

Управление образования города Пензы  
XXVI научно-практическая конференция школьников города Пензы  
«Я исследую мир»  
МБОУ ГИМНАЗИЯ № 44 г. ПЕНЗЫ

**Детский экскаватор**  
**как механизм шарнирного параллелограмма**  
**для сложения двух постоянных по модулю векторов**

Проектно-исследовательская работа

Секция «Математика»

Автор:

Е.С. Кучеренко, ученик 7 «А» класса

Руководитель:

Д.А. Рожкова, учитель математики

Пенза, 2021

## Содержание

Введение.....	2
1 Теоретическая часть.....	3
1.1 Выбор модели детского экскаватора.....	3
1.2 Шарнирно-рычажный механизм, лежащий в основе конструкции детского экскаватора.....	5
1.3 Возможности интерактивной среды GeoGebra.....	6
2 Практическая часть.....	7
2.1 Построение модели детского экскаватора в программе GeoGebra.....	7
2.2 Основных характеристики детского экскаватора.....	7
2.3 Сложение векторов на шарнирно-рычажном механизме.....	11
Заключение.....	14
Список используемой литературы.....	15

## Введение

Тема проекта появилась неожиданно. Приближался день рождения моего младшего брата. Он увлекается экскаваторами и всегда просит подарить ему новую модель экскаватора. Так появилась идея смастерить своими руками детский экскаватор. После того как я попробовала сделать уменьшенную копию, стало понятно, что это достаточно сложный механизм, и он может быть изучен с точки зрения механики, математики и физики. А изготовленная модель детского экскаватора станет достойным экспонатом в музее занимательной науки, который есть в нашей гимназии.

**Объект исследования:** шарнирно-рычажный механизм, лежащий в основе детского экскаватора.

**Предмет исследования:** основные характеристики и математический функционал шарнирно-рычажного механизма, лежащего в основе детского экскаватора.

**Целью работы:** изготовить макет шарнирно-рычажного механизма (детский экскаватор), выполняющего операцию сложения векторов, для музея занимательных наук гимназии.

Исходя из поставленной цели, мною были определены следующие **задачи**:

- определить вид шарнирно-рычажного механизма, который лежит в основе конструкции детского экскаватора,
- построить интерактивную модель детского экскаватора в программе GeoGebra,
- на основе модели изучить основные характеристики детского экскаватора и его математический функционал,
- изготовить модель детского экскаватора для музея занимательных наук гимназии,
- разработать информационную табличку экспоната.

### **Актуальность темы исследования**

Конструкция детского экскаватора является шарнирно-рычажным механизмом. Такие механизмы были очень популярны в конце XX века, было разработано большое количество таких механизмов. С тех времен многое изменилось. Например, появились компьютерные программы, с помощью которых можно смоделировать механизм и изучить его свойства. Актуальность нашего проекта заключается в том, что мы изучаем старинный механизм с помощью современных технологий. Изготовленная модель демонстрирует математическую операцию сложения векторов на простейшем шарнирно-рычажном механизме, а значит является полезным экспонатом для музея занимательных наук.

# 1 Теоретическая часть

## 1.1 Выбор модели детского экскаватора

Для реализации, поставленной передо мной цели, изначально необходимо было определиться с моделью внешнего вида детского экскаватора. Для этого в Internet были рассмотрены разные модели детских экскаваторов, представленные на Рисунках 1-11.

