муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная
школа № 25 г. Пензы им. В.П.Квышко»
(МБОУ СОШ № 25 г. Пензы
им. В.П.Квышко)

Исследовательская работа на тему:
«D-методом решения уравнений»

Работу выполнили:
ученики 10 А класса
МБОУ СОШ №25 г. Пензы им. В.П. Квышко
Жуков Александр Алексеевич
Алёшин Валерий Алексеевич

Руководитель:
учитель физики
МБОУ СОШ №25 г. Пензы им. В.П. Квышко
Обухова Татьяна Алексеевна

Пенза, 2022

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

«Природа так обо всем позаботилась, что повсюду ты находишь, чему учиться»
Леонардо да Винчи

Развитие мышления – это одна из главных задач образовательного процесса. Большой вклад в формирование мышления вносит математика. Математическое образование, получаемое в школе, является важнейшим компонентом общего образования и общей культуры современного человека. Практически все, что окружает современного человека – это все так или иначе связано с математикой. А последние достижения в физике, технике и информационных технологиях не оставляют никакого сомнения, что и в будущем положение вещей останется прежним. Решение различных математических задач, способствует развитию логического мышления и формированию навыков обобщения, конкретизации, анализа. Особую роль играют нестандартные задачи, при решении которых развивается творческое мышление и формируется умение нестандартно мыслить. Все это помогает использовать полученные знания и умения для решения практических и прикладных задач.

Авторы учебников по математике М.К. Потапов, Г.В. Дорофеев отмечали, что есть несколько видов нестандартных задач. Например, некоторые задачи внешне выглядят крайне необычно, поэтому поначалу не совсем понятно, как к ним подойти. Другие же замаскированы: на первый взгляд, это стандартное квадратное уравнение, но обычным методом оно не решается. А для решения третьего типа необходимо четкое и тонкое логическое мышление. Такие «нестандартные задачи» нуждаются в высокой логической культуре, определенной сообразительности, психологической подготовленности, а также в свободном владении разными разделами математики!

Уравнения в школьном курсе алгебры занимают ведущее место. На их изучение отводится времени больше, чем на любую другую тему школьного курса математики. Сила теории уравнений в том, что она не только имеет теоретическое значение для познания естественных законов, но и служит конкретным практическим целям.

Часто задачи экзаменов базируются на понятиях и результатах, не входящих впрограмму по математике. Конечно, задачи формулируются так, чтобы формально они соответствовали программе. Решения, которые публикуются после экзаменов в «официальных» сборниках, также не выходят за рамки этой программы. Однако эти решения часто выглядят искусственно, в то время как введение относительно несложных понятий и методов позволяет дать очень естественное решение, показать взаимосвязь различных уравнений, повысить математическую культуру. Применение нестандартных методов решения задач по математике требует нетрадиционного мышления, необычных в своей логике рассуждений. Незнание таких методов и приемов существенно уменьшает область успешно решаемых задач по математике и соответственно снижает шансы на получение высокого оценочного балла. Использование нестандартных методов к тому же способствует развитию нового, нешаблонного мышления, которое можно успешно применять и в других сферах человеческой деятельности (кибернетика, вычислительная техника, экономика, радиофизика, химия и т.д.).

Приведенные ниже примеры будут полезны для подготовки к сдаче ЕГЭ и ГИА, а так же для подготовки к поступлению в ВУЗы, особенно в такие, где традиционно предъявляются высокие требования к математическим знаниям. При подготовке к сдаче ОГЭ на дополнительных занятиях мы не ограничивались решением привычных задач, а очень часто разбирали примеры с «изюминкой».

Появилась гипотеза: существуют «нестандартные» уравнения и «нестандартные» методы решения задач.

Цель исследования:

Выявить уравнения, решаемые с помощью D-метода.

