Управление образования города Пензы

МБОУ «Лицей современных технологий управления № 2» г.Пензы

Открытый региональный конкурс исследовательских и проектных работ школьников «Высший пилотаж - Пенза» 2022

«Теория чисел в задачах»

Выполнила: Егорова Варвара Александровна,

10 «В» класс,

муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

«Лицей современных технологий управления № 2» г. Пензы.

Руководитель: Хальметова Наиля Ханифовна,

Учитель математики,

муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Лицей современных технологий управления № 2» г. Пензы.

Пенза, 2022 год

- 440008, г. Пенза, ул. Бакунина, 115 - телефон /841-2/ 54-20-44;

e-mail: school02@guoedu.ru

http://www.lstu2.ru

Оглавление:

Введение

Актуальность исследования.

Теория чисел – очень обширная тема. Основные их свойства начинают изучать еще в 5 классе. Например, “наибольший общий делитель” и “наименьшее общее кратное” - одни из первых тем по математике в среднем звене. Элементарная теория чисел помогает решать различные задачи (в том числе олимпиадные), но многие забывают о простейших свойствах чисел. Последнее задание ЕГЭ профильной математики решают далеко не все. Согласно исследованиям, в 2020 году это задание решили 10,3% выпускников (1). Согласитесь, результаты неутешительные. А ведь задачи с применением теории чисел входят в материалы по подготовке не только к ЕГЭ и ОГЭ, но и к олимпиадам.

Проблема исследования:

Затруднения при решении на олимпиадах и низкий процент выполнения на ЕГЭ задач на “теорию чисел”.

Гипотеза.

Затруднения в решении этих задач возникают из-за того, что информация поступает к ученикам обрывочно. Темы, необходимые для решения, проходятся на протяжении всего времени обучения в среднем и старшем звеньях, поэтому о некоторых свойствах можно просто и не вспомнить. Следовательно, существует один или несколько методов по решению таких задач, доступных для учащихся 9-11 классов.

Цель исследования.

Систематизировать теоретический материал и выявить метод(ы) по решению задач на “теорию чисел”.

Задачи исследования:

- Найти причину затруднений при решении задач;
- Изучить теоретический материал, связанный с темой;
- Изучить осведомлённость учащихся 9-11 классов о задачах на теорию чисел;
- Изучить и классифицировать задачи;
- Составить подборку задач для изучения разных методов решения;
- Составить методическое пособие с методами решения задач;

Практическая значимость.

Материал проекта и его результат можно использовать в качестве основы при подготовке к олимпиадам, ОГЭ и ЕГЭ.

Методы исследования:

1. Эмпирический (изучение литературы по теме исследования, самостоятельное решение задач);
2. Обобщение и систематизация материала;
3. Экспериментально-теоретический (анализ и сравнение);

Новизна исследования:

Эта тема является для меня новой, и ее изучение позволит мне освоить решение новых видов задач, методы их решения и расширить спектр знаний и навыков для подготовки к итоговой аттестации.

Глава I

Из истории теории чисел.

Теория чисел в основном является наукой о системе обыкновенных целых чисел с присущими ей связями и законами. Целые числа составляют в большей мере как бы основу математики, а их законы обладают необыкновенной четкостью и прозрачностью, поэтому, по-видимому, К. Гаусс и назвал теорию чисел «царицей математики». Впервые теория чисел оформилась как наука в трудах знаменитого математика, члена Петербургской Академии наук Леонарда Эйлера.

Тем не менее, весомый вклад в становление теории чисел оказали пифагорейцы, Евклид и Диофант. Пифагорейцы рассматривали только целые положительные числа и полагали число собранием единиц. Единицы были неделимы и располагались в виде правильных геометрических тел. Изучая свойства чисел, они разбили их на чётные и нечётные, простые и составные.

Теория делимости появилась в 399 году до н. э. и принадлежит, по-видимому, Теэтету. В основе теории лежит алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел. Следствием алгоритма является возможность разложения любого числа на простые сомножители, а также единственность такого разложения. Закон однозначности разложения на простые множители является основой арифметики целых чисел.

Основные понятия.