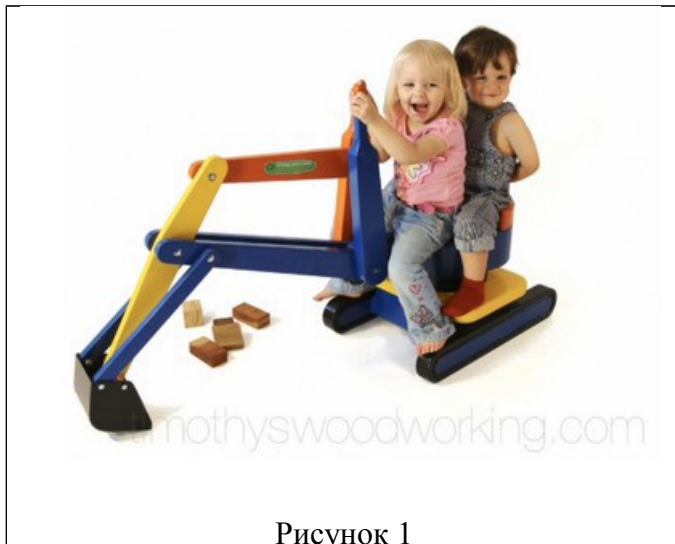


Рисунок 1



Рисунок 2



Рисунок 3



Рисунок 4



Рисунок 5



Рисунок 6



Рисунок 7



Рисунок 8

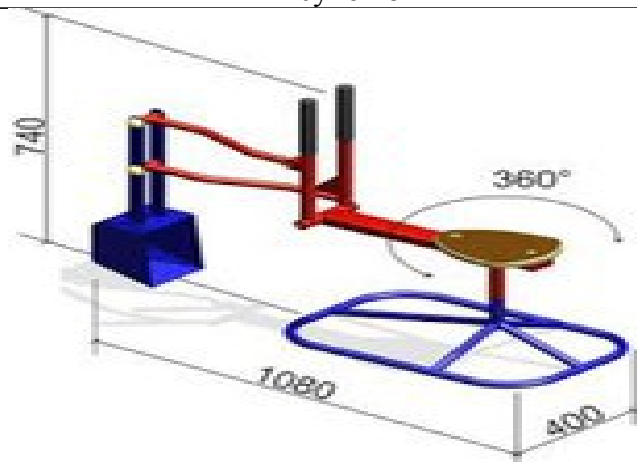


Рисунок 9

Рисунок 10



Рисунок 11

В качестве модели изготовления был выбран детский экскаватор, представленный на рисунке 11.

## 1.2 Шарнирно-рычажный механизм, лежащий в основе конструкции детского экскаватора

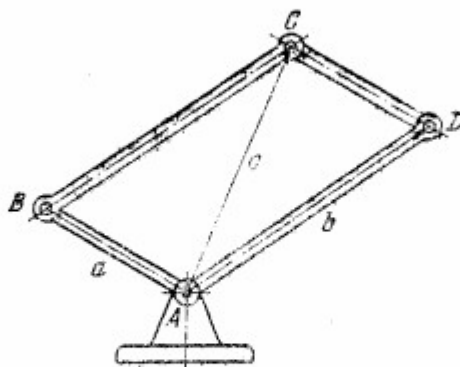
На следующем этапе проекта нужно было выяснить, какой простейший механизм лежит в основе выбранной модели.

При изучении научной литературы выяснилось, что конструкция детского экскаватора является шарнирно-рычажным механизмом. В конце XX века, было разработано большое количество таких механизмов. До сих пор ученые из разных областей науки исследуют механизмы Чебышева, Уатта, Робертса, Эванса, Дежонжа и др.

В шарнирно-рычажных механизмах жесткие звенья типа стержней, рычагов соединяются вращательными и поступательными кинематическими парами. Шарнирно-рычажные механизмы применяются для преобразования вращательного или поступательного движения в любое движение с требуемыми параметрами. Наибольшее распространение получили плоские четырехзвенные механизмы с тремя подвижными и одним неподвижным звеном. Наш механизм состоит из четырех подвижных звеньев.

Подробную классификацию таких механизмов я нашла в книге Артоболевского И.И. «Механизмы в современной технике» том 1 [1]. Наиболее близким к конструкции детского экскаватора является шарнирно-рычажный механизм, представленный на рис. 12.

704	МЕХАНИЗМ ШАРНИРНОГО ПАРАЛЛЕЛОГРАММА ДЛЯ СЛОЖЕНИЯ ДВУХ ПОСТОЯННЫХ ПО МОДУЛЮ ВЕКТОРОВ	ШР
		МО



Длины звеньев механизма удовлетворяют условиям:  $AB = DC$ ,  $BC = AD$ . Механизм представляет собой шарнирный параллелограмм  $ABCD$ , две соседние стороны которого являются складываемыми векторами, соответствующая же им диагональ дает суммарный вектор  $a + b = c$ .

Рисунок 12

Если к рычагу  $b$  жестко приварить перпендикулярный рычаг  $d$  для поворота рычага  $b$  на различные углы, рычаг  $a$  продлить влево вверх, а рычаг  $CD$  продлить вправо вниз и приварить к нему ковш, то получится конструкция детского экскаватора (рис. 13).

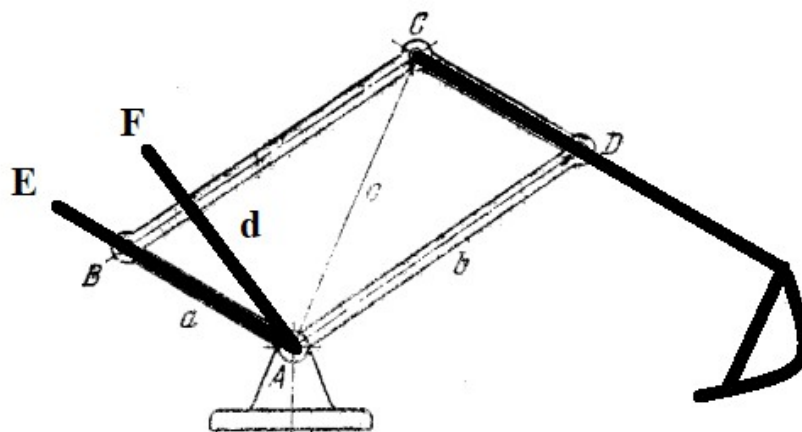


Рисунок 13

Со времен изобретения первых шарнирно-рычажных механизмов многое изменилось. В частности появились компьютерные программы, с помощью которых можно смоделировать механизм и изучить его свойства.

