу векторы по формуле $\vec{a}(x_1, y_1) + \vec{b}(x_2, y_2) = \vec{a}+\vec{b}(x_1+x_2, y_1+y_2)$:

$\vec{a}$ (x-1; 1) + $\vec{b}$ (5-x; 2) = ($\vec{a}+\vec{b}$)(x-1+5-x;1+2)=($\vec{a}+\vec{b}$)(4;3).

Найду модуль этой суммы векторов: $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$.

Получила, что $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a}+\vec{b}| = 5$.

В векторном неравенстве $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a}+\vec{b}|$ знак равенства достигается тогда и только тогда, если векторы сонаправлены, т.е. коллинеарны, значит в нашем случае составляю пропорцию из одноимённых координат: $\frac{x-1}{5-x} = \frac{1}{2}$

Применю основное свойство пропорции (произведение крайних её членов равно произведению средних): 2х-2=5-х , 3х=7.Отсюда х=$\frac{7}{3}$.

Проверка: подставляю х=$\frac{7}{3}$ в исходное уравнение:

$$\sqrt{(\frac{7}{3})^2-2(\frac{7}{3})+2}+\sqrt{(\frac{7}{3})^2-10(\frac{7}{3})+29}=\sqrt{\frac{49}{9}-\frac{14}{3}+2}+\sqrt{\frac{49}{9}-\frac{70}{3}+29}=$$

$$\sqrt{\frac{49-42+18}{9}}+\sqrt{\frac{49-210+261}{9}}=\sqrt{\frac{25}{9}}+\sqrt{\frac{100}{9}}=\frac{5}{3}+\frac{10}{3}=\frac{15}{3}=5$$

Ответ: $\frac{7}{3}$

II. Системы двух уравнений с двумя переменными.

Пример 1 **. Решить систему уравнений:**

$$\begin{cases} x+2y=1, \\ x^2+y^2=\frac{1}{5}. \end{cases}$$

Решение.

I способ. Решу эту систему традиционным методом – методом подстановки.

$$\begin{cases} x=1-2y, \\ (1-2y)^2+y^2=\frac{1}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-2y, \\ 1-4y+4y^2+y^2=\frac{1}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-2y, \\ 5y^2-4y+\frac{4}{5}=0; \end{cases}$$

Решу второе уравнение системы:

$$5y^2-4y+\frac{4}{5}=0,$$
$$25y^2-20y+4=0,$$
$$(5y-2)^2=0;\ y=\frac{2}{5}.$$

Тогда $x=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$. Ответ: $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$.

II способ – с использованием скалярного произведения векторов.

а) введу векторы: $\vec{a}\,(x;y), \vec{b}\,(1;2)$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ надо выбрать так, чтобы скалярное произведение дало одно из уравнений системы, а квадрат модуля $|\vec{a}|^2$ равнялся левой части второго уравнения.

б) тогда скалярное произведение этих векторов равно: $\vec{a}\cdot\vec{b}=x+2y=1$
(то есть получила первое уравнение системы).

в) вычислю модули этих векторов:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

Сравнивая второе уравнение системы с $|\vec{a}|$, вижу, что

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

Тогда произведение длин этих векторов есть:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1.$$

г) проверю условие $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Исходная система равносильна следующей:

$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = 1, \\ |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 1. \end{cases}$, то есть $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправленные, то есть их координаты пропорциональны

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2}, \text{ тогда } y = 2x.$$

Подставляя это равенство в первое уравнение данной системы, получаю:

$$x + 2x = 1; \quad 5x = 1,$$

$$x = \frac{1}{5},\ y = \frac{2}{5}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

Преимущество этого способа заключается в том, что второе уравнение системы фактически я не решала.

Пример 2 **. Решить систему уравнений:**

$$\begin{cases} x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+y-2} \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $y \ge 1$ и $x \ge 1$. Введу векторы $\vec{a}$ (x,y), $\vec{b}$ ($\sqrt{y-1}$; $\sqrt{x-1}$). Левая часть первого уравнения системы является скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ т.е $\vec{a}\,\vec{b}$ =x $\sqrt{y-1}$ + y$\sqrt{x-1}$. Найду длины этих векторов и их произведения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{x+y-2}\ ; \quad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x+y-2}.$$

Из второго неравенства системы $2 = \sqrt{x^2 + y^2}$, тогда $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 2\sqrt{x+y-2}$.