Задачи исследования:

На примере формулы сокращенного умножения (квадрат суммы или разности двух выражений) убедиться, что выделение полного квадрата может являться методом решения некоторых нестандартных задач

Применять выделение полных квадратов в выражении относительно какой-либо из функций как основу дискриминантного метода

Отобрать из тестов, предназначенных для подготовки к ЕГЭ, уравнения, решаемые с помощью D-метода

Составить банк уравнений, решить их с помощью D-метода

По возможности решить составленные уравнения альтернативным способом; сопоставить решения

Распространить приобретенный опыт и навыки среди учащихся 9–11 классов.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

D- метод (дискриминантный метод) – метод, в основе которого лежит выделение полных квадратов в выражении относительно какой-либо из функций (иногда это требует предварительного преобразования выражения)

Если $f(x) = 0$ можно привести к

$f_1(x)\varphi^2(x) + f_2(x)\varphi(x) + +f_3(x) = 0,$

причём $D = f_2^2 - 4f_1 \cdot f_3 \leq 0$ при всех допустимых значениях переменной, то данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} D = f_2^2 - 4f_1 \cdot f_3 = 0 \\ \varphi(x) = -\frac{f_2(x)}{2f_1(x)} \end{cases}$

Пример 1. (Химический факультет МГУ)

$$\begin{cases} y^2 + 4y\cos x + 4 = 0 \\ x \cdot |y| \cdot (x^2 + 3y^2) = 2\pi^3 + 24\pi \end{cases}$$

Решение. Применим схему D- метода к первому уравнению системы: $\frac{D}{4} = 4\cos^2 x - 4 \leq 0$

Поэтому первое уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} y = -2\cos x \\ \cos^2 x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} \cos x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \\ 2)\begin{cases} \cos x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} x = 2\pi n, n \in Z \\ y = -2 \end{cases} \\ 2)\begin{cases} x = \pi + 2\pi m, m \in Z \\ y = 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Тогда первоначальная система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2\pi n, n \in Z \\ y = -2 \\ 2x^3 + 24x = 2\pi^3 + 24\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pi + 2\pi m, m \in Z \\ y = 2 \\ 2x^3 + 24x = 2\pi^3 + 24\pi \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2\pi n, n \in Z \\ y = -2 \\ (x-\pi)(x^2 + x\pi + \pi^2 + 12) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pi + 2\pi m, m \in Z \\ y = 2 \\ (x-\pi)(x^2 + x\pi + \pi^2 + 12) = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} x = 2\pi n, n \in Z \\ y = -2 \\ x = \pi \end{cases} \\ 2)\begin{cases} x = \pi + 2\pi m, m \in Z \\ y = 2 \\ x = \pi \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $S = \{(\pi, 2)\}$.

ГЛАВА II. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Анализируя задания, встречающиеся в текстах ЕГЭ мы не обнаружили уравнения, решаемые с помощью исследуемого метода. В тестах Ларина А.А. нам встретилось несколько уравнений, для которых можно применить Д-метод

Пример 2(А.А. Ларин) Решить уравнение

$$(2x-2)^2(x+1)^2-\sqrt{2}(x^2-1)-6=0 \Leftrightarrow 4((x-1)(x+1))^2-\sqrt{2}((x-1)(x+1))-6=0.$$
$$((x-1)(x+1))=t,$$
$$4t^2-\sqrt{2}t-6=0,$$
$$D=98,$$
$$\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\sqrt{2}-7\sqrt{2}}{8}, \\ t=\dfrac{\sqrt{2}+7\sqrt{2}}{8}, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x^2-1=\dfrac{-3\sqrt{2}}{4}, \\ x^2-1=\sqrt{2}, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x^2-\dfrac{4-3\sqrt{2}}{4}=0, \\ x^2-(1+\sqrt{2})=0, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x\in\theta, \\ x^2-(1+\sqrt{2})=0, \end{array}\right. \left(x-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(x+\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$$
$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

Ответ: $x=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$. (Решение самостоятельное).

