МБОУ «Лицей современных технологий управления № 2» г.Пензы

IV открытый региональный конкурс проектных и исследовательских работ школьников «Высший пилотаж - Пенза» 2022

«Решение стереометрических задач методом координат»

Выполнил: Кошеваров Андрей Дмитриевич,
11 «В» класс,
муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Лицей современных технологий управления № 2» г.Пензы.

Руководитель: Гейдарова Людмила Руслановна,
учитель математики,
муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Лицей современных технологий управления № 2» г.Пензы.

Пенза
2022 год

✉ - **440008, г. Пенза, ул. Бакунина, 115**
☎ - **телефон /841-2/ 54-20-44; e-mail: school02@guoedu.ru**
http://www.lstu2.ru

Содержание:

1. Введение.

Стереометрия – раздел математики, имеющий наивысший коэффициент сложности при изучении в средней школе. Поэтому при анализе результатов ЕГЭ и оказывается, что очень большое количество сдающих экзамен не справляется с решением стереометрической задачи второй части экзаменационной работы. Трудность вызвали задания, в которых надо было найти углы между скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями, расстояние от точки до плоскости. Нахождение искомых углов стандартными геометрическими методами сопряжено с большими сложностями. Не секрет, что среди задач, предлагаемых к решению в учебнике геометрии 10-11 класса, очень малая их часть выходит за рамки прямоугольного треугольника с точки зрения планиметрии.

Стереометрические задачи ЕГЭ составлены с таким расчётом, что при их решении используются формулы и свойства, которые редко применяются при решении задач в школьном курсе геометрии. Причём эти свойства в учебнике, в большинстве случаев, представлены в качестве задач: одна задача – собственно формула, и ещё одна - две задачи на применение.

Целью данной работы является рассмотрение путей решения проблем, возникающих при решении стереометрических задач, представленных среди заданий единого государственного экзамена.

Задачи исследования:

- сравнить геометрический и координатный методы решения стереометрических задач;
- показать преимущество координатного метода для решения некоторых задач единого государственного экзамена.

Объектом исследования являются стереометрические задачи второй части профильного уровня ЕГЭ по математике (в настоящее время задание №13) и соответствующие им задачи школьного учебника.

Субъектом исследования является координатный метод решения указанных задач.

Гипотеза исследования основана на том, что для некоторых стереометрических задач второй части профильного уровня координатный метод является наиболее рациональным способом решения.

В работе применялись аналитический и сравнительный методы исследования поставленной задачи. Рассмотрено большое количество примеров, иллюстрирующих правильность выбранного пути.

Актуальность данной работы заключается в том, что в ней предлагаются рациональные способы решения стереометрических задач, вызывающих большие трудности у участников ЕГЭ. Данная работа имеет большую практическую направленность, так как может быть использована в качестве пособия при подготовке к единому государственному экзамену.

2. Основная часть.

2.1. Метод координат в пространстве

Многие задачи №13 ЕГЭ можно решать с применением метода координат. Для того, чтобы использовать метод координат, надо знать формулы[1].

1. Косинус угла α между векторами $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$:

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (1)$$

2. Координаты точки, принадлежащей отрезку[5].

Пусть отрезок задан своими концами - $A(x_A; y_A; z_A)$ и $B(x_B; y_B; z_B)$. Точка M делит его в отношении $\frac{\lambda}{m}$, считая от A.Тогда координаты $M\left(\frac{mx_A + \lambda x_B}{m+\lambda}; \frac{my_A + \lambda y_B}{m+\lambda}; \frac{mz_A + \lambda z_B}{m+\lambda}\right)$ (2) ,

а координаты середины отрезка $C\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ (2′)

3. Уравнение плоскости в трехмерном пространстве: Ax + By + Cz + D = 0 (3),
где A, B, C и D — действительные числа, причем, если плоскость проходит через начало координат, D = 0. А если не проходит, то D $\neq$ 0.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M(x_1; y_1; z_1)$, $N(x_2; y_2; z_2)$, $K(x_3; y_3; z_3)$, можно найти с использованием формулы (приложение2)[5]

$$\begin{vmatrix} x - x1 & y - y1 & z - z1 \\ x2 - x1 & y2 - y1 & z2 - z1 \\ x3 - x1 & y3 - y1 & z3 - z1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

4. Вектор, перпендикулярный к плоскости Ax+By+Cz+D = 0, имеет координаты: $\vec{n}\{A; B; C\}$.

5. Расстояние от точки $F(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости Ax + By + Cz + D = 0, где A, B, C и D — некоторые коэффициенты находится по формуле $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. (5)

Задача 1[1]. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}\{4;3;0\}$ и $\vec{b}\{0;12;5\}$.

Решение. Поскольку координаты векторов нам даны, подставляем их в формулу (1):

$$\cos\alpha = \frac{4\cdot0 + 3\cdot12 + 0\cdot5}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2}\sqrt{0^2 + 12^2 + 5^2}} = \frac{36}{65}$$

Ответ: 36/65

Задача 2[5]. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M(2; 0; 1), N(0; 1; 1) и K(2; 1; 0), если известно, что она не проходит через начало координат.

Решение. Поскольку искомая плоскость не проходит через начало координат точку (0; 0; 0), то положим D = 1. Поскольку эта плоскость проходит через точки M, N и K, то координаты этих точек должны обращать уравнение (3) в верное числовое равенство. Подставим вместо x, y и z координаты точки M(2; 0; 1). Имеем:

A · 2 + B · 0 + C · 1 + 1 = 0 ⇒ 2A + C + 1 = 0;

Аналогично, для точек N(0; 1; 1) и K(2; 1; 0) получим уравнения:

A · 0 + B · 1 + C · 1 + 1 = 0 ⇒ B + C + 1 = 0;

A · 2 + B · 1 + C · 0 + 1 = 0 ⇒ 2A + B + 1 = 0;

Итак, у нас есть три уравнения и три неизвестных. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A+C+1=0 \\ B+C+1=0 \\ 2A+B+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-0,25 \\ B=-0,5 \\ C=-0,5 \end{cases}$$

Получили, что уравнение плоскости имеет вид: − 0,25x − 0,5y − 0,5z + 1 = 0.

Умножим обе части на (-4), получим **Ответ:** $x+2y+2z-4=0$.

Рассмотрим способ решения по формуле (4):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-1 \\ 0-2 & 1-0 & 1-1 \\ 2-2 & 1-0 & 0-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(-1\cdot1-0\cdot1)+(y-0)(0\cdot0-(-2)\cdot(-1))+(z-1)(-2\cdot1-0\cdot1)=0$$

$$-x-2y-2z+4=0.$$

Умножим обе части на (-1), получим **Ответ:** $x+2y+2z-4=0$

Задача 3. Плоскость задана уравнением 7x − 2y + 4z + 1 = 0. Найти координаты вектора, перпендикулярного данной плоскости.

