Министерство образования Пензенской области
Муниципальное бюджетное образовательное учреждение
СОШ № 18 г. Пензы

Некоторые приложения цепных дробей

Работа ученика7В класса
МБОУ СОШ № 18 г. Пензы
Кузнецова Артема
Руководитель – учитель математики и физики
Жистина ЛилияФаритовна

г. Пенза, 2021

Оглавление

Введение

Теория цепных дробей — одна из древнейших математических теорий.

Цепные дроби не изучаются в школьном курсе математики.

Одним из примеров практического применения цепных дробей является расчет так называемых лестничных (цепных) схем в электротехнике, решение диофантовых уравнений и сравнений по модулю.

Именно к таким способам приводит необходимость экономичного построения цепи с заданнымзначением сопротивленияиз одинаковых резисторов, более простого решений уравнений.

В нашей работе с помощью аппарата цепных дробей исследуется вопрос о полнотеряда сопротивлений участковцепи, построенных попринципу лестничных схемиз ограниченного количества одинаковых резисторов, исследуются способы решений диофантовых уравнений, сравнений по модулю, решение олимпиадных задач.

<u>Актуальность и практическая значимость исследования.</u>

Свойства цепных дробей, на которых сосредоточено настоящееисследование, ранее не изучались.Поэтому они являются неотъемлемой частью, недостающимидеталямиобщей картины, возможно, имеющими значение не только дляэлектротехнических задач. Диофантовы уравнения и сравнения по модулю решаются во внеурочной деятельности и помогают решать олимпиадные задачи.

Результаты нашего исследования, основанные на примененииэтих свойств, переводят данную задачу из разрядамодельных, имеющих чисто методическое значение, в разряд прикладных, имеющих уже, пусть и ограниченное, но практическое значение.

Объект исследования:цепные дроби.

Предмет исследования:суммы элементов цепной дроби, решение диофантовых уравнений и сравнений по модулю.

Цель исследования:изучитьвопрос о полноте ряда сопротивлений участков цепи, построенных по принципу лестничных схем из ограниченного количества одинаковых резисторов, решение диофантовых уравнений и сравнений по модулю.

Гипотезаисследования:спомощью ограниченного количества резисторов с одинаковым сопротивлением можно построить ряд сопротивлений цепи резисторов с шагом, равным минимально возможному сопротивлению цепи из данных резисторов, Решатьдиофантовы уравнения и сравнения по модулю можно практически по алгоритму.

Задачиисследования:

- Изучить необходимые сведения из теорииицепных дробейи электротехники.
- Сформулировать постановку задачи о полноте ряда сопротивлений в терминах теории цепных дробей.
- Найти решение диофантовых уравнений и сравнений по модулю, некоторых олимпиадных задач.

<u>Методы исследования:</u>поиск, отбор и анализ содержания источников информации; анализ, синтез, сравнение, классификация, доказательство; компьютерный эксперимент.

Продукт работы: алгоритмы использования цепной дроби при решении ряда задач.

Глава 1. Понятие цепных дробей

1.1. Определение цепных дробей

Канонической цепной (или непрерывной) дробью называется выражение вида

$$a = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

Числа q_iназываются элементами цепной дроби. Используется компактная запись: $a = [q_0; q_1, q_2, \dots]$.

Если оборвать запись $a = [q_0; q_1, q_2, \dots]$на элементе q_k, то останется дробь$[q_0; q_1, q_2, \dots, q_k]$. При обращении ее в обыкновенную дробь получится выражение$\frac{P_k}{Q_k}$- k-ая подходящая дробь (или подходящая дробь порядка k) для исходной цепной дроби. P_kи Q_k находятся по рекуррентным формулам

$$P_0 = q_0;\ Q_0 = 1$$

$$P_1 = q_1 \cdot q_0 + 1;\ Q_1 = q_1$$

$$P_{k+1} = q_{k+1} \cdot P_k + P_{k-1};\ Q_{k+1} = q_{k+1} \cdot Q_{k-1}; k \geq 1.$$

Выражение вида $a = q_0 + \frac{b_1}{q_1 + \frac{b_2}{q_2 + \frac{b_3}{\dots}}}$

называется обобщенной цепной дробью.