Теория чисел (или высшая арифметика) — раздел математики, первоначально изучавший свойства целых чисел. В современной теории чисел рассматриваются и другие типы чисел, например, алгебраические и трансцендентные (вещественные и комплексные), а также функции различного происхождения, которые связаны с арифметикой целых чисел и их обобщений. По своим методам теория чисел делится на четыре части: элементарную, аналитическую, алгебраическую и геометрическую. Разберём каждую из них. (13)

- *Элементарная.*

В **элементарной теории чисел** целые числа изучаются без использования методов других разделов математики. Среди основных тематических направлений элементарной теории чисел можно выделить следующие:

1. Теория делимости целых чисел.
2. Алгоритм Евклида для вычисления наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного.
3. Разложение числа на простые множители и основная теорема арифметики.
4. Теория сравнений по модулю, решение сравнений.
5. Цепные дроби, теория приближений.
6. Диофантовы уравнения, то есть решение неопределённых уравнений в целых числах.
7. Изучение некоторых классов целых чисел — совершенные числа, числа Фибоначчи, фигурные числа и др.
8. Малая теорема Ферма и её обобщение: теорема Эйлера.

9. Нахождение пифагоровых троек, задача о четырёх кубах.
10. Занимательная математика — например, построение магических квадратов.

- *Аналитическая.*

Это раздел теории чисел, в котором свойства целых чисел исследуются методами математического анализа. Первым шагом в этом направлении стал метод производящих функций, сформулированный Эйлером. В аналитической теории чисел для вывода и доказательства утверждений о числах и числовых функциях используется мощный аппарат математического анализа, иногда также теория дифференциальных уравнений. Это позволило значительно расширить тематику исследований теории чисел. В частности, в неё вошли следующие новые разделы:

- Распределение простых чисел в натуральном ряду и в других последовательностях (например, среди значений заданного многочлена);
- Представление натуральных чисел в виде сумм слагаемых определённого вида (простых чисел, степеней, фигурных чисел и т. Д.);
- Диофантовы приближения.

- *Алгебраическая.*

Это раздел теории чисел, в котором свойства целых чисел исследуются методами математического анализа. Наиболее известные результаты относятся к исследованию распределения простых чисел.

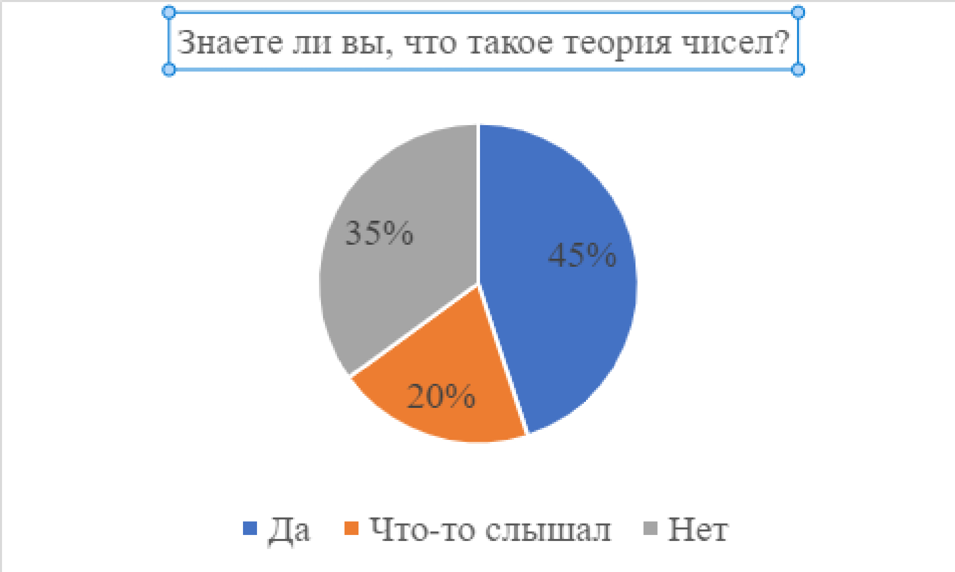
- *Геометрическая.*

В общих чертах эту теорию можно охарактеризовать как применение в теории чисел геометрических понятий и методов. Геометрическая теория чисел изучает в основном «пространственные решётки» — системы точек с целочисленными координатами (в прямоугольной или косоугольной системе координат).