Решение. Используя п.4, получаем $\vec{n}\{7;-2;4\}$. **Ответ:** $\vec{n}\{7;-2;4\}$.

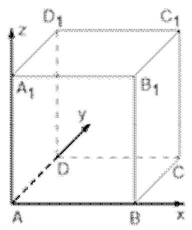
2.2. Введение системы координат

В задачах №13 никаких координат и векторов нет, поэтому их надо ввести.

Не имеет никакого значения, как именно вводить систему координат. Если все вычисления будут правильными, то и ответ будет правильным.

Приведем рекомендации, как лучше ввести систему координат для самых часто встречающихся в задаче №13 многогранников с указанием координат конкретных точек. Будем рассматривать многогранники, ребра которых равны. Для многогранников не с равными ребрами задача решается с учетом длин ребер.

а) Координаты вершин куба.



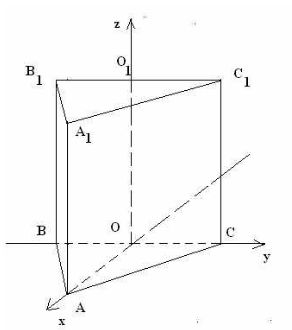
Введем систему координат: Начало координат — в точке A; ребро куба не указано, поэтому принимаем его за единичный отрезок; ось x направляем по ребру AB, y — по ребру AD, а ось z — по ребру AA_1. Теперь у каждой вершины куба есть координаты: A(0,0,0),B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0). Точки верхней плоскости отличаются соответствующих точек нижней только координатой z: A_1 (0; 0; 1), B_1(1,0,1), C_1(1,1,1), D_1(0,1,1).

рис.1

б) Координаты вершин трехгранной призмы.

В задачах 13 встречаются исключительно правильные трехгранные призмы. Вводим систему координат:

рис.2



Проведём высоту AO и перпендикуляр OO_1 к стороне BC. Начало координат — в точке O; сторону призмы принимаем за единичный отрезок, если иное не указано в условии задачи; ось x направляем по AO, y — по ребру BC, а ось z – по перпендикуляру OO_1. Т.к. сторона призмы равна 1 и это правильная призма, то OC = 0,5. По теореме Пифагора,

AO = $\sqrt{1^2-0{,}5^2} = \sqrt{0{,}75} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Тогда координаты вершин будут такими: O(0,0,0), $O_1(0,0,1)$, $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$,

$B\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$, $C\left(0,\frac{1}{2},0\right)$, $A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,1\right)$, $B_1\left(0,-\frac{1}{2},1\right)$, $C_1\left(0,\frac{1}{2},1\right)$ Точки верхнего основания призмы отличаются от соответствующих точек нижнего координатой z.

в) Координаты вершин шестигранной призмы.

Шестигранную призму можно разбить на шесть трехгранных, основаниями которых будут треугольники

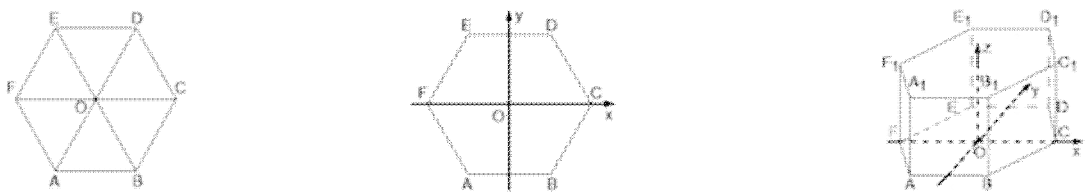


рис.3

Теперь введем систему координат. Начало координат — точку O — поместим в центр симметрии шестиугольника ABCDEF. Ось x направим вдоль FC, а ось y — через середины отрезков AB и DE. Начало координат не совпадает с вершиной многогранника. При решении таких задач это удобно, поскольку позволяет значительно уменьшить объем вычислений. Проводим ось z перпендикулярно плоскости OXY.

Предположим, что все ребра нашей правильной шестигранной призмы равны 1. Итак, координаты нижнего основания:

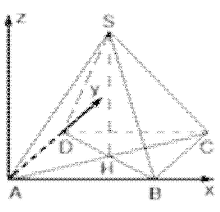
$A\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C(1;0;0)$, $D\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $E\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $F(-1;0;0)$. Координаты верхнего снования сдвинуты на единицу по оси z:

$A_1\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$, $B_1\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$, $C_1(1;0;1)$, $D_1\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$, $E_1\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$, $F_1(-1;0;1)$,

г) Координаты вершин четырехугольной пирамиды.

Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду, все ребра которой равны единице. В настоящих задачах №13 длины ребер могут отличаться, поэтому вычисления нужно производить с учетом их длин.

Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD, где S — вершина. Введем систему координат: начало в точке A, единичный отрезок AB = 1, ось x направим вдоль AB, ось y — вдоль AD, а ось z — вверх, перпендикулярно плоскости OXY. Высота SH будет параллельна оси z, построим ее.



Найдем координаты точек. Рассмотрим плоскость OXY. В основании лежит квадрат, его координаты мы уже знаем. Поскольку SH — высота к плоскости OXY, точки S и H отличаются лишь координатой z. Длина отрезка SH — это и есть координата z для точки S, поскольку H (0,5; 0,5; 0).

рис.4

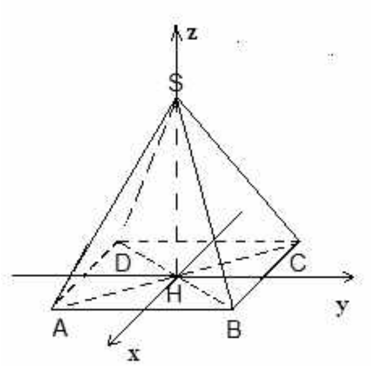
Заметим, что треугольники ABC и ASC равны по трем сторонам (AS = CS = AB = CB = 1, а сторона AC — общая). Следовательно, SH = BH. BH — половина диагонали квадрата ABCD, т.е. BH = AB · sin 45°. Получаем координаты всех точек:

$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $S\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Можно ввести систему координат по-другому. Введем систему координат: начало в точке H, единичный отрезок AB = 1, ось x направим через точку H, параллельно AD, AB, ось y —параллельно AB, а ось z — вверх, перпендикулярно плоскости OXY.

SH - высота.

рис.5



Найдем координаты точек. Рассмотрим плоскость OXY. В основании лежит квадрат, его координаты A (0,5;-0,5;0), B(0,5;0,5;0), C(-0,5;0,5;0), D(0,5;-0,5;0) мы уже знаем. Поскольку SH — высота к плоскости OXY, точки S и H отличаются лишь координатой z. Длина отрезка SH — это и есть координата z для точки $S\left(0;0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, поскольку H(0; 0; 0).

Мы рассмотрели лишь самые распространенные многогранники, однако этих примеров достаточно, чтобы самостоятельно вычислить координаты любых других фигур.