### 1.3 Возможности интерактивной среды GeoGebra

В последнее время для преподавания различных предметов в школе все чаще используются программные продукты, профессионального и образовательного назначения. Существует достаточно большое количество программных продуктов, актуальных для изучения математики [2]. Конечно ни один современный программный продукт, предназначенный для математических вычислений, не может считаться универсальным, поэтому возникает вопрос о целесообразности использования той или иной математической программы.

Среди основных классов математических пакетов можно выделить такие программные продукты, как:

- программы больше предназначенная для выполнения числовых и символьных вычислений: Maple, Mathematica, MatLab, Mathcad;
- интерактивные геометрические программы: GeoGebra, «Живая математика», «Математический конструктор»;
- специализированные математические программы.

На уроках математики мы часто используем программу GeoGebra. Идея программы заключается в интерактивном сочетании геометрического, алгебраического и числового представления [3]. У нее достаточно большие возможности и дружелюбный интерфейс. Поэтому для построения модели детского экскаватора я выбрала именно этот программный продукт.

Данный программный продукт позволяет:

- выполнять и геометрические построения модели детского экскаватора,
- создавать визуальный образ движения детского экскаватора,
- изучать такие свойства механизма, которые нельзя выявить аналитически.



Таким образом, GeoGebra позволит выполнить наглядное изображение модели движения детского экскаватора, что в свою очередь ускорит процесс решения поставленных в данной работе передо мной задач. Моделирование и наблюдение за процессом изменения при движении рычагов детского экскаватора с помощью интерактивной геометрической среды GeoGebra позволит изучить основные характеристики детского экскаватора и его математический функционал.

## 2 Практическая часть

### 2.1 Построение модели детского экскаватора в программе GeoGebra

Построим выбранную модель детского экскаватора при помощи программного продукта GeoGebra. Рычаги a, b, d построены как отрезки с соответствующими названиями. Движение рычагов обеспечивается в модели тем, что концы этих рычагов — точки E и F движутся по окружностям с центром в точке A. Ковш я рисовать не стала, движение ковша совпадает с движением точки H. На представленной модели (рис. 14) длина рычага a=3, длина рычага b=7, длина рычага DH=3.

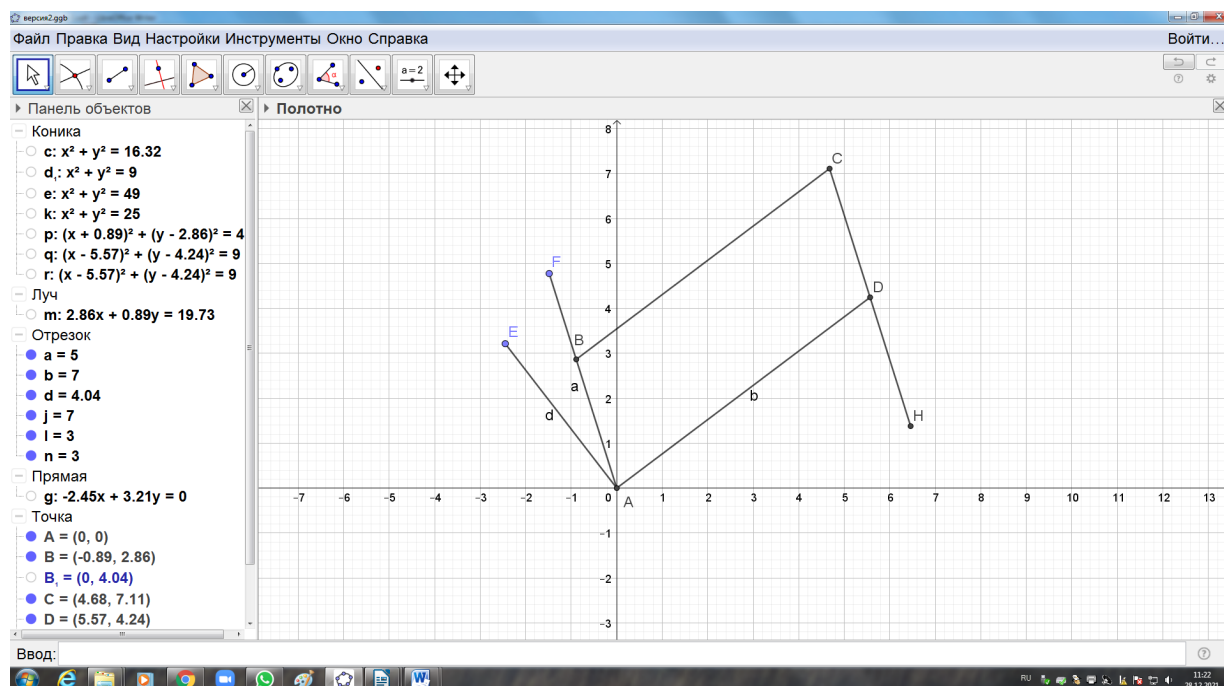


Рисунок 14.