1.2. Примеры разложения в цепную дробь

Алгоритм разложения в цепную дробь тесно связан с алгоритмом Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел. Если a>b, то алгоритм Евклида описывается цепочкой неравенств:

$$a = b \cdot q_0 + r_1$$

$$b = r_1 \cdot q_1 + r_2$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_n$$

$$r_n = НОД(a; b), q_n \geq 2 \text{ и } a > b > r_1 > r_2 > \dots > r_n \geq 1, r_{n+1} = 0$$

Так как остатки r_i убывают с ростом n, то любое рациональное число представляется конечной цепной дробью: $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n]$

Возьмём дробь $\frac{10}{7}$. Наибольшее целое число, не превосходящее эту дробь— это 1: $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$.

Перевернем дробь $\frac{3}{7}$. Получим $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

Это и есть цепная дробь для числа $\frac{10}{7}$, которая, между прочим, даёт очень хорошие приближения: $\frac{10}{7}$довольно близко к 1, но если хотите точнее, то это примерно 1+$\frac{1}{2}$, ну а $\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{3}}$ – это точное значение.

Таким же способом можно представлять все числа. Если число иррациональное, то этот процесс будет продолжаться бесконечно, никогда не остановится, а для рациональных чисел дробь такого вида конечна.

Глава 2. Цепи сопротивлений

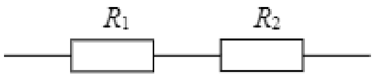
2.1. Основные понятия

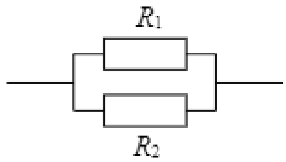
Сопротивление(резистор)–элемент электрической цепи с линейнойвольтамперной характеристикой, известной какзакон Ома:

$U = I \cdot R$,гдеU–напряжение на сопротивлении, I–сила тока,протекающегочерезсопротивление. Коэффициент пропорциональности Rназывается значением сопротивления или просто сопротивлением.

При последовательном соединениирезисторов с сопротивлениями$R_1, R_2, \dots, R_n$ ток, протекающий через них, одинаков, а напряжение на участкецепи складывается из напряжений на резисторах. В соответствии с законом Ома это означает, чтосопротивление участка цепи Rравно сумме сопротивлений:$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$.

При параллельном соединении резисторовток, протекающий черезучасток цепи, складывается из токов, протекающих черезрезисторы, а напряжение на каждомиз ниходинаково. Поэтому $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$.





На рисункеприведены простейшие примеры последовательного ипараллельного соединения сопротивлений. Формулы для этих случаев показывают, что при последовательном подключении резистора R_2к участку цепи с сопротивлением R_1сопротивление участка цепи возрастает, а при параллельном подключении того же резисторасопротивление участка цепи уменьшается. Таким образом, при наличии nодинаковых резисторовR_0набольшее возможное значение сопротивления участка цепи достигается при последовательном соединении всех резисторов, а наименьшее возможное –при параллельном соединении всех резисторов: $R_{min}=R_0/n$, $R_{max}=n \cdot R_0$.

2.2. Проектирование цепей сопротивлений с помощью цепных дробей

Пусть из одинаковых резисторов R_0необходимо собрать цепь с сопротивлением $\frac{19}{7} \cdot R_0$. Очевидно, эту цепь можно получить последовательным соединением двух резисторов R_0 и блока с сопротивлением $\frac{5}{7} \cdot R_0$ (блок 1).Этот блок, в свою очередь, можно получить путем последовательного соединения пяти блоков сопротивлением $\frac{1}{7} \cdot R_0$каждый. При этом для создания блока 1 будет использовано 35 резисторов R_0. Попытаемся сконструировать блок 1 более экономичным способом. Для этого заметим, что

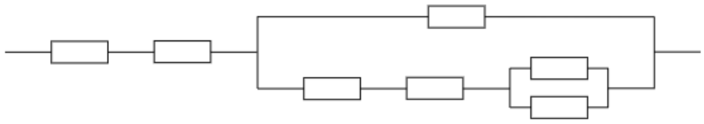
$$\frac{5}{7} \cdot R_0 = \frac{1}{\frac{7}{5 \cdot R_0}} = \frac{1}{\frac{1}{R_0} + \frac{2}{5 \cdot R_0}}$$