2.3. Базовые задачи на применение метода координат.

а) Вычисление координат векторов.

Теорема. Чтобы найти координаты вектора, надо из координат его конца вычесть координаты начала.

Задача 4. В пространстве расположены три точки, заданные своими координатами: A(1; 6; 3), B(3; − 1; 7) и C(− 4; 3; − 2). Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

Решение. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB}$. Его начало находится в точке A, а конец — в точке B. Следовательно, чтобы найти его координаты, надо из координат точки B вычесть координаты точки A: $\overrightarrow{AB}\{2;-7;4\}$

Аналогично, $\overrightarrow{AC}\{-5;-3;-5\}$, $\overrightarrow{BC}\{-7;4;-9\}$.

Ответ: $\overrightarrow{AB}\{2;-7;4\}$; $\overrightarrow{AC}\{-5;-3;-5\}$; $\overrightarrow{BC}\{-7;4;-9\}$.

б) Вычисление направляющих векторов для прямых.

На любой прямой найдутся хотя бы две различные точки и, наоборот, любые две различные точки задают единственную прямую.

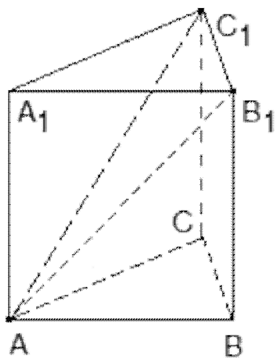
В задаче №13 прямые всегда задаются парой точек. Если ввести систему координат и рассмотреть вектор с началом и концом в этих точках, получим так направляющий вектор для прямой:

Угол между двумя прямыми — это угол между их направляющими векторами. Таким образом, мы переходим от прямых к конкретным векторам.

Задача 5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, проведены прямые AB_1 и AC_1. Найдите координаты направляющих векторов этих прямых.

Решение. Введем систему координат: начало в точке A, ось x совпадает с AB, ось z совпадает с AA_1, ось y образует с осью x плоскость OXY, которая совпадает с плоскостью ABC.

рис.6.



Для прямой AB_1. A(0; 0; 0) и $B_1(1; 0; 1)$ получаем направляющий вектор $\overrightarrow{AB_1}\{1;0;1\}$. Найдем направляющий вектор для AC_1. A(0; 0; 0), $C_1\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$, поэтому имеем: $\overrightarrow{AC_1}\left\{\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right\}$.

Ответ: $\overrightarrow{AB_1}\{1;0;1\}$; $\overrightarrow{AC_1}\left\{\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right\}$.

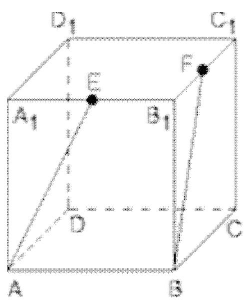
Если начало вектора совпадает с началом координат, то координаты вектора равны координатам конца. Такой вектор называется радиус-вектором.

в) Вычисление угла между двумя прямыми. Угол между двумя прямыми равен углу между их направляющими векторами. Таким образом, если найти координаты направляющих векторов $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$, то можно найти косинус угла по формуле (1).

Задача 6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки E и F — середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно. Найдите угол между прямыми AE и BF.

Решение. Так как ребро куба не указано, положим AB = 1. Введем систему координат: начало

рис.7



в точке A, оси x, y, z направим вдоль AB, AD и AA_1 соответственно. Единичный отрезок равен AB = 1. Теперь найдем координаты направляющих векторов для прямых.

Найдем координаты вектора AE. Для этого нам потребуются точки A(0; 0; 0) и E(0,5; 0; 1). Поскольку точка E — середина отрезка A_1B_1, ее координаты равны среднему арифметическому координат концов. Заметим, что начало вектора AE совпадает с началом координат, поэтому $\overrightarrow{AE}\{0,5;0;1\}$. Аналогично, B(1; 0; 0),

F(1; 0,5; 1), т.к. F — середина отрезка B_1C_1, то $\overrightarrow{BF}\{0;0,5;1\}$.

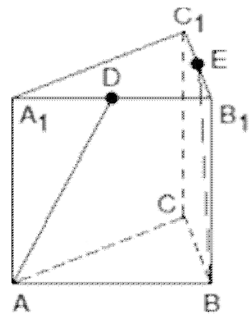
Направляющие векторы найдены. Имеем: $\cos\varphi = \dfrac{|0,5\cdot 0+0\cdot 0,5+1\cdot 1|}{\sqrt{0,5^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+0,5^2+1^2}} = \dfrac{1}{1,25} = 0,8$

Ответ: $\varphi = \arccos 0,8$

Задача 7. В правильной трехгранной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, отмечены точки D и E — середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно. Найдите угол между прямыми AD и BE.

Решение. Введем систему координат: начало координат в точке A, ось x направим вдоль AB, z — вдоль AA_1. Ось y направим так, чтобы плоскость OXY совпадала с плоскостью ABC. Единичный отрезок равен AB = 1. Найдем координаты направляющих векторов для искомых прямых. Найдем координаты вектора AD. Рассмотрим точки: A(0; 0; 0) и D(0,5; 0; 1), т.к. D — редина отрезка A_1B_1. Поскольку начало вектора AD совпадает с началом координат, получаем $\overrightarrow{AD}\{0,5;0;1\}$.

рис. 8



Теперь найдем координаты вектора BE. Точка B (1; 0; 0), точка E — середина отрезка C_1B_1. Имеем: $E\left(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};1\right)\Rightarrow \overrightarrow{BE}\left\{-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};1\right\}.$

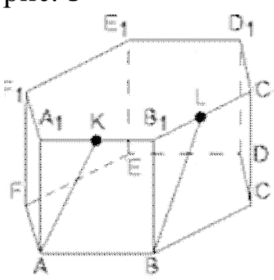
Найдем косинус угла: $$\cos\varphi=\frac{\left|\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+0\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+1\cdot 1\right|}{\sqrt{0,5^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+1^2}}=0,7$$

Ответ: $\varphi=\arccos 0,7$

Задача 8. В правильной шестигранной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, отмечены точки K и L — середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно. Найдите угол между прямыми AK и BL.

Решение. Введем систему координат: начало координат поместим в центр нижнего основания, ось x направим вдоль FC, ось y — через середины отрезков AB и DE, а ось z — вертикально

рис. 9



вверх. Единичный отрезок равен AB = 1. Выпишем координаты точек:

$A\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $K\left(0;-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$, $B\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $L\left(\frac{3}{4};-\frac{\sqrt{3}}{4};1\right)$.