2 способ. D-метод.

$$(2x-2)^2(x+1)^2-\sqrt{2}(x^2-1)-6=0 \Leftrightarrow (2x-2)^2(x+1)^2-\sqrt{2}((x-1)(x+1))-6=0.$$
$$D=2(x-1)^2+4\cdot 4(x-1)^2\cdot 6=98(x-1)^2,$$
$$\left[\begin{array}{l} x+1=\dfrac{\sqrt{2}(x-1)-7\sqrt{2}(x-1)}{2\cdot 4\cdot (x-1)^2}, \\ x+1=\dfrac{\sqrt{2}(x-1)+7\sqrt{2}(x-1)}{2\cdot 4\cdot (x-1)^2}, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x+1=-\dfrac{3\sqrt{2}}{4(x-1)}, \\ x+1=\dfrac{\sqrt{2}}{x-1}, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 4x^2-(4-3\sqrt{2})=0, x\neq 1, \\ x^2-1=\sqrt{2}, x\neq 1, \end{array}\right. x=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

Первое уравнение не имеет корней, так как

$$4-3\sqrt{2}=\sqrt{16}-\sqrt{18}\langle 0 \Rightarrow 4x^2-(4-3\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow 4x^2+(3\sqrt{2}-4)=0.$$

Данное уравнение можно было решать как квадратное относительно $(x-1)$

Ответ: $x=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Пример 3. (А.А. Ларин) Решить уравнение

$$\cos 4x-6\cos 2x\cos x-4\sin^2 x+5=0.$$

Решение.

$$\cos 4x-6\cos 2x\cos x-4\sin^2 x+5=0 \Leftrightarrow \cos 4x-6\cos 2x\cos x+4-4\sin^2 x+1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos 4x-6\cos 2x\cos x+4\cos^2 x+1=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x-1-6\cos 2x\cos x+4\cos^2 x+1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-6\cos 2x\cos x+4\cos^2 x=0.$$

Применим D-метод. Решим уравнение как квадратное уравнение относительно

$\cos^2 2x$:

$D = 9\cos^2 x - 8\cos^2 x = \cos^2 x$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = \dfrac{3\cos x - \cos x}{2} \\ \cos 2x = \dfrac{3\cos x + \cos x}{2} \end{array}\right., \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 2\cos x, \\ \cos 2x = \cos x. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm \arccos\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in Z, \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, x = \pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Пример 4. Решить уравнение $(\boldsymbol{x^2 - x + 1})^2 + \boldsymbol{8}(\boldsymbol{x + 1})^2 = \boldsymbol{6}(\boldsymbol{x^3 + 1})$

Решение. Решим уравнение D-метод относительно $(\boldsymbol{x^2 - x + 1})$:

$(\boldsymbol{x^2 - x + 1})^2$

$$(x^2 - x + 1)^2 + 8(x+1)^2 = 6(x^3+1) \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)^2 - 6(x+1)(x^2 - x + 1) + 8(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x + 1 = 4(x+1), \\ x^2 - x + 1 = 2(x+1), \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x - 3 = 0, \\ x^2 - 3x - 1 = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}, \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$$

Можно было решить данное уравнение как квадратное уравнение относительно $(\boldsymbol{x + 1})$

Ответ: $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}, x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{5x^2 + 7x + 2} = x^2 + 7x + \frac{8}{4}$

Решение.ОДЗ:

$$x^2 + 7x + \frac{9}{4} \geq 0, x^2 + 7x + \frac{9}{4} = 0$$

$D = 40$

$$x^2 + 7x + \frac{9}{4}\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-7 - 2\sqrt{10}}{2}, \\ x = \dfrac{-7 + 2\sqrt{10}}{2}. \end{array}\right. x \in \left(-\infty; \frac{-7 - 2\sqrt{10}}{2}\right] \cup \left[\frac{-7 + 2\sqrt{10}}{2}; +\infty\right) = 0.$$

Введем вспомогательную переменную $a = 7$. Тогда получим уравнение

$$\sqrt{5x^2 + ax + 2} = x^2 + ax + \frac{9}{4}.$$

Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$a^2x^2+2a\left(x^3+\frac{7}{4}x\right)+x^4-\frac{x^2}{2}+\frac{49}{16}=0.$$