### 2.2 Основных характеристики детского экскаватора

Построенная интерактивная модель позволила провести несколько наблюдений и изучить некоторые свойства детского экскаватора и его математический функционал.



## Наблюдение № 1.

При изменении положения рычага  $a$  (точка  $F$  движется по окружности) без изменения положения рычага  $d$ , точка  $H$  («ковш») движется по полуокружности с центром в точке  $D$  (рис. 15).

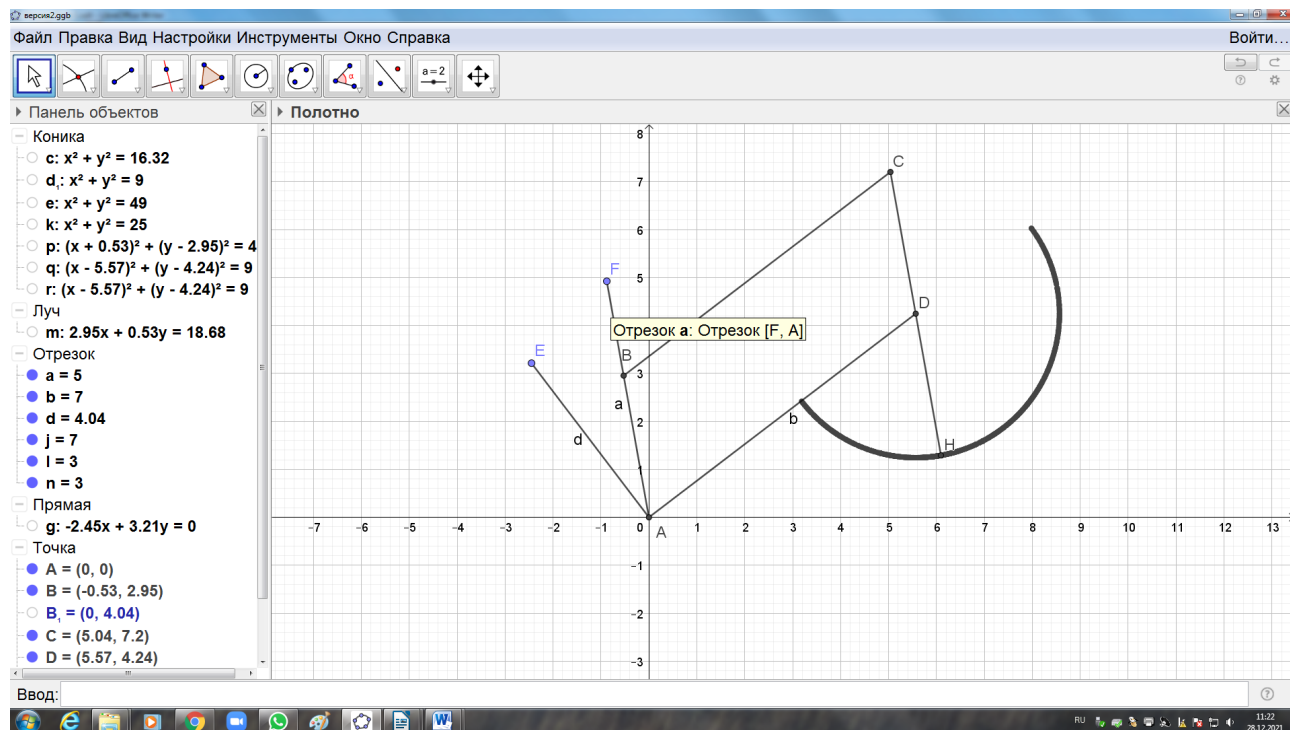


Рисунок 15

## Наблюдение № 2

При изменении положения рычага  $d$  (точка  $E$  движется по окружности) без изменения положения рычага  $a$ , точка  $H$  описывает сложную траекторию, которая похожа на кардиоиду (рис. 16).