Точки K и L — середины отрезков A_1B_1 и B_1C_1 соответственно, поэтому их координаты находятся через среднее арифметическое. Зная точки, найдем координаты направляющих векторов AK и BL:

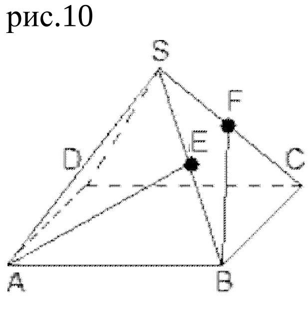
$\overrightarrow{AK}\left\{\frac{1}{2};0;1\right\}$, $\overrightarrow{BL}\left\{\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};1\right\}$.

Найдем косинус угла: $$\cos\varphi=\frac{\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+1\cdot 1\right|}{\sqrt{0,5^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+1^2}}=0,9$$. Ответ: $\varphi=\arccos 0,9$.

Задача 9. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, отмечены точки E и F — середины сторон SB и SC соответственно. Найдите угол между прямыми AE и BF.

Решение. Введем систему координат: начало в точке A, оси x и y направим вдоль AB и AD со-

рис.10



ответственно, а ось z направим вертикально вверх. Единичный отрезок AB = 1. Точки E и F — середины отрезков SB и SC соответственно, поэтому их координаты находятся как среднее арифметическое концов. Выпишем координаты точек: A (0; 0; 0), B(1; 0; 0), $E\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $F\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. Зная координаты точек, найдем координаты направляющих векторов AE и BF: $\overrightarrow{AE}\left\{\frac{3}{4};\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$, $\overrightarrow{BF}\left\{-\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$.

Координаты вектора AE совпадают с координатами точки E, поскольку точка A — начало координат. Осталось найти косинус

угла: $$\cos\varphi = \frac{\left|\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}} = \frac{1}{6}.\frac{1}{2}$$

Ответ: φ =arccos (1/6)

г) Вычисление нормальных векторов для плоскостей.

Нормальный вектор (нормаль) к плоскости – это вектор, перпендикулярный данной плоскости, т.е. это вектор, перпендикулярный любому вектору в данной плоскости.

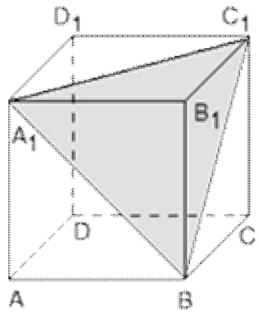
Всякая плоскость задается в пространстве уравнением Ax + By + Cz + D = 0, где A, B, C и D — некоторые коэффициенты. Можно полагать D = 1, если плоскость не проходит через начало координат, или D = 0, если проходит. Координаты нормального вектора к этой плоскости равны $\vec{n}\{A;B;C\}$.

Плоскость тоже можно заменить вектором —нормалью. Всякая плоскость задается в пространстве тремя точками. Найдем уравнение плоскости (а следовательно — и нормали).

Задача 10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение A_1BC_1. Найти нормальный вектор для плоскости этого сечения, если начало координат находится в точке A, а оси x, y и z совпадают с ребрами AB, AD и AA_1 соответственно.

Решение. Поскольку плоскость не проходит через начало координат, ее уравнение выглядит

рис.11



так: Ax + By + Cz + 1 = 0, т.е. коэффициент D = 1. Поскольку эта плоскость проходит через точки A_1, B и C_1, то координаты этих точек обращают уравнение плоскости в верное числовое равенство.

Подставим вместо x, y и z координаты точки $A_1(0; 0; 1)$. Имеем:

$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow C + 1 = 0 \Rightarrow C = -1$;

Аналогично, для точек B(1; 0; 0) и $C_1(1; 1; 1)$ получим уравнения:

$A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow A + 1 = 0 \Rightarrow A = -1$;

$A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow A + B + C + 1 = 0$;

Но коэффициенты A = −1 и C = − 1 нам уже известны, поэтому остается найти коэффициент B: B = − 1 − A − B = − 1 + 1 + 1 = 1.   Получаем уравнение плоскости: − A + B − C + 1 = 0. Следовательно, координаты нормального вектора $\vec{n}\{-1;1;-1\}$. Ответ: $\vec{n}\{-1;1;-1\}$.

При решении таких задач надо составлять систему уравнений и решать ее. Получится три уравнения с тремя переменными, но во втором случае одна из них будет свободной, т.е. принимать произвольные значения, поэтому можно положить B = 1.

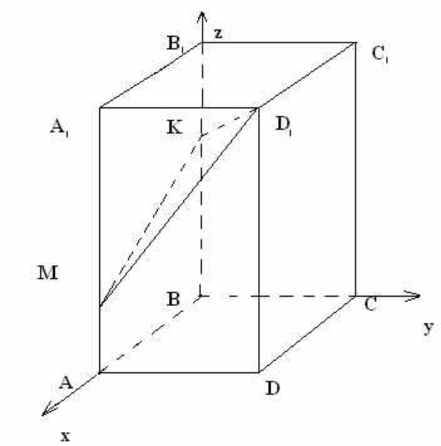
д) Вычисление угла между двумя плоскостями. Косинус угла между двумя плоскостями равен модулю косинуса угла между их нормальными векторами.

Задача 11. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1\ B_1C_1D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что AM=2. На ребре BB_1 взята точка K так, что B_1K=2. Найдите угол между плоскостью, проходящей через точки D_1, M, K и плоскостью CC_1D_1, расстояние от точки B_1 до плоскости D_1MK.

Решение. Запишем координаты точек, принимая т. B за начало координат: B(0;0;0), M(4;0;2);

K(0;0;5), D_1(4;4;7), B_1(0;0;7). Найдем нормали к плоскостям (D_1MK) и (CC_1D_1). Для плоскости CC_1D_1 нормальным вектором является вектор $\overrightarrow{BC}\{0;4;0\}$.

рис.12



Найдем вектор нормальный к плоскости D_1MK, решив систему уравнений. $\begin{cases} 4A+2C+D=0 \\ 5C+D=0 \\ 4A+4B+7C+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{3}{4}C \\ B=-\frac{5}{4}C \\ D=-5C \end{cases} \Rightarrow$

$3x-5y+4z-20=0, \quad \vec{n}\{3;-5;4\}$

$$\cos\varphi=\frac{|0\cdot3+1\cdot(-5)+0\cdot4|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{50}}=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi=45°.$$

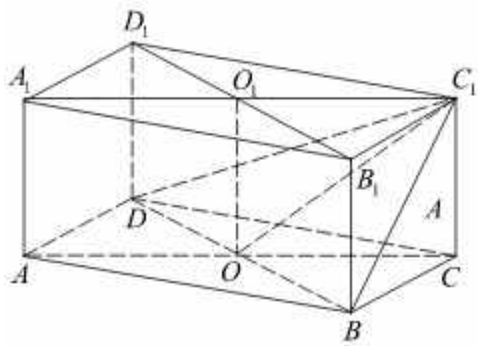
$$d=\frac{|3\cdot0-5\cdot0+4\cdot7-20|}{\sqrt{3^2+(-5)^2+4^2}}=\frac{8}{5\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{5}.$$

d - расстояние от точки B_1 до плоскости D_1MK. Ответ: $\varphi=45°$, $\frac{4\sqrt{2}}{5}$.