Получила: $\vec{a}\ \vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Известно, что знак равенства в векторном неравенстве $\vec{a}\ \vec{b} \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ достигается тогда, когда векторы сонаправленные, т.е.:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{y-1}} = \dfrac{y}{\sqrt{x-1}} \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$x = y = \sqrt{2}$. Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{2})$

***Пример 3*. Решить систему уравнений:**

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 125} = 10 \end{cases}$$

<u>Решение.</u> Преобразую левую часть второго уравнения системы:

$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2} = 10.$

Пусть $\vec{a}$ (x-2; y+1), $\vec{b}$ (10-x; 5-y) $\Rightarrow$

$|\vec{a}| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2}$. Нахожу координаты суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и ее длину $\vec{a} + \vec{b} = (8;6)$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$. В соответствии с векторным неравенством $\vec{a} + \vec{b} \ge |\vec{a} + \vec{b}|$, равенство достигается, когда векторы сонаправленные. Значит: $\dfrac{x-2}{10-x} = \dfrac{y+1}{5-y} \Leftrightarrow 3x - 4y = 10$. Теперь с учетом первого уравнения системы имею:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ 3x + 4y = 26. \end{cases}$$ Отсюда $x = 6$, $y = 2$. Ответ: (6;2)

III. Системы двух уравнений с тремя переменными.

Рассмотрю именно такие системы уравнений, чтобы скалярное произведение выбранных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ дает левую часть одного из уравнений, а квадрат длины вектора $\vec{a}$ дает левую часть другого уравнения и так, чтобы выполнялось условие $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

***Пример 1*. Решить систему уравнений**

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

На первый взгляд, кажется, что данная система имеет бесчисленное множество решений, так как она содержит три переменных и два уравнения.

Введу векторы $\vec{a}(x;y;z), \vec{b}(1;1;1)$. Тогда скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}=x+y+z=1$ (видно из первого уравнения данной системы).

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}.$$

Тогда $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}=1$.

Исходная система равносильна следующей: $\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=1,\\ |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=1,\end{cases}$

то есть выполняется равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Откуда видно, что векторы сонаправлены и тогда их координаты пропорциональны: $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.

Это значит, что $x=y=z$.

С учетом условия $x+y+z=1$ (первое уравнение системы), получу, что $x=y=z=\frac{1}{3}$, то есть $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Проверкой убеждаюсь, что тройка чисел $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ является решением данной системы. Ответ: $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

***Пример 2*. Решить систему уравнений**

$$\begin{cases}2x^3+2y^3+z^3=3,\\ x^6+y^6+z^6=1.\end{cases}$$

<u>Решение.</u>

Рассмотрю векторы $\vec{a}(x^3;y^3;z^3), \vec{b}(2;2;1)$. Тогда

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^6+y^6+z^6}=\sqrt{1}=1,$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3;$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2x^3+2y^3+z^3=3.$$

Исходная система равносильна следующей: $\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=3,\\ |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=3.\end{cases}$

Учитывая, что векторы коллинеарны, то $\frac{x^3}{2}=\frac{y^3}{2}=\frac{z^3}{1}$.

Тогда $x^3=2z^3$, $y^3=2z^3$.

Подставляя значения x^3 и y^3 в первое уравнение, получу:

$$4z^3+4z^3+z^3=3,$$

$$9z^3=3,\ z^3=\frac{1}{3},\ z=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Тогда $$x^3=2z^3=\frac{2}{3},\ x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}},$$

$$y^3=2z^3=\frac{2}{3},\ y=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

Проверкой убеждаюсь, что тройка чисел $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}};\sqrt[3]{\frac{2}{3}};\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$ является решением данной системы. Ответ: $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}};\sqrt[3]{\frac{2}{3}};\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$.

***Пример 3*. Решить систему уравнений:**

$$\begin{cases}25x^{12}+16y^8+9z^4=1,\\ x^6+y^4+z^2=\frac{7}{15}.\end{cases}$$

Решение.

На первый взгляд, кажется, что эта система неопределенная (то есть имеет бесконечное множество решений). В действительности, система не имеет решений.

Рассмотрю векторы $\vec{a}(5x^6;4x^4;3x^2)$ и $\vec{b}(\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{1}{3})$. Тогда

$$|\vec{a}|=\sqrt{25x^{12}+16y^8+9z^4},$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{16}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{144+225+400}{3600}}=\frac{\sqrt{769}}{60},\ \sqrt{769}\approx 27{,}73;$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x^6+y^4+z^2.$$

Исходная система равносильна следующей: $\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{7}{15},\\ |\vec{a}|=1.\end{cases}$

С другой стороны, $\vec{a}\cdot\vec{b}=x^6+y^4+z^2<\frac{7}{15}$, так как $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=1\cdot\frac{\sqrt{769}}{60}<\frac{28}{60}=\frac{7}{15}$, то есть равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ не выполняется. А это противоречит второму уравнению системы. Значит, система не имеет решений. Ответ: система не имеет решений.