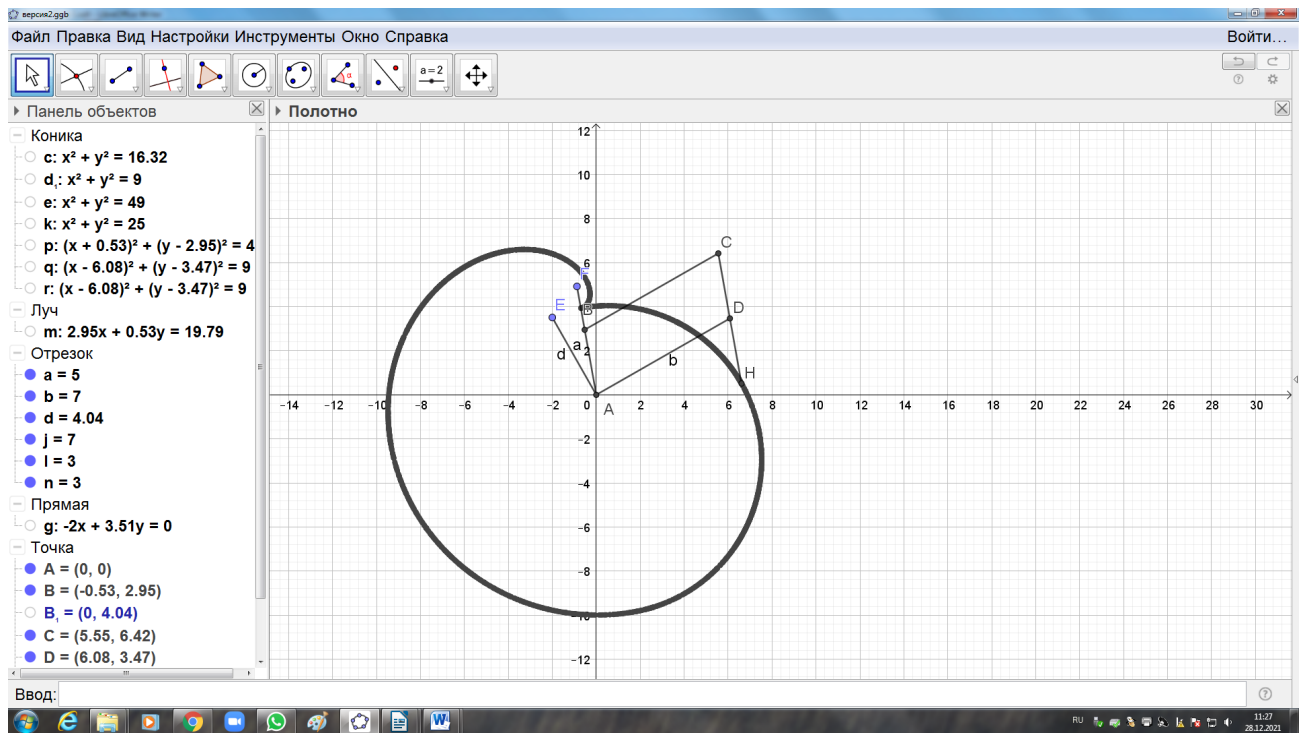


Рисунок 16

«Угол» на траектории движения точки Н возникает, когда BC, AD, AF находятся на одной прямой (рис. 17).