е) Вычисление угла между прямой и плоскостью. Угол между прямой и плоскостью находится как arcsin(cosα), где α – острый угол между направляющим вектором прямой и вектором нормали к плоскости.

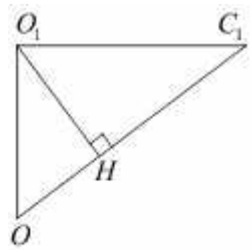
2.4. Рассмотрим задачу.

Задача1[8]. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб ABCD, у которого AB = 10, BD = 12. Высота призмы равна 6. Найдите расстояние от центра грани $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости BDC_1.



Решение:

1 способ: Пусть O_1 — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Плоскость AA_1C_1 пересекает плоскость BDC_1 по прямой C_1O, где O — середина отрезка BD. Прямая BD перпендикулярна плоскости AA_1C_1 поскольку перпендикулярна прямым OO_1 и AC. Следовательно, плоскости AA_1C_1 и BDC_1 перпендикулярны. Поэтому расстояние от точки O_1 до плоскости BDC_1 равно высоте O_1H прям угольного треугольника OO_1C.



Из условия следует, что:

$$OO_1=6,\ O_1D_1=6,\ O_1C_1=\sqrt{C_1D_1^2-O_1D_1^2}=8.$$

$$O_1H=\frac{O_1C_1\cdot OO_1}{\sqrt{O_1C_1^2+OO_1^2}}=\frac{8\cdot6}{10}=4,8.$$

Откуда: **Ответ:** 4,8.

2 способ (метод координат):

1) Введем систему координат. В основании данного параллелепипеда ромб, за начало системы координат возьмем точку пересечения его диагоналей , так как они взаимно перпендикулярны. Таким образом, O (0;0;0).

Тогда O_1 (0;0;6), B (-6;0;0), D(6;0;0), C_1 (0;8;6).

2)Уравнение плоскости имеет вид : Ax + By + Cz+d = 0. Так как плоскость проходит через начало координат d=0. Подставим вместо x, y и z координаты точки B=(-6; 0; 0). Имеем:

$$A \cdot (-6) + B \cdot 0 + C \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow 6A=D \Rightarrow A=0$$

Аналогично, для точек D = (6; 0; 0) и C_1 = (0; 8; 6) получим уравнения:

$$A \cdot 6 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow A=0$$

$$A\cdot 0 + B\cdot 8 + C\cdot 6 + 1 = 0 Þ 8B = -6C Þ B = -\frac{3}{4}$$

Получили: $0x - \frac{3}{4}cy + cz = 0$. Умножим на 4/c. Тогда уравнение плоскости имеет вид: x-3y+4z=0.

3)По формуле для нахождения расстояния от точки до плоскости получаем:

$$d = \frac{|0\times 0 - 3\times 0 + 4\times 6|}{5} = \frac{24}{5} = 4,8$$ **Ответ**: 4,8.

3 способ (вычисление по формуле (4)):

Так как плоскость проходит через точки B (-6;0;0), D(6;0;0) и C1(0;8;6)

$$\begin{vmatrix} x - x1 & y - y1 & z - z1 \\ x2 - x1 & y2 - y1 & z2 - z1 \\ x3 - x1 & y3 - y1 & z3 - z1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x+6 & y-0 & z-0 \\ 6+6 & 0-0 & 0-0 \\ 0+6 & 8-0 & 6-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+6 & y-0 & z-0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+6)(0\times 6 - 0\times 8) - (y-0)(12\times 6 - 6\times 0) + (z-0)(12\times 8 - 6\times 0) = 0$$

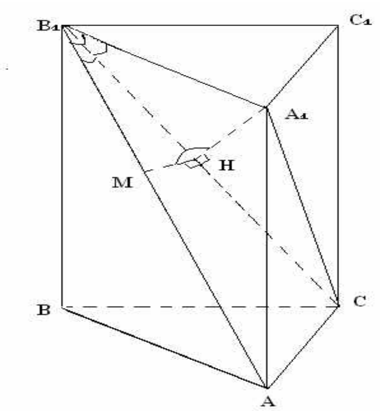
Тогда уравнение плоскости имеет вид: $0x - 72y + 96z = 0$

Тогда $d = \frac{|0\times 0 + 0\times(-72) + 96\times 6|}{\sqrt{72\times 72 + 96\times 96}} = \frac{576}{\sqrt{9216+5184}} = \frac{576}{120} = 4,8$ **Ответ**: 4,8.

Задача 2[(2)]. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Все ребра равны 1. Найти косинус угла между плоскостями (AB_1C) и (A_1B_1C).

Решение. Проведем $A_1H \perp B_1C$ и $HM \perp B_1C$. Угол A_1HM - искомый.

1 способ. 1) $\Delta A_1B_1C: A_1B_1 = 1;\ A_1C = B_1C = \sqrt{2}$ как диагонали квадрата. По теореме косинусов



$$\cos\angle A_1B_1C = \frac{A_1B_1^2 + B_1C^2 - A_1C^2}{2A_1B_1\times B_1C} = \frac{1}{2\sqrt{2}};$$

$$\sin\angle A_1B_1C = \sqrt{1-\cos^2\angle A_1B_1C} = \sqrt{\frac{7}{8}}.$$

$$A_1H = A_1B_1\sin\angle A_1B_1C = \sqrt{\frac{7}{8}},\quad B_1H = A_1B_1\cos\angle A_1B_1C = \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

$$2)\ B\ \Delta AB_1C\quad \cos\angle\Delta AB_1C = \frac{AB_1^2 + B_1C^2 - AC^2}{2AB_1\times B_1C} = \frac{3}{4}$$

3) $В\ \triangle B_1HM,\ \angle H = 90^\circ:\ B_1M = \dfrac{B_1H}{\cos\angle\triangle AB_1C} = \dfrac{\sqrt{2}}{3},\ MH = \sqrt{B_1M^2 - B_1H^2} = \dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{7}{2}}.$

4) $В\ \triangle B_1MA_1,\ \angle B_1 = 45^\circ:\ MA_1^2 = B_1A_1^2 + B_1M^2 - 2B_1A_1 \cdot B_1M = \dfrac{5}{9},\ MA_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{3}.$

5) $В\ \triangle A_1HM:\ \cos\angle\triangle A_1HM = \dfrac{A_1H^2 + MH^2 - A_1M^2}{2A_1H \cdot MH} = \dfrac{5}{7}.$ **Ответ:** $\cos\angle A_1HM = \dfrac{5}{7}$.

2 способ. Воспользуемся теоремой косинусов для трехгранного угла. (Приложение1) $\angle B_1$ - трёхгранный, против искомого угла грань B_1A_1A.

$$\cos\angle A_1HM = \frac{\cos\angle AB_1A_1 - \cos\angle AB_1C \cdot \cos\angle A_1B_1C}{\sin\angle AB_1C \cdot \sin\angle A_1B_1C}$$

1) $\angle AB_1A_1 = 45^\circ$, т.к. AB_1 - диагональ квадрата .