Таким образом, блок 1 можно построить путем параллельного соединения резистора R_0 и блока с сопротивлением $\frac{5}{2} \cdot R_0$ (блок 2). Поскольку $\frac{5}{2} \cdot R_0 = 2 \cdot R_0 + \frac{R_0}{2}$, то блок 2 можно получить последовательным соединением двух резисторов R_0 и блока с сопротивлением $2R_0$, состоящего из двух параллельно соединенных резисторов R_0. При этом для создания блока 1 будет использовано всего 5 резисторов R_0. Алгоритм построения участка цепи с требуемым сопротивлением $\frac{19}{7} \cdot R_0$аналогичен разложению обыкновенной дроби $\frac{19}{7}$в цепную дробь:

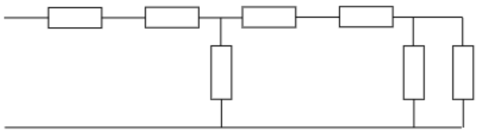
$$\frac{19}{7}R_0 = 2R_0 + \frac{5R_0}{7} = 2R_0 + \frac{1}{\frac{7}{5R_0}} = 2R_0 + \frac{1}{\frac{1}{R_0} + \frac{2}{5R_0}} = 2R_0 + \frac{1}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{\frac{5R_0}{2}}} =$$

$$= 2R_0 + \frac{1}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{2R_0 + \frac{R_0}{2}}} = [2;1,2,2]$$

Окончательныйвид спроектированного участка цепи изображен на рисунках.Отметим, что количество резисторовна этом участке равно суммеэлементовсоответствующей цепной дроби



Участок цепи, спроектированный с помощью разложения в цепную дробь.



Тот же участок в виде лестничной схемы

2.3. Постановка задачи о полноте ряда сопротивлений

Известно, что любое рациональное число можно единственным образом разложить в конечную цепную дробь. Поэтому с помощью алгоритма, рассмотренного в п.2.2, из одинаковых резисторовR_0можно собрать цепь с сопротивлением $R_0 \cdot a/b$, где a/b–любая обыкновенная дробь. Этот алгоритм является достаточно экономичным. Тем не менее, если количество резисторовR_0ограничено, то возникает вопрос о возможных значениях $R_0 \cdot a/b$, которые можно получить с помощью данного набора резисторов. Ясно, что для практических целейэтот вопрос следует формулировать следующим образом: каковы условия для построения ряда значений вида $R_0 \cdot a/b$ с шагом R_0/N, где N–заданное число? В частности, возможноли с помощьюнабора из Nрезисторов сопротивлениемR_0получить ряд сопротивлений участка цепис шагом, равнымR_0/N(минимальноесопротивление, которое можно получить с помощью Nодинаковых резисторов): $\frac{R_0}{N}, \frac{2R_0}{N}, \dots, \frac{(N-1)R_0}{N}$?

Положительный ответ на последний вопрос в терминах цепных дробей означает, что сумма элементов разложений в цепные дроби обыкновенных дробей$\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$не превышает N.Таким образом, ставится задача о полноте ряда сопротивлений участков цепи, построенных по принципу лестничных схем из ограниченного количества одинаковых резисторов.В свою очередь, решениеэтой задачи должно опираться на исследование свойств сумм элементов цепных дробей.

В классической теории цепных дробей исследуются главным образомсвойства подходящих дробей. Вопрос о свойствах сумм элементов цепнойдроби вознику нас только в связи с модельной задачей об экономичном построении цепи резисторов с заданным значением сопротивления. Возможно, поэтому раньше этот вопрос не привлекал внимание математиков. Во всяком случае, результаты наших исследований, в том числе и выраженныедоказанными теоремами, не являются общеизвестными; напротив, по-видимому, они являются новыми.

Глава 3. Теория календаря, диофантовы уравнения и сравнения по модулю

3.1.Теория календаря

При разработке солнечного календаря необходимо найти рациональное приближение для числа дней в году, которое равно 365,2421988… Подсчитаем подходящие дроби для дробной части этого числа:

Первая дробь означает, что раз в 4 года надо добавлять лишний день; этот принцип лёг в основу юлианского календаря. При этом ошибка в 1 день накапливается за 128 лет. Второе значение (7/29) никогда не использовалось. Третья дробь (8/33), то есть 8 високосных лет за период в 33 года, была предложена Омаром Хайямом в XI веке и положила начало персидскому календарю, в котором ошибка в день накапливается за 4500 лет (в григорианском -- за 3280 лет). Очень точный вариант с четвёртой дробью (31/128, ошибка в сутки накапливается только за 100000 лет) пропагандировал немецкий астроном Иоганн фон Медлер (1864), однако большого интереса он не вызвал.