Глава II

Социологический опрос.

Для того чтобы понять осведомлённость учащихся о задачах на теорию чисел, необходимо было провести социологический опрос. Т. к. задания на данную тему встречаются как в ОГЭ, так и в ЕГЭ, было решено провести опрос среди учеников 9-11 классов.



(рис. 1)

(рис. 2)

(рис. 3)

Исходя из опроса, немалая часть учеников не осведомлена о данной теме, но при этом многим было бы интересно её изучить.

Исследование и решение задач.

Рассмотрим несколько задач из ОГЭ, ЕГЭ и олимпиад.

1) Известно, что $a>b>c$. Какое из следующих чисел отрицательно?

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $a-b$

2) $a-c$

3) $b-c$

4) $c-b$

Рассмотрим все варианты ответа:

1) $a-b>0$, так как по условию $a>b$.

2) $a-c>0$, так как по условию $a>c$.

3) $b-c>0$, так как по условию $b>c$.

4) $c-b<0$, так как $c<b$.

Таким образом, $c-b$ — отрицательное число.

Правильный ответ указан под номером 4 (9)

2) Значение какого из данных выражений положительно, если известно, что $x>0$, $y<0$? *В ответе укажите номер правильного варианта.*

1) xy

2) $(x-y)y$

3) $(y-x)y$

4) $(y-x)x$

Заметим, что $x-y>0$, $y-x<0$. Имеем:

1) $xy<0$.

2) $(x-y)y<0$.

3) $(y-x)y>0$.

4) $(y-x)x<0$.

Правильный ответ указан под номером: 3.

Подобные задачи встречаются в ОГЭ, их уровень не сложный и решить их сможет почти каждый. Рассмотрим задания №19 из ЕГЭ базового уровня.

3) Приведите пример трёхзначного числа, сумма цифр которого равна 20, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.

Разложим число 20 на слагаемые различными способами:

$20 = 9 + 9 + 2 = 9 + 8 + 3 = 9 + 7 + 4 = 9 + 6 + 5 = 8 + 8 + 4 = 8 + 7 + 5 = 8 + 6 + 6 = 7 + 7 + 6.$

При разложении способами 1−4, 7 и 8 суммы квадратов чисел не кратны трём. При разложении пятым способом сумма квадратов кратна девяти. Разложение шестым способом удовлетворяет условиям задачи. Таким образом, условию задачи удовлетворяет любое число, записанное цифрами 5, 7 и 8, например, число 578.

4) Найдите четырёхзначное число, кратное 22, произведение цифр которого равно 24. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Произведение 24 дают следующие наборы из четырех цифр: 8, 3, 1, 1, или 6, 2, 2, 1, или 6, 4, 1, 1, или 4, 3, 2, 1, или 3, 2, 2, 2. Чтобы число делилось на 22, оно должно делиться и на 2, и на 11. Следовательно, это четное число — оно заканчивается четной цифрой. Число делится на 11, если сумма цифр, которые стоят на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах, либо отличается от неё на 11. Для первого, второго и пятого наборов суммы цифр нечетные, следовательно, суммы цифр, стоящих на четных и нечетных местах, не могут быть равны; они не могут также отличаться на 11 ни при какой перестановке цифр. Рассматривая второй и третий наборы, находим числа, удовлетворяющие всем условиям: 4312, 3124, 2134, 1342. (10)

Рассмотрим задания с ЕГЭ профильного уровня №18.

5) Известно, что *a*, *b*, *c*, и *d* — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство (a+c)/(b+d)=7/19?