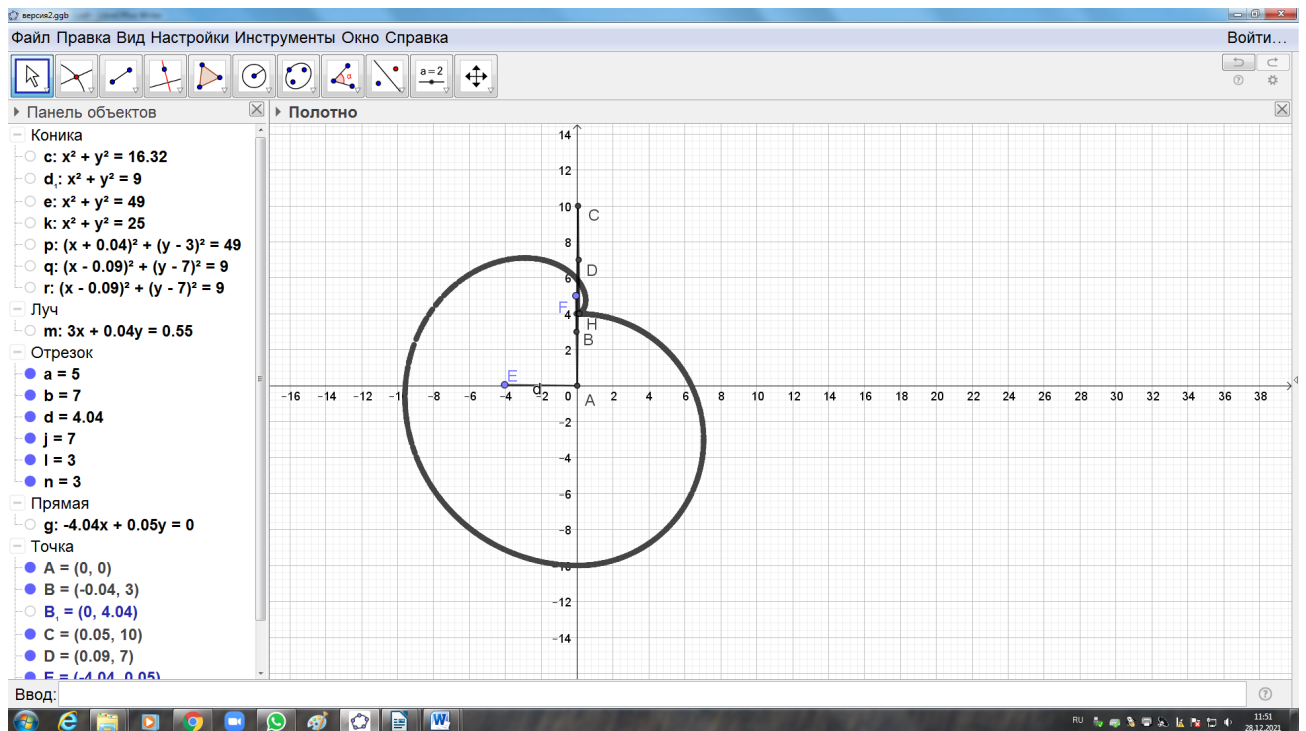


Рисунок 17

Наблюдение № 3.

При попеременном изменении рычагов  $a$  и  $d$  можно увидеть имитацию работы экскаватора: нижняя дуга — экскаватор загребает землю, средняя дуга, экскаватор поднимает ковш, верхняя дуга, экскаватор высыпает землю (рис. 18).

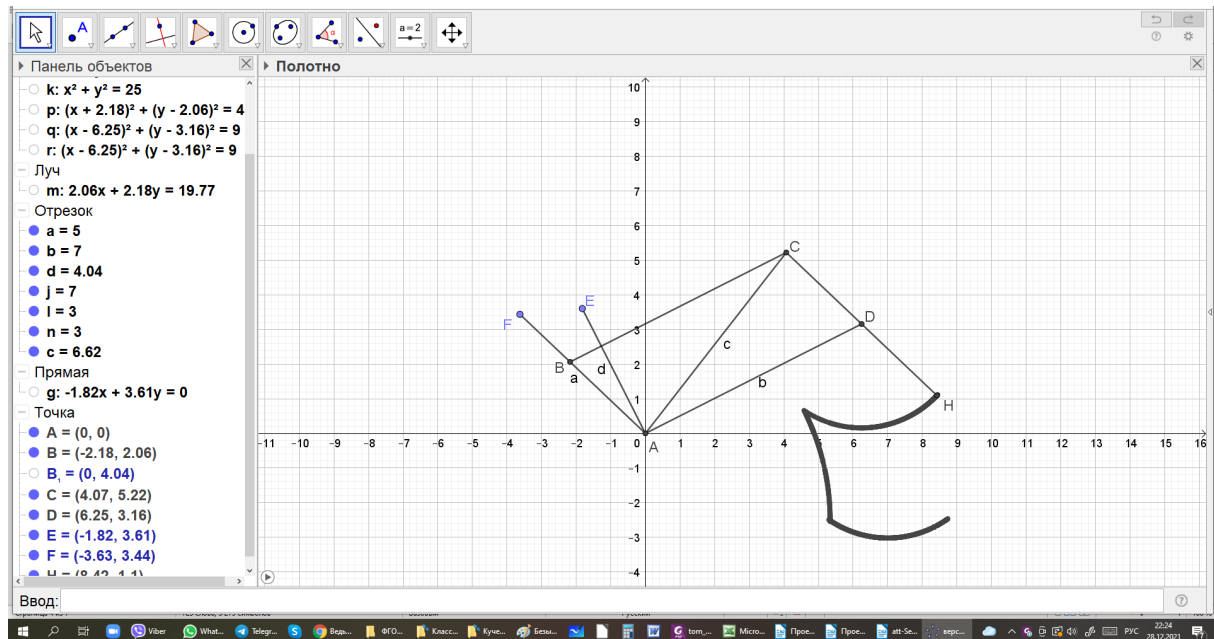


Рисунок 18

Наблюдение № 4.

При попеременном изменении рычагов  $a$  и  $d$  можно найти следующие характеристики.

а) Дальность вылета ковша — 10 (рис. 19).

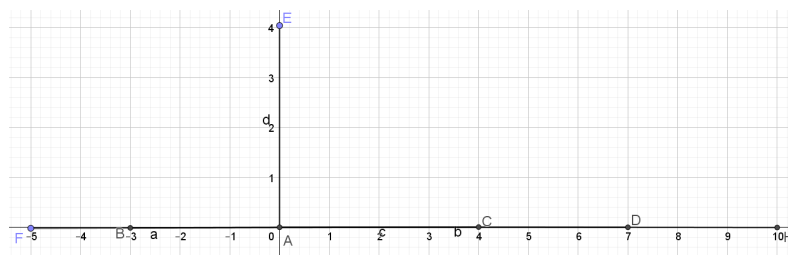


Рисунок 19

б) Глубина копания — 10 (рис. 20).