Решим полученное квадратное уравнение относительно переменной a:

$$D=x^6+\frac{7}{2}x^4+\frac{49}{16}x^2-x^6+\frac{x^4}{2}-\frac{49}{16}x^2=4x^4.$$

$$a=\frac{-x^3-\frac{7}{4}x\pm 2x^2}{x^2}\wedge a=7\Rightarrow\left[\begin{aligned}&x^2+9x+\frac{7}{4}=0,\\&x^2+5x+\frac{7}{4}=0,\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=\frac{-9\pm 2\sqrt{18{,}5}}{2},\\&x=\frac{-5\pm 2\sqrt{4{,}5}}{2}.\end{aligned}\right.$$

Учитывая ОДЗ, получаем $x=\dfrac{-9-2\sqrt{18{,}5}}{2},x=\dfrac{-5+2\sqrt{4{,}5}}{2}.$

Пример 6. Решить уравнение $\boldsymbol{(8x^2+5x+5)^2=x^2\,(8x^2+4x+5)}$

Решение. 1 способ. Приведем данное уравнение к виду:

$$(8x^2+5x+5)^2=x^2(8x^2+4x+5)\Leftrightarrow(8x^2+4x+x+5)^2-x^2(8x^2+4x+5)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(8x^2+4x+5)^2+(2x-x^2)(8x^2+4x+5)+x^2=0\Leftrightarrow(8x^2+4x+5)(7x^2+6x+5)+x^2=0\Leftrightarrow x\in\theta.$$

Учли при решении, что $\begin{cases}8x^2+4x+5\rangle 0,\forall x\in R,\\7x^2+6x+5\rangle 0,\forall x\in R,\\x^2\geq 0.\end{cases}$

Ответ: нет корней

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таблица 1 содержит информацию о решённых уравнениях, рациональности, единственном способе решения уравнения:

Пример	Способы, методы, Р – рациональный				
	D-метод	Введение вспомогательной переменной	Приведение уравнения к квадратному и введение вспомогательной переменной	Приведение уравнения к специальному виду и сравнение слагаемых с нулём	Графический способ
Пример 1	+				
Пример 2	+ **Р**	+ **Р**			
Пример 3	+ **Р**		+		
Пример 4	+				
Пример 5	+				
Пример 6	+			+ **Р**	+

Заметим, что не все указанные выше уравнения можно решить альтернативным способом *D*-методу. Из 6 уравнений лишь 50% решаются двумя способами, что даёт возможность проверить верность найденного решения.

D-метод интересен тем, что им решаются уравнения различных видов: уравнение-многочлен, иррациональные, тригонометрические.

В ходе занятия элективного курса в 10 классе был распространен опыт отбора повиду составления и решения уравнений, решаемых с помощью *D*-метода.

Подводя итог данной теме, стоит отметить, что использование нестандартных методов решения уравнений и неравенств, к сожалению, отодвигается на второй план, несмотря на то, что данные способы являются наиболее эффективными в решении. Именно поэтому необходимо изучать данные методы, ведь они в действительности являются незаменимыми при решении уравнений и неравенств.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банк нестандартных задач. – [Электронный ресурс]. URL:http://yulib94CS

2. Абрамов А. М., Дудницын Ю. П., Швардцбурд С. И. «Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа», М: «Просвещение», 1990 г

3. Математика. Материалы для подготовки к экзамену https://alexlarin.net/

4. Нараленков М. И. Вступительный экзамен по математике. Алгебра. Как решать задачи: учебно-практическое пособие- М.: Экзамен, 2003. 306-307 с.

5. Потапов М. К. «Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения» М. «Дрофа», 2002 г.

6.Кравцев С. В. , Ю. И .Макаров, М. И Максимов, М. И. Нараленков, В.Г. Чирскш Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных М.: Экзамен, 2001г.