б) Может ли дробь (a+c)/(b+d) быть в 11 раз меньше, чем сумма a/b+c/d?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь (a+c)/(b+d), если a>3b и c>6d?
а) Пусть a=10, b=20, c=11, d=37. Тогда (a+c)/(b+d)=21/57=7/19

б) Предположим, что 11* (a+c)/(b+d)= a/b+c/d

Тогда: $11(a+c)bd = (b+d)(ad+bc) \Leftrightarrow 11abd + 11bcd = abd + bcd + ad^2 + b^2c \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 10abd - ad^2 = b^2c - 10bcd \Leftrightarrow ad(10b-d) = bc(b-10d).$

С другой стороны имеем: $10b - d \geq 10 \cdot 10 - 99 > 0 > 99 - 10 \cdot 10 \geq b - 10d.$ Следовательно, числа $ad(10b-d)$ и $bc(b-10d)$имеют разные знаки и, значит, левая и правая часть в последнем равенстве не могут быть равны. Пришли к противоречию. Значит, данная дробь не может быть в 11 раз меньше суммы.

в) Из условия следует, что $99 \geq a \geq 3b+1$ и $c \geq 6d+1.$ Значит, $b \leq \frac{98}{3} < 33.$ Отсюда, учитывая, что число *b* целое, получаем, что $b \leq \frac{98}{3} < 33.$ Используя неравенства $a \geq 3b+1,\ c \geq 6d+1,\ b \leq 32$ и $d \geq 10,$ получаем:

$$\frac{a+c}{b+d} \geq \frac{3b+6d+2}{b+d} = 3+\frac{3d+2}{b+d} \geq 3+\frac{3d+2}{d+32} = 6-\frac{94}{d+32} \geq 6-\frac{94}{42} = \frac{79}{21}.$$

Пусть $a=97,\ b=32,\ c=61$ и $d=10.$ Тогда $\frac{a+c}{b+d}=\frac{158}{42}=\frac{79}{21}.$ Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\frac{a+c}{b+d}$ равно $\frac{79}{21}.$

Ответ: а) Да, например, если $a=10,\ b=20,\ c=11$ и $d=37;$ б) нет; в) $\frac{79}{21}.$

6) Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a>b>c>d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a+b+c+d=15$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=27$.

б) Может ли быть $a+b+c+d=19$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=19$?

в) Пусть $a+b+c+d=1000$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=1000$. Найдите количество возможных значений числа a.

а) Из условия получаем:

$$a^2-b^2+c^2-d^2-a-b-c-d=12 \Leftrightarrow (a-b)(a+b)+(c-d)(c+d)-a-b-c-d=12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-b-1)(a+b)+(c-d-1)(c+d)=12.$$

Поскольку $a+b+c+d=15>12,$ получаем: $a=b+1$ или $c=d+1.$

В первом случае из равенства $(c-d-1)(c+d)=12,$ учитывая, что $c-d-1<c+d<\frac{15}{2}$ и числа $c+d$ и $c-d-1$ имеют разную чётность, находим $c+d=4,\ c-d-1=3,$ чего не может быть.

Во втором случае из неравенства $(a-b-1)(a+b)=12,$ учитывая, что $a+b>\frac{15}{2},$ находим $a+b=12,\ a-b-1=1,$ откуда получаем: $a=7,\ b=5,\ c=2,\ d=1.$

б) Из условия получаем:

$$a^2-b^2+c^2-d^2=a+b+c+d \Leftrightarrow (a-b)(a+b)+(c-d)(c+d)=a+b+c+d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-b-1)(a+b)+(c-d-1)(c+d)=0.$$

Поскольку $a>b,$ получаем, что $a\geq b+1,$ то есть $a-b-1\geq 0,\ a+b>0.$ Аналогично, $c-d-1\geq 0,\ c+d>0,$ последнее равенство выполняется только при $a=b+1$ и $c=d+1.$ Значит, $2b+2d+2=19,$ что невозможно.

в) Из равенства $a^2-b^2+c^2-d^2=a+b+c+d$ получаем: $a=b+1,\ c=d+1.$ Значит, $2a+2d=1000;\ d=500-a.$ Получаем четвёрку чисел $(a;\ b;\ c;\ d)=(a;\ a-1;\ 501-a;\ 500-a).$ Поскольку $b>c,$ получаем: $a>251.$ Кроме того, $d>0,$ откуда $a<500.$

Значит, a принадлежит промежутку (251; 500). Более того, для любого целого a из этого промежутка найденная четвёрка чисел удовлетворяет условию задачи. Таким образом, a может принимать 248 значений.