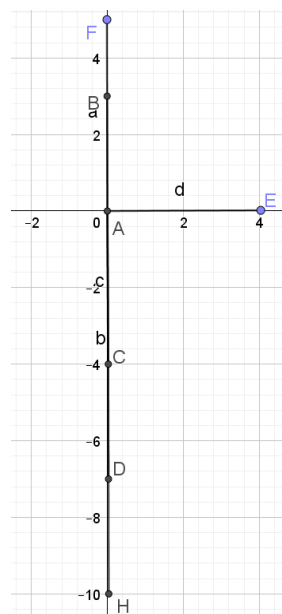


Рисунок 20

в) Высота копания — 7 (рис. 21).

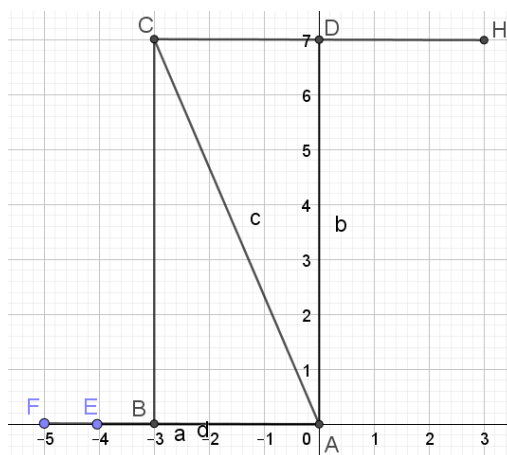


Рисунок 21

### 2.3 Сложение векторов на шарнирно-рычажном механизме

Когда я искала механизм, который лежит в основе выбранной модели детского экскаватора, я внимательно изучила I том книги «Механизмы в современной технике» И.И.Артоболевского [1]. Шарнирно-рычажный механизм, который больше всего подошёл, называется в этой книге «Механизм шарнирного параллелограмма для сложения двух постоянных по модулю векторов». Мне стало интересно что такое векторы и как они складываются. Я изучила главу IX «Векторы» в учебнике по геометрии (Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутусов, С.Б.Кадомцев и др.) [4]. Вектор — это направленный отрезок. Сложить два вектора можно по правилу треугольника и по правилу параллелограмма (рис. 22).

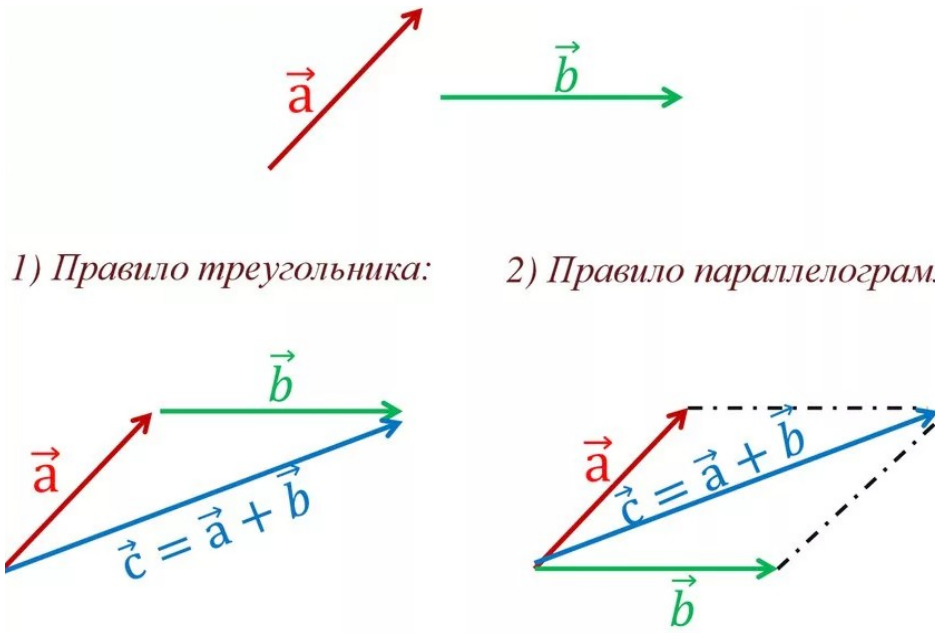


Рисунок 22

Таким образом, построенная модель складывает вектор  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$ . Вектор суммы в нашей модели — длинная диагональ параллелограмма  $\vec{AC}$ . Интересно проследить траекторию движения конца вектора при изменении положения рычага  $a$  и  $d$ . Это полуокружности с центром в точке  $D$  и с центром  $A$  соответственно.