2) В $\triangle AB_1C$ $\angle AB_1C = 90^\circ$

$$AC^2 = AB_1^2 + CB_1^2 - 2AB_1 \cdot CB_1 \cdot \cos\angle AB_1C,\quad \cos\angle AB_1C = \frac{2+2-1}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

$$\sin\angle AB_1C = \sqrt{1-\cos^2\angle AB_1C} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

3) $В\ \triangle B_1A_1C: \cos\angle A_1B_1C = \dfrac{A_1B_1^2 + B_1C^2 - A_1C^2}{2A_1B_1 \cdot B_1C} = \dfrac{\sqrt{2}}{4},\quad \sin\angle A_1B_1C = \sqrt{1-\cos^2\angle A_1B_1C} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$

4) $\cos\angle A_1HM = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{7}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{14}}{4}} = \dfrac{\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{2}\cdot 7}{16}} = \dfrac{5}{7}$ **Ответ:** $\cos\angle A_1HM = \dfrac{5}{7}$.

Мы рассмотрели решение задачи двумя способами. Первый способ плох тем, что достаточно сложно найти искомый угол и необходимо рассматривать много треугольников, второй - тем, что увидеть теорему косинусов достаточно сложно. Решим задачу **координатным методом**. Для этого надо найти коэффициенты уравнений плоскостей, проходящих через 3 точки, которые являются координатами нормального вектора плоскости. Углы между плоскостями найдем как углы между векторами, перпендикулярными к ним.

Составим уравнение плоскостей, проходящих через 3 точки. $A_1(0,0,1)$, $C_1\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$,

(ACB_1) : $A(0,0,0)$, $C\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $B_1(1,0,1)$: $\begin{cases} 0A + 0B + 0C + 0 = 0 \\ 1A + 0B + 1C = 0 \\ \dfrac{1}{2}A + \dfrac{\sqrt{3}}{2}B + 0C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -A \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}B = -\dfrac{1}{2}A \\ B = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}A \end{cases} \Rightarrow$

Уравнение плоскости $Ax - \dfrac{\sqrt{3}}{3}Ay - Az = 0 \Rightarrow 3x - \sqrt{3}y - 3z = 0$. Вектор нормали $\vec{n}\{3; -\sqrt{3}; -3\}$.

$$(A_1C_1B_1):\ \begin{cases} 0A+0B+1C+D=0 \\ 1A+0B+1C+D=0 \\ \frac{1}{2}A+\frac{\sqrt{3}}{2}B+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-D \\ A=0 \\ B=-\frac{2}{\sqrt{3}}D \end{cases} \Rightarrow\ 0x-\frac{2}{\sqrt{3}}Dy-Dz+D=0$$

$0x-2y-\sqrt{3}z+\sqrt{3}=0.$ Вектор нормали $\vec{m}\left\{0;-2;-\sqrt{3}\right\}$. $\cos\varphi=\dfrac{|0+2\sqrt{3}+3\sqrt{3}|}{\sqrt{9+3+9}\sqrt{4+3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{21}\sqrt{7}}=\dfrac{5}{7}.$

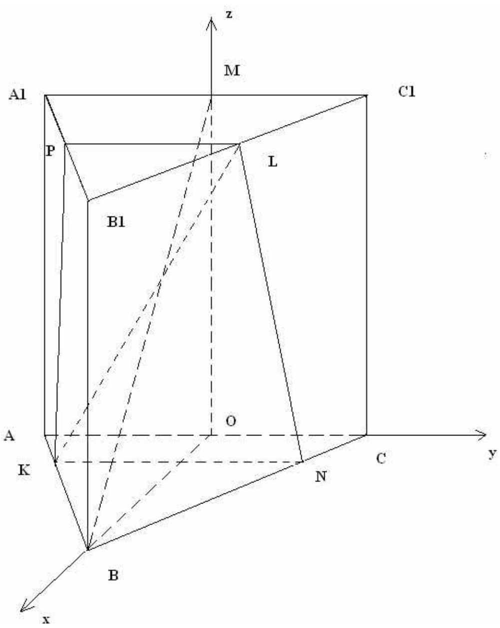
Ответ: $\cos\angle A_1HM=\dfrac{5}{7}.$

Приведем решение задачи №13 . Из 4161 выпускника выполнили задачу 31, что составляет 0,7%. Решение без использования координат оказывается гораздо сложнее.

Задача3[8].. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что AK = 1. Точки M и L — середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ;

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.



Решение. Построим сечение призмы плоскостью γ. Проведём $KN \parallel AC,\ CN=1.$ Проведём NL, проведём $LP \parallel AC,$ Проведём $PK.$ Трапеция $LPKN$ — искомое сечение. Сечение параллельно AC по признаку параллельности прямой к плоскости.

Способ 1. Введём систему координат как показано на рисунке, учитывая, что все углы треугольника ABC в основании 60° и формулу (2). В этой системе координат:

O(0;0;0),M(0;0;3),C(0;3;0),

C$_1$(0;3;3),B($3\sqrt{3}$;0;0), $B_1(3\sqrt{3};0;3)$,

$N\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{5}{2};0\right), K\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{5}{2};0\right), L\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};3\right)$

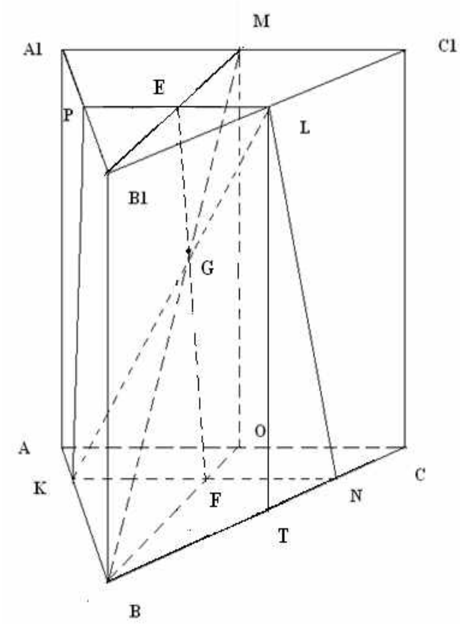
а) По теореме о трех перпендикулярах $BM \perp KN$. Достаточно доказать, что BM перпендикулярна любой прямой в плоскости γ, пересекающей прямую KN, например KL. $\overrightarrow{BM}(-3\sqrt{3};0;3)$, $\overrightarrow{KL}(\sqrt{3};4;3)$.