3.2. Диофантовы уравнения вида $ax + by = c$

Используем отмеченное нами свойство цепных дробей для решения уравнения $ax+by=c$. Коэффициенты aиb взаимно просты. Разложим $\frac{a}{b}$ в цепную дробь. При этом $\frac{a}{b}=\frac{P_n}{Q_n}$.

Поскольку обе дроби несократимы, то $a = P_n$, $b = Q_n$. По свойству имеем

$bP_{n-1}- aQ_{n-1} = (-1)^n$.

Умножив обе части этого равенства на $(-1)^n c$, получим

$(-1)^{n+1}aQ_{n-1}c + (-1)^n bP_{n-1}c = c$,

откуда видно, что пара чисел

$\boldsymbol{x_0 = (-1)^{n+1}cQ_{n-1}}$, $\boldsymbol{y_0= (-1)^n cP_{n-1}}$

представляет собой решение уравнения.

Общее решение запишется в виде:

$\boldsymbol{x = (-1)^{n+1}c\, Q_{n-1}+ bt}$, $\boldsymbol{y = (-1)^n c\, P_{n-1}- at}$,

где tпринимает целые значения

Решим уравнение $17x + 13y = 5$.

Поскольку $\frac{17}{13}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}$, то $n= 2$, $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{4}{3}$,

откуда $x_0 = -5 \cdot 3 = -15$, $y_0= 4 \cdot 5 = 20$ и общее решение имеет вид

$x = -15+13t$, $y = 20-17t$.

При решении уравнений вида $ax + by = c$ *будем использовать следующий* ***алгоритм:***

1) Разложим $\frac{a}{b}$ *в цепную дробь.*

2) Из разложения $\frac{a}{b}=[q_0;q_1,q_2,\ldots,q_n]$*определяем значение* n *(длину цепной дроби).*

3) Находим n-1 *– подходящую дробь (в случае необходимости используем таблицу).*

4) Применяем формулы:

Общее решение: $\boldsymbol{x = (-1)^{n+1}cQ_{n-1}+ bt}$, $\boldsymbol{y = (-1)^n cP_{n-1}- at}$.

Замечания.

1) Можно находить сначала частное решение:$x_0 = (-1)^{n+1}cQ_{n-1}$, $y_0= (-1)^n cP_{n-1}$.А затем общее решение: $x= x_0 + bt$, $y= y_0 - at$

2) Если уравнение имеет вид $ax - by = c$, то, очевидно, что x = $(-1)^{n+1}cQ_{n-1}+ bt$,y = $(-1)^{n+1}cP_{n-1} + at$.

3) Если $a>b$и $\frac{a}{b}=[q_0;q_1,q_2,...,q_n]$, то $\frac{b}{a}$=[0; $q_0,q_1,...,q_n$].

Пример1. Решить уравнение в целых числах: 127x – 52y + 1 =0.

Решение: преобразуем отношение коэффициентов при неизвестных. Прежде всего, выделим целую часть неправильной дроби.

$$\frac{125}{52} = 2 + \frac{1}{\frac{52}{23}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{23}{6}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3+\frac{1}{\frac{6}{5}}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}}$$

Мы получили выражение, которое называется конечной цепной или непрерывной дробью. Отбросив последнее звено этой цепной дроби – $\frac{1}{5}$, превратим получившуюся при этом новую цепную дробь в простую и вычтем ее из исходной дроби $\frac{127}{52}$:

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3+1}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}} = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}, \qquad \frac{125}{52} - \frac{22}{9} = \frac{1143 - 1144}{52 \cdot 9} = \frac{-1}{52 \cdot 9}$$

Приведем полученное выражение кобщемузнаменателю и отбросим его, тогда получим $127 \cdot 9 - 52 \cdot 22 + 1 = 0$.

Из сопоставления полученного равенства с уравнением 127x – 52y + 1 = 0 следует, что x =9, y = 22 – решение этого уравнения, и все его решениябудут содержатьсяв уравнениях:

$\begin{cases} x = 9 + 52t \\ y = 22 + 127t \end{cases}$, t-целые числа.