Пример 4 **. Решить систему уравнений:**

$$\begin{cases} 4x^2+25y^2+9z^2=1 \\ x-5y+z=\frac{7}{6} \end{cases}$$

Решение.

Если представить первое уравнение системы в виде: $(2x)^2+(5y)^2+(3z)^2=1$, то получу сумму квадратов трёх чисел, а значит, эту сумму можно представить как квадрат длины вектора, координаты которого и есть эти числа, т.е. $\vec{a}$ (2x; 5y; 3z) Теперь определю, какие координаты (b_1; b_2 ;b_3) должны быть у вектора $\vec{b}$. Явно, левая часть второго уравнения не может быть представлена как квадрат длины второго вектора. Попробую её представить в виде скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{a}\,\vec{b}=$ $2xb_1+5yb_2+3zb_3$

И $\vec{a}\,\vec{b}=x-5y+z=\frac{7}{6}$, тогда $2b_1=1$; $5b_2=-5$; $3b_3=1$, отсюда координаты вектора $\vec{b}$ ($\frac{1}{2};-1;\frac{1}{3}$). Длина вектора $|\vec{b}|=\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{49}{36}}=\frac{7}{6}$

$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=1\cdot\frac{7}{6}=\frac{7}{6}$ и $\vec{a}\,\vec{b}=\frac{7}{6}$. Таким образом $\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, векторы сонаправленные, их координаты пропорциональны:

$\frac{2x}{\frac{1}{2}}=\frac{5y}{-1}=\frac{3z}{\frac{1}{3}}$, т.е. $4x=-5y=9z$, откуда $y=-\frac{4x}{5}$, $z=\frac{4x}{9}$.

Эти значения подставляю во второе уравнение системы: Ответ: ($\frac{3}{14}$; $-\frac{6}{35}$; $\frac{2}{21}$)

Пример 5 **. Решить систему уравнений:**

$$\begin{cases} x-2y+32=15 \\ x^2+y^2+z^2=16 \end{cases}$$

Решение.

Рассуждаю аналогично предыдущему заданию. Пусть $\vec{a}$ (x, y, z),

$\vec{b}$ (1,-2,3). Тогда $\vec{a}\,\vec{b}$ = x – 2y + 3z = 15 (согласно условия); $|\vec{a}|=$ $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ = $\sqrt{16}$ = 4 (по условию).

$|\vec{b}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$; $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = 4\cdot\sqrt{14} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} > |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$,

т.е. $15>4\cdot\sqrt{14}$, что невозможно. Ответ: система не имеет решений.

***Пример 6*. Решить систему уравнений:**

$$\begin{cases} 36x^2 + 9y^4 + 4z^6 = 1 \\ x + y^2 + z^3 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Решение.

Пусть $\vec{a}$ (6x; 3y^2; 2z^3), $\vec{b}$ ($\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$). Тогда $\vec{a}\,\vec{b} = \frac{2}{3}$;

$|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{\frac{7}{18}} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} > |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, что невозможно.

Ответ: система не имеет решений.

***Пример 7*. Решить систему уравнений:**

$$\begin{cases} x^8+y^8+z^8=1 \\ x^4-2y^4+3z^4=\sqrt{42} \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрю векторы $\vec{a}$ (x^4 ; y^4 ; z^4) и $\vec{b}$ (1; -2; 3). Найду их длины:

$|\vec{a}| = \sqrt{x^8+y^8+z^8} = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\,\vec{b} = x^4 - 2y^4 + 3z^4 = \sqrt{42}$

$|\vec{a}|\,|\vec{b}| = \sqrt{14}$, получила:. $\sqrt{42} > \sqrt{14}$, что противоречит векторному неравенству $\vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, следовательно система не имеет решений.

Ответ: система не имеет решений.

IV. Системы трех уравнений с тремя переменными.

***Пример 1*. Решить систему уравнений:**

$$\begin{cases} 4x^2y^2+4y^2z^2+x^2z^2=9x^2y^2z^2, \\ x^2+4y^2+z^2=4, \\ 3x-6y+\sqrt{3}z=2. \end{cases}$$

Решение.

Так как $x=0, y=0, z=0$ не являются решениями системы, то, разделив обе части первого уравнения системы на $(xyz)^2$, получу систему, равносильную данной.