Ответ: а) $a=7$, $b=5$, $c=2$, $d=1$; б) нет; в) 248. (11)

И, наконец, разберем пару заданий с различных олимпиад.

7) Докажите, что число, имеющее нечётное число делителей, является точным квадратом.

Если d – делитель числа n, то n/d – также делитель. Таким образом, все делители числа делятся на пары. Если число имеет нечётное число делителей, то делители какой-то пары совпадают. Тогда $d = n/d$, откуда $n = d^2$, то есть число n – квадрат целого числа.

8) Сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел оказалась кубом натурального числа. Докажите, что среднее из этих трёх чисел делится на 4.

В решении латинскими буквами везде обозначены натуральные числа. По условию, $(x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 = y^3$, или $3x(x^2+2) = y^3$. Значит, y делится на 3, $y = 3z$ и $x(x^2+2) = 9z^3$. Очевидно, НОД$(x, x^2+2) \le 2$. Пусть НОД$(x, x^2+2) = 1$. Тогда либо $x = 9u^3$ и $x^2+2 = v^3$, либо $x = u^3$, $x^2+2 = 9v^3$ при некоторых натуральных u, v. В первом случае $81u^6 + 2 = v^3$, что невозможно, так как куб целого числа при делении на 9 дает остаток 0 или ±1. Аналогично, второе равенство влечёт, что $u^6 + 2 = 9v^3$, что невозможно по тем же причинам. Итак, НОД$(x, x^2+2) = 2$, $x(x^2+2) = 9z^3$. Тогда x (и, следовательно, z) чётно, поэтому $x(x^2+2)$ делится на 8. Поскольку x^2+2 не делится на 4, получаем, что x делится на 4.

9) Назовём натуральное число *хорошим*, если среди его делителей есть ровно два простых числа. Могут ли 18 подряд идущих натуральных чисел быть хорошими?

Предположим, что нашлись 18 хороших чисел подряд. Среди них найдутся три числа, делящихся на 6. Пусть это числа $6n$, $6(n+1)$ и $6(n+2)$. Поскольку эти числа – хорошие, и в разложение каждого из них на простые множители входят двойка и тройка, других простых делителей у них быть не может. Лишь одно из трёх подряд идущих натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$ может делиться на 3. Значит, остальные два являются степенями двойки. Но пары степеней двойки, отличающихся не более чем на два, – это только (1, 2) и (2, 4); поэтому $n \le 2$. Однако тогда среди наших 18 чисел есть простое число 13 (так как $6n \le 13 \le 6(n+2)$), не являющееся хорошим. Противоречие.

Ответ: не могут. (12)

Выявление методов решения задач.

Решая задачи, я прибегала к следующим утверждениям, с помощью которых я пришла к ответу:

- Проверка того, поможет ли определение чётности числа (переменной);
- Если в задаче требуется определить, делится ли одно на другое, или встречается дробное выражение, прибегнуть к признакам делимости;
- Если надо сравнить два числа с третьим или друг с другом, могут пригодиться НОД и НОК;
- Если в задаче просят найти решение в целых числах, могут понадобиться знания о множителях и о простых числах;
- Если в задаче встречается многочлен, формулы сокращённого умножения могут помочь в решении;

Поскольку почти все задачи уникальны, не существует определённого метода по их решению. Но есть определённый блок знаний, который может помочь. И если свободно владеть этими знаниями, то можно отработать решение до интуитивного уровня.

Составление методического материала.

На основе выявленных утверждений я составила подборку задач для отработки материала. В начале в нем представлены рекомендации к решению, затем задачи, представленные блоками, на отработку тех или иных свойств чисел, например чётность, простота, признаки делимости и т.д. К первой задаче из каждого блока представлено решение в качестве примера. В конце сборника - ответы для проверки. Так же присутствуют задания повышенной сложности.

Глава III.

Заключение.

Подводя итог вышеизложенному, можно сказать о следующем - задания на теорию чисел имеют разные формулировки, и во всех них есть как сходства, так и различия. Существует множество способов решения таких задач и к каждой задаче может быть как одно, так и несколько решений. Они зависят от условия. Значит, что для успешного решения таких заданий нужно владеть множеством таких способов.