Ответ: $\begin{cases} x = 9 + 52t \\ y = 22 + 125t \end{cases}$, t-целые числа.

<u>Другая форма записи:</u>

$$\frac{125}{52} = [2; 2,3,1,5]$$

Подходящие дроби:

$A_0 = 2 = \frac{2}{1}; A_1 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}; A_2 = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{3}} = \frac{17}{7}; A_3 = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{3+1}} = \frac{22}{9}$

Таблица расчета подходящих дробей:

k	0	1	2	3	4
a_k	2	2	2	3	1
P_k	2	5	17	22	125
Q_k	1	2	7	9	52

$$\frac{125}{52} - \frac{22}{9} = \frac{(-1)^3}{52 \cdot 9}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 9 + 52t \\ y = 22 + 125t \end{cases}$, t-целые числа.

<u>Пример2.Решить уравнение: 64x – 25y = 3.</u>

Решение: (64,25,3)=1 и (24,25) = 1 – имеем диофантово уравнение, и оно разрешимо в целых числах.

$$\frac{64}{25} = [2; 1,1,3,1,2]$$

Таблица расчета подходящих дробей:

k	0	1	2	3	4	5
a_k	1	1	1	3	1	2
P_k	2	3	5	18	23	64
Q_k	1	1	2	7	9	25

$$\frac{64}{25}-\frac{23}{9}=\frac{(-1)^4}{25\cdot 9}$$

$$64\cdot(9\cdot 3)-25\cdot(23\cdot 3)=(1\cdot 3)$$

Ответ: $\begin{cases} x=27-25t \\ y=69-64t \end{cases}$, t-целые числа.

Пример3. Решить уравнение: 571x + 359y = 7.

Решение: (571,359,7) = 1 и (571,359) = 1 – имеем диофантово уравнение, и оно разрешимо в целых числах.

$$\frac{571}{359}=[1;1,1,2,3,1,4,1,2]$$

Таблица расчета подходящих дробей:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_k	1	1	1	2	3	1	4	1	2
P_k	1	2	3	8	27	35	167	202	571
Q_k	1	1	2	5	14	22	105	127	359

$$\frac{571}{359}-\frac{202}{127}=\frac{(-1)^7}{359\cdot 127}$$

$$571\cdot\big(127\cdot(-7)\big)+359\cdot(202\cdot(-7))=(-1\cdot(-7))$$

Ответ: $\begin{cases} x=-889+359t \\ y=1414-571t \end{cases}$, t-целые числа.

Пример4. Решить уравнение: 3587x – 2743y = 1.

Решение: (3587,2743,1) = 1 и (3587,2743) = 211 – имеем диофантово уравнение, но оно не разрешимо в целых числах.

Ответ: неразрешимо в целых числах

3.3. Решение сравнений первой степени

Сравнение двух целых чисел по модулю натурального числа m — математическая операция, позволяющая ответить на вопрос о том, дают ли два выбранных целых числа при делении на m один и тот же остаток. Любое целое число при делении на m дает один из m возможных остатков: число от 0 до m-1; это значит, что все целые числа можно разделить на m групп, каждая из которых отвечает определённому остатку от деления на m.

Арифметические операции с остатками чисел по фиксированному модулю образуют модульную арифметику или модулярную арифметику, которая широко применяется в математике, информатике и криптографии.

Рассмотрим сравнения $ax\equiv b\ (mod\ m)$, где (a,m)=1

<u>Вывод формулы решения сравнения</u> $ax\equiv b\ (mod\ m)$, *где* $(a,m)=1, a>b$.

Разложим $\frac{m}{a}$ в непрерывную дробь и обозначим ее подходящие дроби через $\frac{P_k}{Q_k}$. Согласно свойству несократимости подходящих дробей $P_n=m, Q_n=a$.

Поэтому вместо $P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=(-1)^n$, получим

$mQ_{n-1}-P_{n-1}a=(-1)^n\Rightarrow P_{n-1}a=-(-1)^n+mQ_{n-1}$ или (т.к. Q_{n-1} - целое число) $P_{n-1}a=(-1)^{n-1}(modm)$.