Найдем их скалярное произведение

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{KL}=-3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+0\cdot4+3\cdot3=-9+9=0$. Т.к. оно равно 0, то векторы перпендикулярны. Следовательно, BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Для нахождения расстояния от C до плоскости γ составим уравнение плоскости, проходящей через точки L,K, N , используя формулу (4), затем, по формуле (5) найдем расстояние.

$$\begin{vmatrix} x-\frac{3\sqrt3}{2} & y-\frac{3}{2} & z-3 \\ \frac{\sqrt3}{2}-\frac{3\sqrt3}{2} & \frac{5}{2}-\frac{3}{2} & 0-3 \\ \frac{\sqrt3}{2}-\frac{3\sqrt3}{2} & -\frac{5}{2}-\frac{3}{2} & 0-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-\frac{3\sqrt3}{2} & y-\frac{3}{2} & z-3 \\ -\sqrt3 & 1 & -3 \\ -\sqrt3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$



$$-3x+\sqrt3 z+\frac{3\sqrt3}{2}=0$$

$$d=\frac{\left|-3\cdot0+0\cdot3+\sqrt3\cdot0+\frac{3\sqrt3}{2}\right|}{2\sqrt3}=\frac{3}{4}.$$

Ответ: $d=\frac{3}{4}$.

Способ 2. Проведем $EF\perp KN$.

ΔABC – равносторонний $\Rightarrow$ $BO=AB\cdot\sin 60^\circ=\frac{6\sqrt3}{2}=3\sqrt3$

1) $\Delta BKN\sim\Delta BAC\Rightarrow \frac{BF}{BO}=\frac{KN}{AC}=\frac{5}{6}\Rightarrow BF=\frac{5}{6}BO=\frac{5\sqrt3}{2}$,

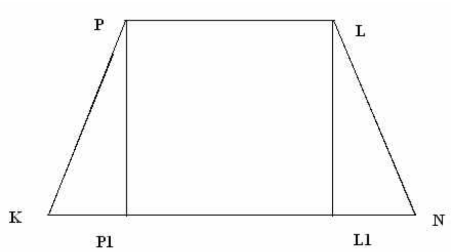
$\Delta B_1PL\sim\Delta B_1A_1C_1\Rightarrow \frac{B_1E}{B_1M}=\frac{PL}{A_1C_1}=\frac{1}{2}\Rightarrow EM=\frac{1}{2}B_1M=\frac{3\sqrt3}{2}.$

2) В ΔBOM $\angle O=90^\circ$, MB=$\sqrt{BO^2+OM^2}=6$

$$\Delta BGF\sim\Delta MGE\Rightarrow \frac{BG}{MG}=\frac{BF}{EM}=\frac{\frac{5\sqrt3}{2}}{\frac{3\sqrt3}{2}}=\frac{5}{3}\Rightarrow BG=\frac{5}{8}BM=\frac{15}{4},$$

$$MG=\frac{3}{8}BM=\frac{9}{4}.$$

3) Проведем LT $\perp$ BC, Из ΔLTN LN=$\sqrt{LT^2+TN^2}=\sqrt{13}$ $KPLN$ - равнобокая трапеция.

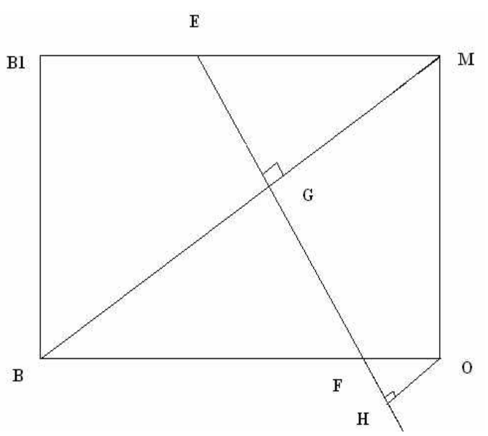


$P1L1=PL=3,\ P1K=(KN-PL)/2=1\Rightarrow EF=PP1=\sqrt{LN^2-L1N^2}=2\sqrt3$

$\Delta BGF\sim\Delta MGE\Rightarrow \frac{FG}{EG}=\frac{BF}{EM}=\frac{5}{3}\Rightarrow FG=\frac{5}{8}EF=\frac{5\sqrt3}{4},\ EG=\frac{3}{8}EF=\frac{3\sqrt3}{4}.$

4) В ΔEGM $\left(\frac{3\sqrt3}{2}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt3}{4}\right)^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2\Rightarrow EM^2=EG^2+GM^2\Rightarrow \angle EGM=90^\circ.\Rightarrow$

$\Rightarrow MB\perp EF$..



По теореме о трех перпендикулярах $MB\perp AC\Rightarrow MB\perp\gamma$. ЧТД

б) Т.к. $AC\parallel KN$, то расстояние от точки С до плоскости γ равно расстоянию то точки О до плоскости γ. Проведем $OH\parallel EF$

$$\Delta OHF\sim\Delta MGE\Rightarrow \frac{OF}{ME}=\frac{OH}{MG}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\Rightarrow OH=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{3}{4},$$

Ответ: $\frac{3}{4}$

3. Заключение.

В работе показано, что координатный метод является наиболее рациональным для решения некоторых стереометрических задач ЕГЭ, что подтверждает гипотезу исследования.

Решение геометрических задач способствует углублению и обогащению математических знаний учащихся. Через задачи происходит знакомство с прекрасным миром геометрии. При изучении свойств той или иной геометрической фигуры приобретается опыт работы с теоретическим материалом, а также нарабатываются навыки применения этих свойств к решению задач. К сожалению, геометрические задачи являются наиболее сложными заданиями ЕГЭ, о чём говорит статистика их выполнения учащимися

Хочется верить, что данная работа поможет в подготовке к решению именно таких заданий, ведь в ней рассмотрено большое количество стереометрических задач, что позволяет рассматривать её как пособие для подготовки к сдаче ЕГЭ.(Приложение 3).

4. Литература и источники

1. «Геометрия» Учебник для 10-11 кл. сред. шк./Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев и др. Москва, Просвещение, 2020 год.

2. «Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы» Учебное пособие. Под редакцией М.И.Сканави. Высшая школа. 1977 год.

3. ЕГЭ 2019. МАТЕМАТИКА. Профильный уровень.50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ/ И.В. Ященко, М.А. Волчкевич и др.под ред И.В.Ященко. – М.: Издательство «экзамен»,2019

4. ЕГЭ 2020. МАТЕМАТИКА. Профильный уровень.50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ/ И.В. Ященко, М.А. Волчкевич и др.под ред И.В.Ященко. – М.: Издательство «экзамен»,2020

5. ЕГЭ 2021. МАТЕМАТИКА. Профильный уровень.50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ/ И.В. Ященко, М.А. Волчкевич и др.под ред И.В.Ященко. – М.: Издательство «экзамен»,2021

6.Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов. И.В.Виленкин, В.М.Гробер. Ростов-на-Дону, Феникс,2004год.