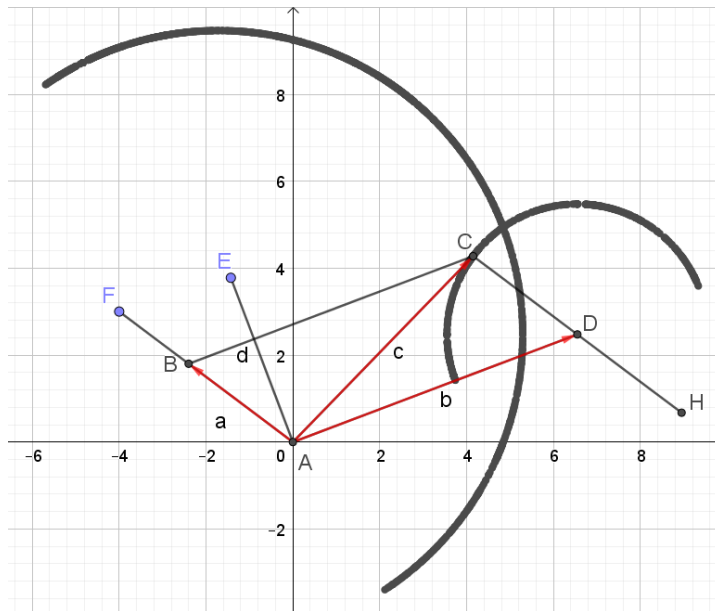


Рисунок 23

## 2.3 Детский экскаватор как экспонат музея занимательных наук

Изучив все свойства механизма, лежащего в основе детского экскаватора, стало понятно, что реальная модель может стать экспонатом музея занимательных наук. Пробную модель экспоната мы сделали из ПВХ панели и крепежных винтов, фотография на рисунке 24.



Рисунок 24

В дополнение к экспонату была разработана информационную табличка, которая рассказывает про этот экспонат, следующего содержания:

Название экспоната: «Механизм шарнирного параллелограмма для сложения двух постоянных по модулю векторов»

Описание экспоната: «Конструкции многих технических устройств являются шарнирно-рычажными механизмами. Представленная модель – один из примеров конструкции детского экскаватора, в основе которого лежит механизм шарнирного параллелограмма для сложения двух постоянных по модулю векторов. При изменении положения рычага  $a$  и рычага  $d$  мы можем увидеть, как меняется угол между векторами  $a$  и  $b$ , а значит и их сумма. Длины векторов при этом остаются неизменными.»

## Заключение

В процессе работы над проектом, были затронуты неожиданные аспекты темы. Выбранная модель детского экскаватора, оказалась достаточно сложным механизмом, который может быть изучен с точки зрения механики, математики и физики. А изготовленная модель детского экскаватора оказалась достойным экспонатом в музее занимательной науки, который есть в нашей гимназии.

В теоретической части исследования было выяснено, что в основе детского экскаватора лежит шарнирно-рычажный механизм. Была выбрана математическая программа GeoGebra для компьютерного моделирования этого механизма. Параллельно выяснилось, что шарнирно-рычажный механизм, лежащий в основе детского экскаватора, выполняет математическую операцию сложения векторов постоянной длины.

В практической части исследования была построена модель шарнирно-рычажного механизма, лежащего в основе детского экскаватора в программе GeoGebra. С помощью этой модели были выяснены основные характеристики механизма, траектории движения некоторых узлов. Также был изготовлен макет шарнирно-рычажного механизма (детский экскаватор), выполняющего операцию сложения векторов, для музея занимательных наук гимназии, разработана информационная табличка экспоната.

Цель проекта достигнута, поставленные задачи выполнены. В ходе исследования я пришла к нескольким выводам. Во-первых, шарнирно-рычажные механизмы не потеряли актуальности и в наши дни, с применением компьютерного моделирования можно изучать их свойства по-новому. Во-вторых, даже простые механизмы могут выполнять математические операции и выступать в качестве экспонатов музея занимательных наук.



## Список используемой литературы

1 Артоболевский И.И. Механизмы в современной технике. Справочное пособие. В 7 томах. Т. I: Элементы механизмов. Простейшие рычажные и шарнирно-рычажные механизмы. – 2-е изд., переработанное. – М «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1979» - 496 с.

2 Кравченко Г.В., Лаврентьев Г.В. Применение новых информационных технологий в обучении студентов математических направлений и специальностей // Педагогическое образование на Алтае. - 1999. - № 1. - С. 414-416.

3 Д.А. Чернышева, Г.В. Кравченко // Возможности применения интерактивной среды GeoGebra в обучении студентов математическим дисциплинам.

4 Анатасян Л.С. Геометрия. Учебник для общеобразовательных организаций. 7- 9 классы. 2-е издание. Москва- Просвещение – 2014 – 386 с.