Умножая обе части этого сравнения на $(-1)^{n-1}b$, получим

$$P_{n-1}a(-1)^{n-1}b = (-1)^{n-1}(-1)^{n-1}b(mod m) \Rightarrow P_{n-1}a(-1)^{n-1}b = b(mod m)(*)$$

Сравнивая это сравнение с исходным, получаем решение вида

$x \equiv P_{n-1}(-1)^{n-1}b(mod m)$, где P_{n-1} - числитель предпоследней подходящей дроби в разложении $\frac{m}{a}$. Т.к. сравнение имеет только одно решение, то (*) совпадает с этим единственным решением.

Пример1. Решить уравнение: $285x \equiv 177(mod\ 924)$.

Находим (285,924)=3 и 177 : 3 = 59, то решаем $95x \equiv 59(mod\ 308)$.

$$\frac{308}{95} = 3 + \frac{1}{\frac{95}{23}} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{23}{3}}} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = [3; 4,7,1,2]$$

k	0	1	2	3	4
P_k	3	22	94	107	309
Q_k	1	4	29	33	95

$$x \equiv 107(-1)^{3-1}59(mod 308)$$
$$x \equiv 107 \cdot 59(mod 308)$$
$$x \equiv 6313(mod 308)$$
$$x = 6313 + 308t$$

Глава 4. Олимпиадные задачи с использованием цепных дробей.

Олимпиадная задача по математике из коллекции задач Турнира Ломоносова

Решить уравнение в целых положительных числах: $x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{10}{7}$

Решение: любое число единственным образом представляется в виде суммы двух чисел, одно из которых — целое, а другое — неотрицательно и меньше единицы. Это — сумма его целой и дробной части. Для $\frac{10}{7}$ таким представлением будет $\frac{10}{7}=1+\frac{3}{7}$.

Поэтому x = 1, $y+\frac{1}{z}=\frac{7}{3}$. Аналогично разлагаем $\frac{7}{3}=2+\frac{1}{3}$ в сумму целой и дробной части. Получаем y = 2, z = 3.

Олимпиадная задача.

Докажите, что

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\ddots+\frac{1}{1991}}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\ddots+\frac{1}{1991}}}}}=1$$

Решение:

Докажем тождество $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=1$

Действительно, $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1}{2+x}+\frac{1+x}{2+x}=\frac{2+x}{2+x}=1$

Требуемое в задаче равенство получается подстановкой в доказанное

$$x=\frac{1}{3+\frac{1}{4+\ddots+\frac{1}{1991}}}$$

тождество

Олимпиадная задача по математике из коллекции задач Международного Турнира Городов

Решить в натуральных числах уравнение: x + 1/(y + 1/z) = 10/7

Решение:

Так как числа x, y, z — натуральные, $x=\left[\frac{10}{7}\right]=1$, $y=\left[\frac{1}{\frac{10}{7}-1}\right]=2$, $z=3$.

Олимпиадная задача по математике из коллекции задач Международного Турнира Городов

Решение: Докажем тождество $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=1$ при $x\neq-1$, $x\neq-2$.

Действительно, $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1}{2+x}+\frac{1+x}{2+x}=\frac{2+x}{2+x}=1$

Заключение

Аппарат цепных дробей успешно применяется в различных задачах, в которых необходимо выполнять приближение точных значений различных величин рациональными числами. Именно с этим связано большинство известных результатов, касающихся свойств цепных дробей.

В работе с помощью аппарата цепных дробей исследуется вопрос ополнотеряда сопротивлений участков электрической цепи, построенных по принципу лестничных схем из ограниченного количества одинаковых резисторов. Показано, что можно построить ряд сопротивлений цепи резисторов с шагом, равным минимально возможному сопротивлению цепи из данных резисторов. Показаны алгоритмы решения линейных диофантовых уравнений и сравнений первого порядка.

Приложения цепных дробей, конечно же, не ограничиваются только перечисленными. Часто с помощью цепных дробей получают:

- Доказательство иррациональности чисел.
- Определение заведомо трансцендентного числа (теорема Лиувилля).
- Алгоритмы факторизации SQUFOF и CFRAC.
- Характеристика стабильных, ортогональных многочленов.
- Цепные дроби использовались для расчета календарей

В настоящее время цепные дроби находят всё большее применение в вычислительной технике, так как позволяют строить эффективные алгоритмы для решения ряда задач на ЭВМ.