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{4}{z^2}=9, \\ x^2+4y^2+z^2=4, \\ 3x-6y+\sqrt{3}z=2. \end{cases}$$

Рассмотрю векторы $\vec{a}\ \left(\frac{2}{x};\frac{1}{y};\frac{2}{z}\right)$ и $\vec{b}(x;2y;z)$. Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=2+2+2=6$,

$$|\vec{a}|=\sqrt{\frac{4}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{4}{z^2}}=\sqrt{9}=3,$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{x^2+4y^2+z^2}=\sqrt{4}=2.$$

Таким образом, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, что означает коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и, значит, пропорциональность их координат: $\dfrac{2}{x}:x=\dfrac{1}{y}:2y=\dfrac{2}{z}:z$,

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2y^2}=\frac{2}{z^2},$$

откуда $x^2=\dfrac{2\cdot z^2}{2}=z^2;\quad y^2=\dfrac{z^2}{4}.$

Из второго уравнения исходной системы получу:

$$z^2+4\cdot\frac{z^2}{4}+z^2=4,$$

$$3z^2=4,\quad z^2=\frac{4}{3},$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно, $$x^2=\frac{4}{3},\quad x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$y^2=\frac{1}{3},\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Установлю, какие из значений x, y, z являются решениями третьего уравнения системы. Проверкой убеждаюсь, что только две тройки $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ являются решениями данной системы.

Ответ: $\left(\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Пример 2. **Решить систему уравнений:**

$$\begin{cases} x^4y^2z^2+x^2y^4z^2+x^2y^2z^4=3x^2y^2z^2, \\ x^4yz+xy^4z+xyz^4=3xyz, \\ x^6y^2z^2+x^2y^6z^2+x^2y^2z^6=3x^2y^2z^2. \end{cases}$$

Решение.

Очевидно, что тройка (0; 0; 0) является решением системы. Пусть $x\neq 0$; $y\neq 0$; $z\neq 0$. Тогда, разделив первое и третье уравнения системы на $x^2y^2z^2$, а второе – на xyz, получу

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ x^3+y^3+z^3=3, \\ x^4+y^4+z^4=3. \end{cases}$$

Рассмотрю векторы $\vec{a}(x;y;z)$ и $\vec{b}(x^2;y^2;z^2)$. Тогда

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{3},$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{x^4+y^4+z^4}=\sqrt{3},$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x^3+y^3+z^3=3;$$

то есть получу равносильную систему:

$$\begin{cases} |\vec{a}|=\sqrt{3}, \\ \vec{a}\cdot\vec{b}=3, \\ |\vec{b}|=\sqrt{3}. \end{cases}$$

Следовательно, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Из полученного равенства следует, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен нулю, и, учитывая условие $\frac{x}{x^2}=\frac{y}{y^2}=\frac{z}{z^2}$, получу $x=y=z$, то есть $\vec{a}=\vec{b}$.

Тогда решением системы является тройка чисел $(1;1;1)$.Ответ: $(0;0;0)$, $(1;1;1)$.

Пример 3 **. Решить систему уравнений:**

$$\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=3 \\ x+y+z=3 \\ \frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=3 \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрю векторы $\vec{a}(x;y;z); \vec{b}(\frac{1}{y};\frac{1}{z};\frac{1}{x}); \vec{c}(\frac{1}{z};\frac{1}{x};\frac{1}{y}); \vec{d}(1;1;1)$

Из первого уравнения следует равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}$ =3, из второго уравнения следует $\vec{a}\ \vec{d}$ =3, из третьего следует $\vec{a}\ \vec{c}$ =3. Так как $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\ \vec{c}$, то $\vec{b}=\vec{c}$, значит y=x=z. Аналогично $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\ \vec{d}$, следовательно $\vec{b}=\vec{d}$ и y=x=z=1

Ответ: (1; 1; 1)

***Пример 4*. Решить систему уравнений:**

$$\begin{cases} 2^x+2^y+2^z=6, \\ 4^x+4^y+4^z=12, \\ x^z+z^y+y^x=3. \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим векторы $\vec{a}\ (2^x;2^y;2^z)$ и $\vec{b}(1;1;1)$. Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2^x+2^y+2^z=6,$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{4^x+4^y+4^z}=\sqrt{12}=2\sqrt{3},\ |\vec{b}|=\sqrt{3},$$

значит, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=6$. Тогда координаты этих векторов пропорциональны: $\frac{2^x}{1}=\frac{2^y}{1}=\frac{2^z}{1}$, откуда $x=y=z$.