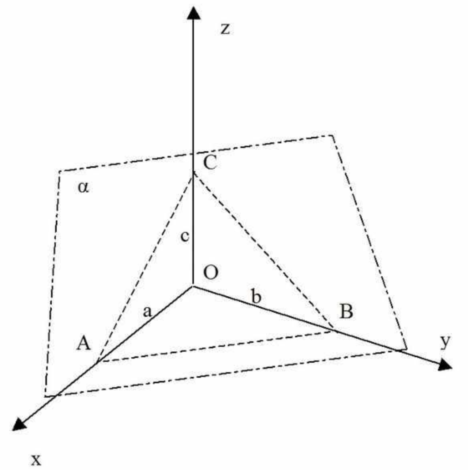
7. Федеральный институт педагогических измерений (www.fipi.ru).

8. Открытый банк заданий по математике (www.mathege.ru);

9. Решу ЕГЭ (www.ege.sdamgia.ru).

Приложение 1 . Теоремы косинусов и синусов для трехгранного угла.

Трёхгранный угол — это часть пространства, ограниченная тремя плоскими углами с общей вершиной и попарно общими сторонами, не лежащими в одной плоскости. Общая вершина О этих углов называется вершиной трёхгранного угла. Стороны углов называются рёбрами, плоские углы при вершине трёхгранного угла называются его гранями. Каждая из трёх пар граней трёхгранного угла образует двугранный угол.



Неравенство треугольника для трёхгранного угла

Каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

Сумма плоских углов трёхгранного угла

Сумма плоских углов трёхгранного угла меньше 360 градусов.

Теорема косинусов для трёхгранного угла

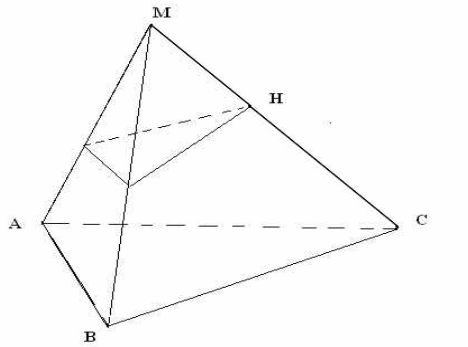
Первая теорема косинусов для трехгранного угла:

$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\angle H$, где

α - $\angle AMB$, β - $\angle BMC$, γ - $\angle AMC$,

$\angle H$ - двугранный угол при ребре МС.

$$\cos\angle H = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$



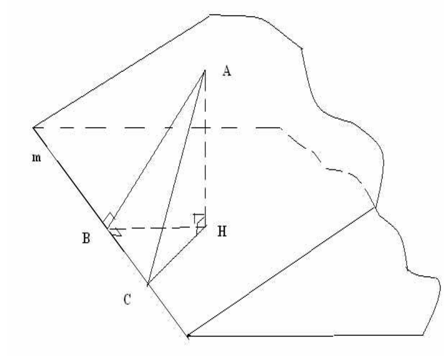
Вторая теорема косинусов для трехгранного угла

$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha$

где α, β, γ — плоские углы, A, B, C — двугранные углы, составленные плоскостями углов β и γ, α и γ, α и β.

Теорема синусов для трёхгранного угла

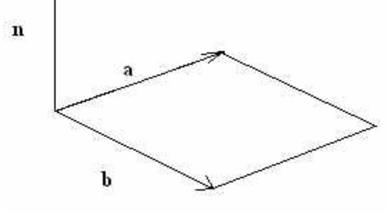
$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$, где α, β, γ — плоские углы трёхгранного угла; A, B, C — противолежащие им двугранные углы, составленные плоскостями углов β и γ, α и γ, α и β.



Приложение 2. Векторное произведение векторов.

Определение. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{n}$, который:

1) ортогонален обоим векторам: $\vec{n} \perp \vec{a},\ \vec{n} \perp \vec{b}$;



2) его величина равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a},\ \vec{b}$

Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тогда $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right) \times \left(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(a_2b_3 - a_3b_2\right)\vec{i} - \left(a_1b_3 - a_3b_1\right)\vec{j} + \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\vec{k} = \vec{n}$$

$\vec{n}((a_2b_3 - a_3b_2); -(a_1b_3 - a_3b_1); (a_1b_2 - a_2b_1))$ - вектор нормали к плоскости, построенной на векторах $\vec{a},\ \vec{b}$. Значит, для нахождения координат вектора нормали к плоскости, надо найти векторное произведение двух неколлинеарных векторов, лежащих в этой плоскости.

Приложение 3. Задачи для закрепления материала.

1. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Ответ: $arctg\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ($\sin\angle AHE = \dfrac{\sqrt{5}}{3}; \cos\angle AHE = \dfrac{2}{3}$).

2. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Ответ: $arctg\sqrt{5}$ ($\sin\angle AHE = \dfrac{\sqrt{30}}{6}; \cos\angle AHE = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$).

3. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 3$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Ответ: $arctg\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ ($\sin\angle AHE = \dfrac{\sqrt{286}}{22}; \cos\angle AHE = \dfrac{3\sqrt{22}}{22}$).

4. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 3$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Ответ: $arctg\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ ($\sin\angle AHE = \dfrac{\sqrt{190}}{19}; \cos\angle AHE = \dfrac{3\sqrt{19}}{19}$).

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=2$; $AD= AA_1=1$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

6. На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $CE : EC_1 = 1 : 3$. Найдите угол между прямыми BE и AC_1.

Ответ: $\arccos\dfrac{5\sqrt{51}}{51}$ $\left(\sin\angle AC_1F = \dfrac{\sqrt{1326}}{51}; tg\angle AC_1F = \dfrac{\sqrt{26}}{5}\right)$.

7. На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $CE : EC_1 = 3 : 2$. Найдите угол между прямыми BE и AC_1.

Ответ: $\arccos\dfrac{4\sqrt{102}}{51}$ $\left(\sin\angle AC_1F = \dfrac{\sqrt{969}}{51}; tg\angle AC_1F = \dfrac{\sqrt{38}}{8}\right)$.

8. Точка E – середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми BE и B_1D.

Ответ: $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{15}$ $\left(\sin\angle DB_1F = \dfrac{\sqrt{210}}{15};\ tg\angle DB_1F = \sqrt{14}\right)$.

9. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 12, а боковые рёбра равны 21. На ребре AA_1 отмечена точка M так, что $AM=8$. На ребре BB_1 отмечена точка K так, что $B_1K=8$. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости D_1MK.

10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 4. Пусть точка S лежит на стороне AB так, что AS :SB =1:3. Найдите расстояние от точки S до плоскости CPD_1, где P – середина B_1C_1

11. Сфера с центром в точке O вписана в прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.. Найдите угол между прямыми B_1O и BK, где K – середина DC.

12. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N— середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.

13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что плоскости AA_1D_1 и DB_1F_1 перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DB_1F_1.

14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что прямая B_1D перпендикулярна плоскости A_1BC_1.

б) Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C.