Помимо теоретического использования правильных цепных дробей существуют и практические приложения цепных дробей. Среди всего их множества можно отметить следующие:

- Решение обратных задач теплопроводности [5];
- Исследование механических колебаний в валопроводах различных энергетических установок [7];
- Синтез устройств частотной селекции на функциональных времязадающих элементах[4];
- Исследование устойчивости, исследование установившихся и переходных процессов, стабилизация систем, исследование и обеспечение качества систем, исследование случайных процессов, оптимизация параметров и ряд других проблем в технике, в частности, в автоматике, радиоэлектронике, приборостроении и др.

Список литературы и источников

1. Арнольд, В.И. Цепные дроби. – М.: МЦНМО, 2000. – 40 с.
2. Бухштаб, А.А. Теория чисел. –М.: Просвещение, 1966. –384 с.
3. Виленкин, Н.Я. За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра: Пособие для учащихся 10-11 кл./Н.Я. Виленкин, Л.П.Шибасов, З.Ф.Шибасова. –М.: Просвещение, 2008. –192с.
4. Гапоненко, Н.П. Цепные дроби в синтезе устройств частотной селекции на функциональных времязадающихся элементах / Н.П.Гапоненко, Н.Н.Рябец // Цепные дроби их применения: сб. научных трудов / под ред. В.Я. Скоробогатько. Институт математики АН УССР. - Киев, 1976. - С. 48 – 49.
5. Зотов, Е.Н. Решение обратных задач теплопроводности с помощью цепных дробей / Е.Н.Зотов, Н.П.Пучков, Ю.С. Шаталов//Цепные дроби их применения: сб. научных трудов / под ред. В.Я. Скоробогатько. Институт математики АН УССР. - Киев, 1976. - С. 56 – 57.
6. Новгородцев, А.Б.Теоретические основы электротехники. 30 лекций по теории электрических цепей: Учебное пособие. –СПб.: Питер, 2006. –576 с.
7. Терских, В.П. Цепные дроби – математические модели колеблющихся цепных систем / В.П. Терских//Цепные дроби их применения: сб. научных трудов/под ред. В.Я. Скоробогатько. Институт математики АН УССР. - Киев, 1976. - С. 34 – 40.
8. Хинчин,А.Я. Цепные дроби. –М.:Наука, 1978. –112 с.
9. Энциклопедия для детей. Т.11. Математика /Глав. ред. М.Д.Аксенова. –М.: Аванта+, 1998. –688 с.

http://ru.wikipedia.org.

Рецензия на исследовательскую работу по теме
«Некоторые приложения цепных дробей»
ученика 7В класса МБОУ СОШ № 18 г. Пензы
Кузнецова Артема

Исследовательская работа посвящена актуальной теме приложения цепных дробей в математике и физике. Цель работы четко сформулирована и обоснована. План исследования включает в себя все необходимые этапы для достижения цели.

Исследовательская работа имеет логически правильную структуру. Она состоит из введения, теоретической части, практической части, заключения, а также списка использованной при написании исследовательской работы литературы и приложений. Работа грамотно оформлена. Она содержит большое количество материала, что позволяет более наглядно раскрыть ее основные результаты.

Тема работы полностью раскрыта, Артем демонстрирует знания, выходящие за рамки школьной программы. В реферативной части Артем раскрывает теоретические основы цепных дробей, дает необходимые алгоритмы решения и свою оценку плюсов и минусов того или иного решения. Ученик грамотно проанализировал большое количество литературы по заданной тематике.

Работа является исследовательской, поэтому способствует развитию познавательного интереса, аналитических способностей, различных способов восприятия и обработки информации.

В практической части Артем приводит решение задач, собственное исследование. Обобщив полученные результаты, ученик приходит к выводу, что необходимо изучать дальнейшие приложения цепных дробей.

На протяжении всего периода работы над проектом у ученика формировались необходимые предметные знания и умения, общеучебные умения и навыки, необходимые компетентности.

Данную работу можно использовать в качестве дидактического материала для организации факультативных занятий преподавателями школы.

Таким образом, можно заключить, что поставленные цели и задачи успешно раскрыты.

Дата: 27.12.2021г.

Рецензент: Саунина С.А., заместитель директора по НМР