Подставляя эти значения в первое уравнение системы, получу, что

$$2^x+2^x+2^x=6,\quad 3\cdot 2^x=6,$$

$$2^x=2,\quad x=1.$$

Следовательно, $y=1, z=1$.

Тройка чисел $(1;1;1)$ является решением третьего уравнения системы, в чем можно убедиться проверкой: $1^1+1^1+1^1=3$, 3 = 3 (верно).

Ответ: $(1;1;1)$.

V. Системы уравнений с n переменными.

***Пример 1* . Решить систему уравнений:**

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+\ldots+\sqrt{1+x_{100}}=100\cdot\sqrt{1+\frac{1}{100}} \\ \sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\ldots+\sqrt{1-x_{100}}=100\cdot\sqrt{1-\frac{1}{100}} \end{cases}$$

Решение.

У первого уравнения 100 слагаемых и их сумма равна 100 · $\sqrt{1+\frac{1}{100}}$.

Значит, все слагаемые равны и $\sqrt{1+x}$ = $\sqrt{1+\frac{1}{100}}$. У второго уравнения также 100 слагаемых, и их сумма равна 100 · $\sqrt{1-\frac{1}{100}}$, значит, все слагаемые равны и $\sqrt{1-x}$ = $\sqrt{1-\frac{1}{100}}$.

Решая систему их двух уравнений, найду x:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x} = \sqrt{1+\frac{1}{100}} \\ \sqrt{1-x} = \sqrt{1-\frac{1}{100}} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1+x = 1+\frac{1}{100} \\ 1-x = 1-\frac{1}{100} \end{cases} \text{т.е } 2x = \frac{2}{100};$$

$x = \frac{1}{100}$

Докажу, что данный корень единственный. Попробую это сделать с помощью векторного метода. По условию n = 1, 2, …,100. Рассмотрю вектор $\vec{a}_n = (\sqrt{1+x_n};\ \sqrt{1-x_n})$. Длина каждого из векторов равна $\sqrt{1+x_n+1-x_n} = \sqrt{2}$.

Пусть $\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_{100} = \vec{A}$ По правилу сложения векторов и условия задания, вектор $\vec{A}$ имеет координаты $(100 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{100}};\ 100 \cdot \sqrt{1-\frac{1}{100}})$. Длина $|\vec{A}|$ =

$$\sqrt{10000(1+\frac{1}{100})+10000(1-\frac{1}{100})} = \sqrt{10000+100+10000-100} = \sqrt{20000} = 100\sqrt{2}.$$

Получила, что $|a_1+a_2+...+a_{100}| = |a_1| + |a_2| +…+|a_{100}|$ Поэтому эти векторы коллинеарны (сонаправлены). А так как их длины равны, то они равны между собой. Поэтому $x_1 = x_2 = ….. = x_{100} = \frac{1}{100}$.

Ответ: $\frac{1}{100}$

Заключение

Примененный мною векторный метод показывает новый, нетрадиционный подход к решению уравнений, что решение довольно большого числа примеров на решение уравнений и систем уравнений существенно упрощается по сравнению с решениями, выполненными традиционным путем, а в некоторых случаях, особенно, когда много переменных, только такой подход и приводит к успеху. Кроме того, векторы позволяют «сжать» информацию, сделать ее наглядной и оперативной, и тем самым способствуют поиску путей решения математических заданий.

Подводя итоги, можно дать общую схему решения системы уравнений с помощью векторов:

1) Введение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2) Вычисление модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и их скалярного произведения.
3) Проверка выполняемости равенства $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
4) Использования коллинеарности векторов: $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$.
5) Проверка и запись ответа.

Приведенные примеры иллюстрируют эффективное применение векторов при решении систем уравнений с двумя или с тремя переменными. Обычными традиционными методами решать такие системы не так просто. Работа будет полезна при подготовке к олимпиадам, конкурсам и итоговой аттестации.

Список литературы

1. Гальперин И.М, Габович И.Г «Использование векторного неравенства Коши-Буняковского для решения задач по алгебре» ,М.,«Педагогика» Математика в школе № 2, 1991
2. Литвинова С.А. и др. «За страницами учебника математики» Издательство «Панорама» 2006
3. «Математика в школе». № 6, 2003.
4. Погорелов А.В. и др. Геометрия 7–9. М: Просвещение. – 2017.
5. Погорелов А.В. и др. Геометрия 10–11. М: Просвещение. – 2017.
6. Рыжик В. И. «25000 уроков математики», М., Просвещение, 1993.
7. Газета «Математика» (Первое сентября). №22, 2005.