7. Барвенов С. А. «Методы решения алгебраических уравнений», М. «Аверсэв», 2006 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Примеры, решаемые с помощью *Д*-метода:

$$3(x^2+3x-2)^2+2x(x^2+3x-2)-5x^2=0.$$

$$(x^2-11x+2)^2-2x(x^2-11x+2)-3x^2=0.$$

$$6(x^2+5x-1)^2-3x^2(x^2+5x-1)-3x^4=0.$$

Примеры, сходственные Примеру 5:

$$2(x^2+2x+4)^2+2(x-2)^2=5(x^3-8).$$

$$5(x^2+x+1)^2+6(x-1)^2=13(x^3-1).$$

$$(x^2-2x+4)^2+2(x+2)^2=3(x^3+8).$$

Примеры, сходственные Примеру 6:

$$\cos 2x+4\cos x+\sin 2x+40\sin x+13=0.$$

$$7\cos^2 x+5\sin^2 x+6\cos x+2\sin 2x-8\sin x+1=0.$$

$$4\sin^2 x-\cos x+\sin 2x-8\sin x-1=0.$$

Примеры, сходственные Примеру 7:

$$\sqrt{5x^2+5x-\frac{3}{5}}=x^2+3x-\frac{3}{5}.$$

$$\sqrt{11x^2+6x+\frac{2}{7}}=x^2+x+\frac{2}{7}.$$

$$\sqrt{26x^2+x-13}=x^2+6x-13.$$

Примеры, сходственные Примеру 8:

$$(6x^2+2x+1)^2=x^2(6x^2+x+1).$$

$$(8x^2+5x+1)^2=x^2(8x^2+3x+1).$$

$$(7x^2+3x+2)^2=x^2(7x^2+2x+2).$$

РЕЦЕНЗИЯ

на исследовательскую работу обучающихся 10 А класса
МБОУ СОШ №25 им. В.П. Квышко г.Пензы
Алешина Валерия и Жукова Александра
«D-метод решения уравнений»
(руководитель – учитель математики Обухова Т.А.)

Готовясь к сдаче ОГЭ и ЕГЭ, выпускники сосредотачивают свое внимание исключительно на решении задач, предлагавшихся на экзаменах прошлых лет и гораздо меньше времени уделяют теоретической подготовке. Такой «практический уклон», конечно, себя не всегда оправдывает. Часто задачи экзаменов базируются на понятиях и результатах, не входящих в программу по математике. Конечно, задачи формулируются так, чтобы формально они соответствовали программе. Решения, которые публикуются после экзаменов в «официальных» сборниках, также не выходят за рамки этой программы. Однако эти решения часто выглядят искусственно, в то время как введение относительно несложных понятий и методов позволяет дать очень естественное решение, показать взаимосвязь различных уравнений, повысить математическую культуру. Применение нестандартных методов решения задач по математике требует нетрадиционного мышления, необычных в своей логике рассуждений. Незнание таких методов и приемов существенно уменьшает область успешно решаемых задач по математике и соответственно снижает шансы на получение высокого оценочного балла. Использование нестандартных методов к тому же способствует развитию нового, нешаблонного мышления, которое можно успешно применять и в других сферах человеческой деятельности.

Приведенные ниже примеры будут полезны для подготовки к сдаче ЕГЭ и ОГЭ, а также для подготовки к поступлению в ВУЗы, особенно в такие, где традиционно предъявляются высокие требования к математическим знаниям

Спектр применения вопросов, рассмотренных Алешиным Валерием и Жуковым Александром, не очень широк, но грамотное владение данным материалом будет способствовать успешной сдачи экзаменов и дальнейшей учебе. Вопросы, рассмотренные в работе, помогут учащимся овладеть изложенной темой и будут интересны как ученикам, так и учителям.

Учитель математики Т. А. Обухова

Согласование участия в открытом региональном конкурсе исследовательских и проектных работ школьников «Высший пилотаж - Пенза» 2023.

В оргкомитет конкурса исследовательских
и проектных работ школьников
«Высший пилотаж - Пенза» 2023

Для участия в открытом региональном конкурсе исследовательских и проектных работ школьников «Высший пилотаж - Пенза» 2023 от образовательной организации

____

направляется работа на тему: «D-метод решения уравнений»
секция_Математика____
Автор(авторы) работы: Жуков Александр Алексеевич
Алёшин Валерий Алексеевич
Научное руководство: Обухова Татьяна Алексеевна _______________

Директор ОО / О.П. Ермакова/ м. п.