При работе с данной темой пришлось научиться мыслить шире, необходимо было актуализировать и систематизировать все имеющиеся знания. Изучение основных методов решения позволило освоить некоторые задания из ОГЭ (задание 7), ЕГЭ (задание 18).

Результат проекта.

На основе проделанной работы я составили методический материал по теме «Задачи на теорию чисел". Он состоит из 6 блоков заданий. Подобная форма является удобным и доступным инструментом для выработки умения решения данных задач. Служит хорошим практическим средством для развития интереса к изучаемому, повышения мотивации, быстрым способом отработки навыка.

Используемая литература:

1) https://4ege.ru/matematika/60233-srednij-procent-vypolnenija-zadanij-profilnogo-ege-po-matematike.html

2) https://ideafix.name/wp-content/uploads/stuff/book107.pdf
3) http://www.mathnet.ru/links/d2b6c3e6541d56f5a91747d0ccc979f0/intf147.pdf
4) https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB
5) https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB
6) http://algeom.samsu.ru/extra/books/number_theory.pdf
7) https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB
8) https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB
9) https://math-oge.sdamgia.ru/test?filter=all&category_id=1
10) https://mathb-ege.sdamgia.ru/test?filter=all&category_id=229
11) https://math-ege.sdamgia.ru/test?filter=all&category_id=172
12) https://infourok.ru/olimpiadnie-zadachi-po-matematike-teoriya-chisel-s-resheniem-1981110.html
13) https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB

РЕЦЕНЗИЯ

на научно-исследовательскую работу
Егоровой Варвары Александровны
(секция Математика)

«Теория чисел в задачах»
(научный руководитель -
учитель математики Хальметова Н.Х.)

Теория чисел в основном является наукой о системе обыкновенных целых чисел с присущими ей связями и законами. Целые числа составляют в большей мере основу математики. Основные их свойства начинают изучать еще в 5 классе. Элементарная теория чисел помогает решать различные задачи (в том числе олимпиадные), но последнее задание ЕГЭ профильной математики решают далеко не все. Согласно исследованиям, в 2020 году это задание решили 10,3% выпускников.

Задачи на теорию чисел входят в материалы для подготовки к урокам математики, факультативным занятиям, олимпиадам, ОГЭ, ЕГЭ.

Поэтому целью исследования стало изучение и поиск областей применения данных задач, а также способов их решения. Составлена подборка задач для отработки материала с представленными рекомендациями к решению. Задачи разной степени сложности поданы блоками, к первой задаче из каждого блока приведено решение в качестве примера. В конце сборника - ответы для проверки. Сборник служит хорошим практическим средством для развития интереса к изучаемому материалу, повышения мотивации, быстрым способом отработки навыка.

Гипотеза, выдвинутая автором исследования, о широком применении алгебраических задач на теорию чисел в практике подготовки к урокам математики, олимпиадам, итоговой аттестации и о способах решения подобных задач, доступных для учащихся 9-11 классов, подтверждается.

В работе установлены причины затруднений, связанных с решением задач на заданную тему; изучена их классификация и область применимости, составлена подборка задач для изучения разных методов решения задач из материалов учебника, олимпиад, ОГЭ, ЕГЭ. Также изучена осведомленность учащихся 9-11 классов о задачах на теорию чисел.

Работа имеет чёткую структуру и состоит из введения, основной части, заключения и списка литературы. Работа написана грамотным научным языком. Оформление работы в целом соответствует предъявленным требованиям.

Результаты исследования представлены достаточно полно и наглядно. Для представления результатов исследовательской работы используются диаграммы. Чётко сформулирована цель, заострено внимание на постановке конкретных задач. Введение выглядит достаточно содержательным и ёмким, приведен исторический материал. В результате чёткого изложения цели работы в основной части научно-исследовательской работы присутствует логичность и последовательность.

Список литературы включает разнообразные источники, оформленные в соответствии с требованиями.

Стиль изложения материалов исследовательской работы Егоровой Варвары научный. Работа имеет законченный характер и соответствует требованиям, предъявляемым к работам данного вида.

Рецензент:
Заместитель директора по НМР
МБОУ ЛСТУ № 2 Степанова А.С.

20.12.2021